УДК 681.14

Ф. Е. Гече (Ужгородский нац. ун-т)

НЕЙРОФУНКЦИИ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ В НЕЙРОБАЗИСЕ

В роботі розглядається питання про зображення підмножин множини усіх n-вимірних бульових векторів матрицями толерантності. Встановлена умова, при якій множина допускає зображення матрицями толерантності і на її основі отримана необхідна і достатня умова реалізованості бульових функцій одним нейронним елементом, а також розроблено метод синтезу розпізнаючої схеми у нейробазисі.

The paper considers the problem of representation subsets of the set of all n-dimension Boolean vectors by tolerance matrices. The condition has been established under which subset permits the represantation by tolerance matrices. The necessary and sufficient condition of Boolean function realization by one neural element has been obtained. The method of synthesis of the recognition scheme in the neural-basis has been worked out.

Нейронные элементы (НЭ) используются при построении нейросетей, которые являются эффективным механизмом решения широкого круга задач классификации объектов, распознавания образов, сжатия информации, прогнозирования поведения динамических систем, приближения и экстраполяции функции многих переменных [1-2]. В связи с этим большое значение приобрела разработка эффективных методов проверки реализуемости булевых функции на одном НЭ и построения методов синтеза логических схем в нейробазисе.

1. Нейрофункции и свойства их ядер. Пусть $Z_2 = \{0,1\}$, Z_2^n – n-ая декартовая степень множества Z_2, $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ произвольное подмножество множества Z_2^n и $A' = Z_2^n \backslash A$ – разность множеств Z_2^n и A. Из элементов множества построим матрицу $M\,(A)$ следующим образом: первой строкой матрицы $M\,(A)$ будет булевый вектор $\mathbf{a}_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n})$ из A, второй строкой матрицы $M\,(A)$ будет вектор $\mathbf{a}_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n})$ и т.д. Через S_q обозначим симметрическую группу степени q и $M(A_\xi) = \left(\mathbf{a}_{\xi(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{\xi(q)}\right)$, где $\xi\,(i)$ действие подстановки $\xi \in S_q$ на i.

Пусть Ω_n – множество всех n-мерных действительных векторов $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ таких, что для разных наборов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in Z_2^n$ $(\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$, числа $(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}), (\mathbf{x}_2, \mathbf{w})$ – разные, где $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$– скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{w}$.

Пусть $c_1 > c_2 > \ldots > c_{2^n}$ расположенные в порядке убывания взвешенные суммы $(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ при фиксированном $\mathbf{w} \in \Omega_n$ для всех $\mathbf{x} \in Z_2^n$ и $\mathbf{c_w} = (c_1, c_2, \ldots, c_{2^n})$.

В [3] показано, если $\mathbf{w} \in \Omega_n$ и $R_\mathbf{w}$ матрица над Z_2 размерности $2^n \times n$, которая удовлетворяет условие $R_\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T$ (T – символ транспонирования матриц, $\cdot$ – матричное умножение), то $R_\mathbf{w}$ имеет следующую структуру $R_\mathbf{w} = \begin{pmatrix} L_\mathbf{w} \\ L_{\mathbf{w}^*} \end{pmatrix}$, где $L_\mathbf{w} = (\alpha_{ij})$ $(i = 1, \ldots, 2^{n-1};\ j = 1, \ldots, n)$ матрица толерантности и $L_\mathbf{w}^* = (\alpha_{sj})$, $s = 2^{n-1} - i + 1$, $\alpha_{sj} = \bar{\alpha}_{ij}$ (черта над α_{ij} означает операцию инвертирования).

Пусть $E_n = \bigcup\limits_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_\mathbf{w}$. Матрицу N построенную из первых r строк матрицы толерантности $L \in E_n$ называют предматрицей толерантности и пишут $N \lhd L$ или $N = L\,(r)$.

