УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко (Ин-т математики НАН Украины)

УЛЬТРАПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЛЧАНОВ

In the paper we introduce the notion of ultrarepresentations of a quiver and consider a connection between such representations and the pairs of idempotent matrices.

У статті введено поняття ультразображення сагайдаків і показаний зв'язок таких зображень із парами ідемпотентних матриць.

1. Введение. Одним из методов в теории представлений (групп, алгебр и т.п.) состоит в том, что тем или иным способом задача об их представлениях сводится к некоторой свободной матричной задаче (т.е. матричной задаче без алгебраических соотношений). При этом кроме общих методов сведения, к которым принадлежит в первую очередь метод, предложенный А. В. Ройтером (см. [1,2]), и метод, предложенный Ю. А. Дроздом (см. [3]), и которые эффективны, как правило, только при доказательстве утверждений общего характера, существует много конкретных методов, каждый из которых имеет отношение к той или иной конкретной классификационной задаче. Именно с помощью таких конкретных методов решена задача о классификации пары взаимноаннулирующих операторов [4,5] и пары операторов, равных в квадрате нулю [6], задача о классификации модулярных представлений квазидиэдральных групп [7] и обобщенных групп кватернионов [8] и др. В этой статье предлагается новый конкретных метод, связанный, в частности, с представлениями одного класса полугрупп, порожденных идемпотентами.

2. Определение ультрапредставлений колчанов. В этой статье мы рассматриваем только конечные колчаны $Q = (Q_0, Q_1)$ без кратных стрелок; здесь Q_0 обозначает множество вершин колчана Q, а Q_1 — множество его стрелок. Через $\mathbb{N}$ мы обозначаем, как обычно, множество натуральных чисел, включая в него и число 0. $\mathbb{N}$-*маркированным колчаном* назовем пару (Q, φ), состоящую из колчана $Q = (Q_0, Q_1)$ и функции φ, которая каждой вершине $x \in Q_0$ сопоставляет множество $N_x = \{1, 2, \dots, i_x\}$, где $i_x \geq 0$, и каждой стрелке $\alpha : x \to y$ — подмножество $N_{xy} \subseteq N_x \times N_y$.

Сопоставим $\mathbb{N}$-маркированному колчану (Q, φ) колчан $\widehat{Q} = \widehat{Q}(\varphi)$ следующим способом: $\widehat{Q}_0 = 0 \cup_{x \in Q_0} \{(x, s) \,|\, s \in N_x\}$, $\widehat{Q}_1 = \{0 \to z \,|\, z \in \widehat{Q}_0 \setminus 0\}$.

В дальнейшем будем считать, что $q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Все представления мы рассматриваем над произвольным полем k и в матричном виде.

Представлением $\mathbb{N}$-*маркированного колчана* (Q, φ) над полем k назовем матрицу M с элементами из поля k, разбитую на вертикальные полосы, занумерованные элементами Q_0:

$$M = \{M_x \,|\, x \in A\} = \left[\ M_1 \mid M_2 \mid \cdots \mid M_n\ \right];$$

при этом

а) каждая из матриц M_i в свою очередь разбита на вертикальные полосы, число которых равно i_x;

б) для каждого $i \in Q_0$ матрица M_i обратима (матрицу M_i^{-1} естественно считать разбитой на i_x горизонтальных полос, размерности которых согласованы с размерностями вертикальных полос матрицы M_i);

в) если $i \to j$ — стрелка Q, то в $i_x \times i_y$-блочной матрице $M_i^{-1}M_j$ клетка, стоящая на месте (p,q), является нулевой для каждого $(p,q) \in N_{xy}$.

Представления $\mathbb{N}$-маркированных колчанов (Q,φ) мы также называем *ультрапредставлениями колчана* Q с функцией φ или просто *ультрапредставлениями колчана* Q (если говорится о таких представлениях в общем виде или с фиксированным φ).