Говорят, что множество $A \subseteq Z_2^n$ допускает представление матрицами толерантности из E_n, если существует такой элемент $\xi \in S_q$ $(q = |A|)$ и матрица толерантности $L \in E_n$, что:

$$M\left(A_\xi\right) \lhd L, \text{ если } \quad q \leq 2^{n-1};$$

$$M\left(A'_\xi\right) \lhd L, \text{ если } \quad q > 2^{n-1}.$$

Определим выпуклую оболочку $\operatorname{conv} A$ множества $A \subseteq Z_2^n$ так:

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \mathbf{x} \in [0,1]^n \mid \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_q \geq 0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q \in A \right\}.$$

Теорема 1. *Множество $A \subset Z_2^n$ допускает представление матрицами толерантности из E_n тогда и только тогда, когда* $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$.

Доказательство. Необходимость докажем от противного. Предположим, что $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' \neq \varnothing$ и A допускает представление матрицами толерантности из E_n. Рассмотрим случай, когда $q \leq 2^{n-1}$. Тогда существует такой элемент $\xi \in S_q$ и такая матрица $L = L_{\mathbf{w}} \in E_n$, что $M\left(A_\xi\right) \lhd L_{\mathbf{w}}$. Из последнего соотношения следует, что для всех $\mathbf{a} \in A$ и для всех $\mathbf{b} \in A'$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}) > (\mathbf{b}, \mathbf{w}). \tag{1}$$

Пусть $\mathbf{d} \in \operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A'$. Тогда

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{a}_i, \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1; \lambda_1, \ldots, \lambda_q \geq 0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q \in A, \tag{2}$$

и

$$\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \mathbf{b}_j, \ \sum_{j=1}^{s} \gamma_j = 1; \ \gamma_1, \ldots, \gamma_s \geq 0, \ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s \in A'. \tag{3}$$

Пусть $\omega_{\min} = \min\left\{(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}) \,|i = 1, 2, \ldots, q\right\}$ и $\omega'_{\max} = \max\{\, (\mathbf{b}_j, \mathbf{w}) \,|j = 1, 2, \ldots, s\}$. На основании (1)-(3) имеем $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) = \sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i \left(\mathbf{a}_i, \mathbf{w}\right) \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{q} \lambda_i\right) \omega_{\min} > \omega'_{\max} = \left(\sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j\right) \omega'_{\max} \geq \sum\limits_{j=1}^{s} \gamma_j \left(\mathbf{b}_j, \mathbf{w}\right) = (\mathbf{d}, \mathbf{w})$. Полученое неравенство $(\mathbf{d}, \mathbf{w}) > (\mathbf{d}, \mathbf{w})$ показывает, что наше предположение $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' \neq \varnothing$ при $M\left(A_\xi\right) \lhd L_{\mathbf{w}}$ является неверным. Итак, при $q \leq 2^{n-1}$ необходимость доказана.

В случае, когда $q > 2^{n-1}$, для A' существует такой элемент $\sigma \in S_q$, матрица толерантности$L_{\mathbf{v}} \in E_n$, что $M\left(A'_\sigma\right) \lhd L_{\mathbf{v}}$ и теорема доказывается аналогично как в предыдущем случае. Следовательно, необходимость доказана.

Теперь покажем, что если $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$, тогда A допускает представление матрицами толерантности из E_n.

Используя выпуклые оболочки $\operatorname{conv} A$ и $\operatorname{conv} A'$ построим множество $D = \{\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \,|\, \mathbf{a} \in \operatorname{conv} A, \ \mathbf{b} \in \operatorname{conv} A'\}$, которое, очевидно, является выпуклым и не содержит нулевый вектор $\mathbf{0}$, так как $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing$. Выпуклые оболочки $\operatorname{conv} A$ и $\operatorname{conv} A'$ являются компактными [4], значит, множество D также будет компактным, поэтому – замкнутым. Тогда на основании теоремы об отделимости [5], можно утверждать, что для D в $n-$мерном евклидовом пространстве R^n существует такая гиперплоскость $\pi = \{\mathbf{x} \in R^n | (\mathbf{p}, \mathbf{x}) = p_0\}$ $(\mathbf{p} \neq 0)$, $p_0 \in R$, которая удовлетворяет условиям

$$p_0 = (\mathbf{p}, 0) = 0, \tag{4}$$

и для всех $\mathbf{d} \in D$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{d}) < p_0 = 0. \tag{5}$$

Учитывая, что $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \in \operatorname{conv} A,\ \ \mathbf{b} \in \operatorname{conv} A')$ из последнего неравенства следует

$$(\mathbf{p}, \mathbf{a}) < (\mathbf{p}, \mathbf{b}). \tag{6}$$

Неравенство имеет место для всех $\mathbf{a} \in \operatorname{conv} A$ и для всех $\mathbf{b} \in \operatorname{conv} A'$. Следовательно, неравенство (6) имеет место и для любых $\mathbf{a} \in A$ и для любых $\mathbf{b} \in A'$. Если $|A| \leq 2^{n-1}$, то вектор $\mathbf{v} = -\mathbf{p}$ удовлетворяет следующему условию: для всех $\mathbf{a} \in A$ и для всех $\mathbf{b} \in A'$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{a}) > (\mathbf{v}, \mathbf{b}). \tag{7}$$

Тогда, как показано в [6], существует такой вектор $\mathbf{w} \in \Omega_n$, который также удовлетворяет (7). Это значит, что из элементов множества A можно построить такую матрицу$M\left(A_\xi\right)$, что $M\left(A_\xi\right) \lhd L_{\mathbf{w}}$. Если$|A| > 2^{n-1}$, то $\mathbf{v} = \mathbf{p}$ и аналогично тому, как выше для A можно показать, что из элементов A' можно построить матрицу $M\left(A'_\xi\right)$ такую, что $M\left(A'_\xi\right) \lhd L_{\mathbf{w}_1}$. Следовательно, теорема доказана.

Определим расстояние $\rho\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ между элементами $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z_2^n$ следующим образом

$$\rho\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|.$$

Очевидно, $\rho\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ - число координат, в которых отличаются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Пусть $A \subset Z_2^n$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ произвольные елементы из A $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$ и $O\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ множество таких орт векторов $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s} \in Z_2^n$, что $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{e}_{i_1} + \ldots + \mathbf{e}_{i_s}$, где $\oplus$ – покоординатная сумма векторов по модулю 2, $i_r \neq i_k$, если $r \neq k$. Обозначим через $H\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ подгруппу группы Z_2^n (Z_2^n – образует группу относительно операции $\oplus$), которая порождается елементами из $O\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$, т.е. $H\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right) = \langle \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s} | \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_s} \in O\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)\rangle$.

Покоординатную конъюнкцию булевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначим через $\mathbf{a}\&\mathbf{b}$, а смежный класс группы Z_2^n по подгруппе $H\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$, относительно элемента $\mathbf{a}\&\mathbf{b}$ через $H\left(\mathbf{a}\&\mathbf{b}\right)$.

Теорема 2. *Если множество $A \subset Z_2^n$ $(|A| \geq 2)$ допускает представление матрицами толерантности из E_n, тогда для произвольных елементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ из A для которых $|H\left(\mathbf{a}\&\mathbf{b}\right) \cap A'|\ \geq 2$ $(A' = Z_2^n \backslash A\ )$ и для произвольных елементов $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ из $H\left(\mathbf{a}\&\mathbf{b}\right) \cap A'$ имеет место неравенство $\rho\left(\mathbf{g}, \mathbf{h}\right) < \rho\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ произвольные элементы из A $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$, $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\mathbf{h} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ произвольные элементы из $H\left(\mathbf{a}\&\mathbf{b}\right) \cap A'$ и $\rho = \rho\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$. Не ограничивая общность рассуждений, примем, что первые ρ координаты векторов $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ разные, а остальные – совпадают, т.е. $\alpha_i \neq \beta_i$, для $i = 1, 2, \ldots, \rho$ и $\alpha_i = \beta_i$, $i = \rho + 1, \ldots, n$.