Каждому ультрапредставлению M колчана Q с функцией φ естественным образом соответствует представление $\widehat{M}$, над тем же полем k, колчана $\widehat{Q} = \widehat{Q}(\varphi)$; а именно, если $\alpha : 0 \to z$, где $z = (x,s)$, — стрелка $\widehat{Q}$, то матрица $\widehat{M}_\alpha$ представления $\widehat{M}$, соответствующая стрелке α, равна s-ой вертикальной полосе матрицы M_x.

Ультрапредставления M *и* M' *колчана* Q (с одной и той же функцией φ) будем называть *эквивалентными*, если эквивалентны представления $\widehat{M}$ и $\widehat{M'}$ колчана $\widehat{Q}(\varphi)$.

Прямые суммы, неразложимые представления и т. п. определяются для ультрапредставлений стандартным способом.

3. Связь ультрапредставлений колчанов с другими классификационными задачами. Рассмотрим один важный пример, а именно задачу о подобии пар (A_1, A_2) идемпотентных матриц A_1 и A_2.

Покажем, что задача о подобии пар идемпотентных матриц эквивалентна задаче об ультрапредставлениях некоторого колчана.

Рассмотрим колчан $Q = (Q_0, Q_1)$, состоящий из двух вершин 1 и 2, и не имеющий стрелок. Будем рассматривать ультрапредставления колчана Q с функцией $\psi \equiv N_2$ (далее будем говорить просто ультрапредставления). Пусть $C = \{C_1 \,|\, C_2\}$ — ультрапредставление, где (для $i = 1,2$)

$$C_i = \begin{pmatrix} C_{i1} & C_{i2} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица C имеет m строк (тогда матрицы C_1 и C_2 состоят из m столбцов) и пусть число столбцов матриц C_{i1} и C_{i2} равно соответственно s_{i1} и s_{i2} (тогда $s_{i1} + s_{i2} = m$). Запишем матрицу C^{-1} в следующем виде:

$$C_i^{-1} = \begin{pmatrix} C_{1i}^{(-1)} \\ C_{2i}^{(-1)} \end{pmatrix},$$

где $C_{1i}^{(-1)}$ — матрица размера $s_{i1} \times m$, а $C_{2i}^{(-1)}$ — матрица размера $s_{i2} \times m$.

Сопоставим ультрапредставлению C пару идемпотентных матриц $A(C) = (A_1, A_2)$ следующим способом:

$$A_i = C_i \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_i^{-1} = C_{i1} C_{1i}^{(-1)}, \qquad (1.i)$$

где E_i — единичная матрица размерности s_{i1}.

Теорема 1. *Отображение, которое ставит в соответствие ультрапредставлению* C *пару идемпотентных матриц* $A(C)$*, является эпиморфным.*

Утверждение теоремы следует из того, что в силу известной теоремы о канонической форме Жордана произвольная идемпотентная матрица B представима в виде

$$B = D\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1},$$

где E — единичная матрица.

Теорема 2. 1) *Пары идемпотентных матриц $A(C)$ и $A(\overline{C})$ подобны тогда и только тогда, когда эквивалентны ультрапредставления C и $\overline{C}$.*

2) *Пара идемпотентных матриц $A(C)$ неразложима тогда и только тогда, когда неразложимо ультрапредставление C.*

Доказательство. Пусть пара $A(C)$ состоит, как и раньше, из матриц A_1 и A_2, а пара $A(\overline{C})$ — из матриц $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$. Для матриц пары $A(\overline{C})$ выпоняются равенства, аналогичные равенствам $(1.i)$:

$$\overline{A}_i = \overline{C}_i \begin{pmatrix} \overline{E}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{C}_i^{-1} = \overline{C}_{i1}\overline{C}_{1i}^{(-1)}. \qquad (\overline{1.i})$$

Докажем сначала утверждение 1).