Согласно теореме 1, из того, что A допускает представление матрицами толерантности из E_n, следует:

$$\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} A' = \varnothing.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \mathbf{a} + (1 - \lambda_1)\, \mathbf{b} \neq \lambda_2 \mathbf{g} + (1 - \lambda_2)\, \mathbf{h}, \tag{8}$$

для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$.

Учитывая, что точки, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$, $(\mathbf{g} \neq \mathbf{h})$ являются угловыми точками соответствующих множеств $\operatorname{conv} A$, $\operatorname{conv} A'$ и $A \cap A' = \varnothing$ неравенство (14) можно заменить неравенством

$$\lambda_1 (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} \neq \lambda_2 (\mathbf{g} - \mathbf{h}) + \mathbf{h} \tag{9}$$

при условии, что

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1. \tag{10}$$

Из (9) следует , что существует такое число $r \in \{1, 2, \ldots \rho\}$ для которого имеет место неравенство

$$\lambda_1 (\alpha_r - \beta_r) + \beta_r \neq \lambda_2 (\gamma_r - \delta_r) + \delta_r. \tag{11}$$

Покажем, что из (15), (16) и $\alpha_r \neq \beta_r$ следует, что $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Пусть $\alpha_r = 1$. Тогда $\beta_r = 0$ и из (16) имеем

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 (\gamma_r - \delta_r) + \delta_r.$$

Отсюда

$$\gamma_r - \delta_r \neq \frac{1}{\lambda_2} (\lambda_1 - \delta_r). \tag{12}$$

Левая часть неравенства (17) принимает значение из множества $\{-1, 0, 1\}$, так как $\gamma_r, \delta_r \in Z_2$.

Правая часть неравенства (17) в силу (15) не может равняться 0 при любых значениях λ_1, λ_2. Значит, неравенство (17) имеет место при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ только в том случае, когда $\gamma_r - \delta_r = 0$. Следовательно, $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Пусть $\alpha_r = 0$. Тогда $\beta_r = 1$ и из (16) следует

$$-\lambda_1 + 1 \neq \lambda_2 (\gamma_r - \delta_r) + \delta_r$$

или

$$(\gamma_r - \delta_r) \neq \frac{1}{\lambda_2} (1 - \lambda_1 - \delta_r).$$

Как и в первом случае, последнее неравенство имеет место для всех λ_1,$\lambda_2 \in (0, 1)$ только в том случае, когда $\gamma_r - \delta_r = 0$. Следовательно, $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и теорема доказана.

Замечание 1. В случае, когда $|A| \leq 1$, множество A, очевидно, допускает представление матрицами толерантности из E_n.

Если через A обозначить ядро $K(f)$ булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $K'(f) = A'$, тогда учитывая результаты роботы [3] и вышеприведенные теоремы имеем.

Теорема 3. *Булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет нейрофункцией(пороговой) тогда и только тогда, когда* $\operatorname{conv} K(f) \cap \operatorname{conv} K'(f) = \varnothing$.

Теорема 4. *Если булевая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является нейрофункцией с ядром $K(f)$ ($|K(f)| \geq 2$), то для любых двух элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K(f)$ для которых$|H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)| \geq 2$, выполняется неравенство $\rho(\mathbf{g}, \mathbf{h}) < \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ любые элементы из $H(\mathbf{a}\&\mathbf{b}) \cap K'(f)$.*

2. Распознающая схема в нейробазисе. Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_t$ обучающая выборка для классов объектов $K_1'', K_2'', \ldots, K_t''$. Классы $K_i'', K_j''(i \neq j)$ в том числе и подмножества $K_i \subset K_i''$ и $K_j \subset K_j''$ могут пересекаться.

Рассмотрим задачу синтеза логической схемы из нейронных элементов (НЭ), которая произвольный объект s из $\bigcup\limits_{i=1}^{t} K_i''$ отнесёт к одному из классов объектов $K_i^{"}$, если элементы классов $K_1'', K_2'', \ldots, K_t''$ закодированы булевыми векторами размерности n, т. е.

$$
\begin{array}{l}
K_1 = \{(\alpha_{11}^1, \ldots, \alpha_{1n}^1), (\alpha_{21}^1, \ldots, \alpha_{2n}^1), \ldots, (\alpha_{k_1 1}^1, \ldots, \alpha_{k_1 n}^1)\},\\
\dotfill,\\
K_t = \{(\alpha_{11}^t, \ldots, \alpha_{1n}^t), (\alpha_{21}^t, \ldots, \alpha_{2n}^t), \ldots, (\alpha_{k_t 1}^t, \ldots, \alpha_{k_t n}^t)\}.
\end{array}
$$

Для решения поставленной задачи выберем конфигурацию нейросхемы, что состоит из трех слоев к которым предъявим следующие требования:
нейронные элементы 1-го и 2-го слоя имеют пороговую функцию активации [7];
выходной нейронный элемент формирует контрольное число $f_1 + f_2 \cdot 2^1 + \ldots + f_t \cdot 2^{t-1}$ по которому определяется принадлежность предъявленного вектора к одному из заданных классов, где f_i – значение выходного сигнала i-го блока;
если на вход подать булевый набор $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K_i$, то значение выходного сигнала i-го блока равно 1 т. е. $f_i = 1$.

Замечание 2. Первый слой состоит из t блоков, где i-ый блок задает p-покрытие обучающей выборки K_i. Весовые коэффициенты и пороги нейронных элементов 2-го слоя равны 1.

Замечание 3. Если $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ одновременно принадлежит множествам $K_{i_1}, \ldots, K_{i_q}$, то $f_{i_1} = \cdots = f_{i_q} = 1$, а значения остальных выходных функций равно 0, т. е. $f_j = 0$, если $j \neq i_1, \ldots, j \neq i_q$.

Перед тем, как перейти к синтезу нейросхемы, приведём некоторые результаты из [8].

Пусть $A \subseteq Z_2^n$ и $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ – n-мерный действительный вектор, S_n – симметрическая группа n-ой степени. Определим действия элементов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_2^n$, $\sigma \in S_n$ на $A = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ и $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ так:

$$\mathbf{a}A = \{\,(\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n) |\, (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in A\};$$

$$A^\sigma = \{\,(\beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)}) \big|\, (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in A\};$$

$$\mathbf{aw} = ((-1)^{\alpha_1} w_1, \ldots, (-1)^{\alpha_n} w_n);$$

$$\mathbf{w}^\sigma = (w_{\sigma(1)}, \ldots, w_{\sigma(n)}).$$

Каждой матрице толерантности $N = (\alpha_{sj})$ [8] размера $2^{n-1} \times n$ над Z_2 сопоставим матрицу $N^* = (\alpha_{sj})$ следующим образом: $s = 2^{n-1} - i + 1$, $\alpha_{sj} = \bar{\alpha}_{ij}$, где черта над символом означает инвертирование α_{ij}. Определим над матрицами толерантности N и N^* операцию $\square$ так:

$$N \square N^* = \begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим множество матриц толерантности

$$L_1 = (0_1), \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_1, 0_1 \\ L_1^*, 0_1 \end{pmatrix}, \ldots, \quad L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1}, 0_{n-1} \\ L_{n-1}^*, 0_{n-1} \end{pmatrix},$$

где 0_t – нулевой столбец размера $2^{t-1} \times 1$. Через $L_i^*(q_i)$ обозначим матрицу, состоящую из первых q_i строк матрицы L_i^*.