Если ультрапредставления C и $\overline{C}$ эквивалентны, т. е. существуют обратимые матрицы X, X_{i1}, X_{i2}, такие, что $\overline{C}_{i1} = XC_{i1}X_{i1}$ и $\overline{C}_{i2} = XC_{i2}X_{i2}$ $(i = 1, 2)$, то пара $A(\overline{C}) = (\overline{A}_1, \overline{A}_2)$ состоит из матриц

$$\overline{A}_i = XC_i \begin{pmatrix} X_{i1} & 0 \\ 0 & X_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i1}^{-1} & 0 \\ 0 & X_{i2}^{-1} \end{pmatrix} C_i^{-1}X^{-1} =$$

$$= XC_i \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_i^{-1}X^{-1} = XA_iX^{-1},$$

а значит подобна паре $A(C)$.

Пусть теперь пары $A(C)$ и $A(\overline{C})$ подобны. Это означает, что существует обратимая матрица X, такая, что $XA_i = \overline{A}_iX$ (для $i = 1, 2$). С учетом равенств $(1.i)$ и $(\overline{1.i})$ имеем:

$$XC_i \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_i^{-1} = \overline{C}_i \begin{pmatrix} \overline{E}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{C}_i^{-1}X,$$

причем $E_i = \overline{E}_i$ (так как матрицы A_i и $\overline{A}_i$ подобны). Отсюда

$$\overline{C}_i^{-1}XC_i \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{C}_i^{-1}XC_i,$$

т. е. матрица $\overline{C}_i^{-1}XC_i$ коммутирует с матрицей

$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а значит

$$\overline{C}_i^{-1}XC_i = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix},$$

где S_{11} и S_{22} — некоторые обратимые матрицы размеров $s_i \times s_i$ и $(m-s_i)\times(m-s_i)$ соответственно. Последнее равенство можно записать в виде

$$XC_i = \overline{C}_i \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}$$

или

$$X \begin{pmatrix} C_{i1} & C_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{C}_{i1} & \overline{C}_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что отсюда следует эквивалентность ультрапредставлений C и $\overline{C}$ колчана Q.

Таким образом, утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и следуюшего утверждения, которое следует непосредственно из вышеприведенных определений и теоремы 1.

Лемма 1. а) *Пара $A(C \oplus C')$ подобна паре $A(C) \oplus A(C')$.*

б) *Если пара R идемпотентных матриц является прямой суммой пар P и P', то существуют ультрапредставления C и C', такие, что пара R эквивалентна паре $A(C) \oplus A(C')$.*

Теорема 2 полностью доказана.

Теоремы 1 и 2 сводят задачу о паре идемпотентных матриц к задаче о четырех матрицах, которую в современных терминах можно сформулировать как задачу о представлениях частично упорядоченного множества, состоящего из четырех попарно несравнимых элементов, или как задачу о представлениях колчана с вершинами $0, 1, 2, 3, 4$ и стрелками $0 \to i$ для $i = 1, 2, 3, 4$ (определения представлений частично упорядоченных множеств и представлений колчанов введены соответственно в работах [9] и [10]). По сути задача о четырех матрицах впервые решена в работе [11] (в этой работе решена некоторая эквивалентная задача); см. также работу [12], где задача о четырех матрицах решена (и сформулирована) в терминах векторных пространств.

Другие, более существенные, применения ультрапредставлений колчанов будут рассмотрены в дальнейших работах автора и его учеников.

1. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трэлла – К.: Наукова думка, 1973. – 100 с.
2. *Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck V.* Tame and wild subspace problems // Укр. мат. журнал – 1993. – **45**, №3. – С. 313–352.
3. *Дрозд Ю.А.* Ручные и дикие матричные задачи // Представления и квадратичные формы. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1983. – С. 39–74.
4. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – **28**. – 1972. – С. 69–92.
6. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
7. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления. – Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
8. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватернүонів // Доп. НАН України. – 2004. – №11. – С. 11–16.

9. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множества // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
10. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, № 1. – P. 71–103.
11. *Назарова Л. А.* Представления четвириады // Изв. АН СССР. – 1967. – **31**, № 4. – С. 1361–1378.
12. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problem of linear algebra and classification of quaduples of subspacies in a finite dimensional vector-space //Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1972. – **5**. – P. 163–237.

Получено 16.10.2008