Максимальное подмножество $p(\mathbf{a}A)$ множества $\mathbf{a}A$, удовлетворяющее условие

$$p(\mathbf{a}A)_\xi^\sigma = (L_j 0_j \ldots 0_j) \square \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j} (L_{j+i}^*(q_i)\, \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j+i)}) \right) \tag{13}$$

назовём p-подмножеством A относительно $\mathbf{a}$ с индексом j и параметрами $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$, если $q_o \geq q_1 \geq \cdots \geq q_{n-j}$.

Замечание 4. Параметр $\sigma \in S_n$ подбирается так, что вес Хемминга (количество единиц) $X(i)$, $X(i+1)$ соответствующих столбцов i и i+1, удовлетворяли неравенству $X(i) \geq X(i+1)$. Параметр $\xi \in S_q$ подбирается согласно правой части (18).

Любое множество A_s булевых наборов можно записать через p-подмножества так:

$$A_s = \mathbf{a}_1^s p(\mathbf{a}_1^s A_s) \cup \mathbf{a}_2^s p(\mathbf{a}_2^s A_s) \cup \ldots \cup \mathbf{a}_{r_s}^s p(\mathbf{a}_{r_s}^s A_s), \tag{14}$$

где на множества p-подмножества $p(\mathbf{a}_i^s A_s)$ налагаються следущие условия:

$$\mathbf{a}_i^s p(\mathbf{a}_i^s A_s) \not\subset \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathbf{a}_j^s p(\mathbf{a}_j^s A_s), \quad i = 2, 3, \ldots, r_s. \tag{15}$$

Точки $\mathbf{a}_1^s, \mathbf{a}_2^s, \ldots, \mathbf{a}_{r_s}^s$ называются точками разложения множества A_s на p-подмножества. Точки разложения $\mathbf{a}_1^s, \mathbf{a}_2^s, \ldots, \mathbf{a}_{r_s}^s$ множества на p-подмножеств выбираются таким образом, чтоб число орт векторов множества $\mathbf{a}_i^s A_s$ было не меньше количества орт векторов множества $\mathbf{a}^s_{i+1}A_s(i = 1, 2, \ldots, r_s - 1)$ и чтобы имело место соотношение (15). В дальнейшем будем рассматривать только такие точки разложения.

Пусть B_s произвольное подмножество множества A_s и $\mathbf{b}^s_1, \mathbf{b}^s_2, \ldots, \mathbf{b}^s_{r_s}$ такие элементы из B_s, что

$$B_s \subseteq \mathbf{b}^s_1 p(\mathbf{b}^s_1 A_s) \cup \mathbf{b}^s_2 p(\mathbf{b}^s_2 A_s) \cup \ldots \cup \mathbf{b}^s_{r_s} p(\mathbf{b}^s_{r_s} A_s), \tag{16}$$

$$B_s \not\subset \bigcup_{i=1,\ i\neq j}^{r_s} \mathbf{b}^s_i p(\mathbf{b}^s_i A_s), \quad \text{где } j \in \{1, 2, \ldots, r_s\} \tag{17}$$

и p-подмножества $\mathbf{b}^s_i p(b^s_i A_s)$ удовлетворяют условие (20).

Говорят, что p-подмножества $\mathbf{b}^s_1 p(\mathbf{b}^s_1 A_s), \ldots, \mathbf{b}^s_{r_s} p(\mathbf{b}^s_{r_s} A_s)$ задают p-покрытие подмножества B_s, в множестве A_s, относительно точек $\mathbf{b}^s_1, \mathbf{b}^s_2, \ldots, \mathbf{b}^s_{r_s}$ если они удовлетворяют условиям (20)-(22). Если через $P_{A_s}(B_s; \mathbf{b}^s_1, \mathbf{b}^s_2, \ldots, \mathbf{b}^s_{r_s})$ обозначить множество $\bigcup\limits_{i=1}^{r_s} \mathbf{b}^s_i p(\mathbf{b}^s_i A_s)$, то очевидно, что $B_s \subseteq P_{A_s}(B_s; \mathbf{b}^s_1, \mathbf{b}^s_2, \ldots, \mathbf{b}^s_{r_s}) \subseteq A_s$.

Пусть p-подмножество $p(\mathbf{a}^s_m A_s)$ имеет параметры σ_{ms} и ξ_{ms}, т. е.

$$p(\mathbf{a}^s_m A)^{\sigma_{ms}}_{\xi_{ms}} = (L_{j_{ms}} 0_{j_{ms}} \ldots 0_{j_{ms}}) \,\square \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j_{ms}} \left(L^*_{j_{ms}+i}(q^{ms}_i) \underbrace{0\ldots0}_{n-(j_{ms}+i)} \right) \right),$$

где $q^{ms}_0 \geq q^{ms}_1 \geq \cdots \geq q^{ms}_{n-i_{ms}}$.

Пусть k – такое наименьшее неотрицательное число, что $q^{ms}_k \neq 0$ и $q^{ms}_{k+1} = 0$.

Построим n-мерный вектор $\mathbf{w}_{ms} = (w^{ms}_1, \ldots, w^{ms}_{j_{ms}}, w^{ms}_{j_{ms}+1}, \ldots, w^{ms}_n)$ следующим образом:

$w^{ms}_1 = -1, \quad w^{ms}_2 = w^{ms}_1 - 1, \ldots, \quad w^{ms}_{j_{ms}} = \sum\limits_{i=1}^{j_{ms}-1} w^{ms}_i - 1, \quad w^{ms}_{j_{ms}+1} = w^{ms}_{j_{ms}} + (q^{ms}_{j_{ms}+1} - q^{ms}_{j_{ms}})$, $w^{ms}_{j_{ms}+2} = w^{ms}_{j_{ms}+1} + (q^{ms}_{j_{ms}+2} - q^{ms}_{j_{ms}+1}), \ldots, \quad w^{ms}_{j_{ms}+k} = w^{ms}_{j_{ms}+k-1} + (q^{ms}_k - q^{ms}_{k-1}), w^{ms}_{j_{ms}+k+1} = w^{ms}_{j_{ms}+k+2} = \ldots = w^{ms}_n = (\mathbf{g}^{ms}_k, \mathbf{v}^{ms}_k) - 1$, где $\mathbf{g}^{ms}_k$ - последняя строка матрицы $(L^*_{j_{ms}+k}(q^{ms}_k)\ 0\ldots0)$, $\mathbf{v}^{ms}_k = (w^{ms}_1, \ldots, w^{ms}_{j_{ms}+k})$ и $(\mathbf{g}^{ms}_k, \mathbf{v}^{ms}_k)$ – скалярное произведение векторов. Легко проверить, что построенный вектор $\mathbf{w}_{ms} = (w^{ms}_1, \ldots, w^{ms}_{j_{ms}}, w^{ms}_{j_{ms}+1}, \ldots, w^{ms}_n)$ удолетворяет условие $\forall \mathbf{x} \in p(\mathbf{a}^s_k A_s)$, $\forall \mathbf{y} \in Z^n_2 \setminus p(\mathbf{a}^s_k A_s)$ $(\mathbf{x}, \mathbf{w}_{ks}) > (\mathbf{y}, \mathbf{w}_{ks})$.

Обозначим через $\mathbf{g} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ последнюю строку матрицы

$$p(\mathbf{a}^s_m A_s)^{\sigma_{ms}}_{\xi_{ms}} = (L_{j_{ms}} 0_{j_{ms}} \ldots 0_{j_{ms}}) \,\square \left(\mathop{\square}_{i=0}^{n-j_{ms}} \left(L^*_{j_{ms}+i}(q^{ms}_i) \underbrace{0\ldots0}_{n-(j_{ms}+i)} \right) \right),$$

определим вектор $\mathbf{w}'_{ms} = \mathbf{a}^s_m \left(\mathbf{w}^{\sigma^{-1}_m}_{ms}\right)$ и число $\tau^s_m = \left((\mathbf{a}^s_m \oplus \mathbf{g}^{\sigma^{-1}_m}), \mathbf{w}^{\sigma^{-1}_m}_{ms}\right)$, где операция $\oplus$ задаёт покоординатное сложение векторов по mod 2.

Если за весовой вектор НЭ выбрать $\mathbf{w}'_{ms}$, а за порог число τ^s_m, то значение сигнала НЭ равно 1 только в том случае, если на вход подаём элементы из

$\mathbf{a}_m^s p(\mathbf{a}_m^s A_s)$. Если через $f_m^{(s)}$ обозначить характеристическую функцию множества $\mathbf{a}_m^s p(\mathbf{a}_m^s A_s)$, т. е. функцию, которая принимает значение 1 только на булевых наборах, которые принадлежат множеству $\mathbf{a}_m^s p(\mathbf{a}_m^s A_s)$, то НЭ с вектором структуры $[\mathbf{w}'_{ms}; \tau_m^s]$ реализует функцию $f_m^{(s)}$.

Алгоритм синтеза распознающей схемы

Шаг 1. Пусть $\{K_1, K_2, \ldots, K_t\}$ обучающая выборка, $s = 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Построим множество

$$A_s = K_s \cup \left(Z_2^n \backslash \bigcup_{i \neq s} K_i \right)$$

и находим p-покрытие подмножества K_s в множестве A_s, т. е.

$$P_{A_s}(K_s; \mathbf{b}_1^s, \ldots, \mathbf{b}_{r_s}^s) = \mathbf{b}_1^s p(\mathbf{b}_1^s A_s) \cup \mathbf{b}_2^s p(\mathbf{b}_2^s A_s) \cup \ldots \cup \mathbf{b}_{r_s}^s p(\mathbf{b}_{r_s}^s A_s).$$

Каждому p-множеству $\mathbf{b}_i^s p(\mathbf{b}_i^s A_s)$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, r_s)$ по вышесказанному методу сопоставим вектор структуры $[\mathbf{w}'_{is}; \tau_i^s]$ НЭ, что реализует характеристическую функцию $f_i^{(s)}$ множества $\mathbf{b}_i{}^s p(\mathbf{b}_i^s A_s)$. Система векторов $\{[\mathbf{w}'_{1s}; \tau_1^s], \ldots, [\mathbf{w}'_{r_s}; \tau_{r_s}^s]\}$ задаёт векторы структур нейронных элементов 1-го слоя блока s.

Шаг 3. Если $s < t$, то $s = s + 1$ и переходим к шагу 2, а в противном случае синтез сети завершён.

1. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. – М.: Мир, 1992. – 415 с.
2. *Горбань А. Н., Россиев Д. А.* Нейронные сети на персональном компьютере. – Новосибирск: Наука, 1996. – 255 с.
3. *Айзенберг Н. Н., Бовди А. А., Герго Э. Й., Гече Ф. Э.* Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики // Кибернетика. – Киев, 1980. – № 2. – С. 26–30.
4. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
5. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 285 с.
6. *Яджима С, Ибараки Т.* Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969. Вып. 6. – С. 72–81.
7. *Дертоузос М.* Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. – 345 с.
8. Параллельная обработка информации // Синтез высокопроизводительных специализированных структур для анализа и обработки изображений в пороговом базисе / Под ред. Б.Н. Малиновского, В.В. Грицыка. – Киев: Наук. думка. 1990. – Т. 5.

Получено 10.10.2008