УДК 518.12

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)
Г. Г. Цегелик (Львівський нац. ун-т імені Івана Франка)

НОВИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ І РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

A new numerical method of finding of the extremum nondifferential function is regarded. The method is based on projection of the surface being explored on co-ordinate planes.

Розглядається новий чисельний метод оптимізації негладких функцій, в основі якого лежить проектування поверхні, яка досліджується, на координатні площини.

Вступ. При розв'язуванні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких і розривних функцій [1,2]. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій. В [3] побудовано чисельний метод типу покоординатного підйому відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично [4]. В роботі [5] запропоновано чисельний метод відшукання екстремуму негладких і розривних функцій від двох дійсних змінних, який базується на використанні апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично [6].

В роботі запропоновано новий підхід до оптимізації негладких функцій, в основі якого лежить проектування поверхні, яка досліджується, на координатні площини і використання методу відшукання екстремуму функції однієї змінної, запропонованого в [7] або [8].

Постановка задачі. Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, визначену в деякій області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$. При цьому вважаємо, що функція $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in D$ (виконання такої умови завжди можемо забезпечити).

Потрібно знайти максимальне значення функції $z = f(x, y)$ яка, взагалі кажучи, може бути довільною негладкою чи розривною функцією в D.

Метод розв'язування задачі. Позначимо через S_1 і S_2 множину точок, які є проекцією поверхні $z = f(x, y)$ відповідно на площини xOz і yOz, а через $C(S_1)$ і $C(S_2)$ їх опуклі оболонки. Нехай $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$ - частини границь відповідно опуклих оболонок $C(S_1)$ і $C(S_2)$, які їх обмежують зверху. Очевидно, якщо $\max\limits_{x\in[a,b]} \varphi(x)$ досягається в точці $x = \bar{x}$, а $\max\limits_{x\in[a,b]} \psi(y)$ досягається в точці $y = \bar{y}$, то точка $(\bar{x}, \bar{y})$ є точкою абсолютного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Для наближеного відшукання точки $(\bar{x}, \bar{y})$ поступаємо так.

В площині xOz і yOz побудуємо апроксимуючі функції для $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$. Для цього в області D побудуємо прямокутну сітку:

$$x = x_i = a + ih;\ i = 0, 1, \ldots, n;\ h = (b - a)/n;$$

$$y = y_j = c + jk;\ j = 0, 1, \ldots, m;\ k = (d - c)/m,$$

і розглянемо множину точок $(x_i, y_j) \in D$. Тоді для кожного фіксованого $x = x_i$ знайдемо $\bar{z}_i = \max\limits_{0 \le j \le m} f(x_i, y_j)$ і для кожного фіксованого $y = y_j$ знайдемо $\tilde{z}_j = \max\limits_{0 \le i \le n} f(x_i, y_j)$. В площині xOz і yOz побудуємо опуклі оболонки відповідно множин точок $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ і $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_m$. Частини границь цих опуклих оболонок, які обмежують їх зверху, позначимо відповідно через $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$. Тоді функції $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$ будуть апроксимуючими функціями відповідно для $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$. Тому, якщо $\bar{x}_0 = \max\limits_{x \in [a,b]} \bar{\varphi}(x)$, $\bar{y}_0 = \max\limits_{y \in [c,d]} \tilde{\psi}(y)$, то точка $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ буде наближеною точкою до екстремальної точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Для знаходження точок максимуму функцій $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$, які задані відповідно таблицями своїх значень $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$ і $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_m$ можна використати алгоритм відшукання максимального значення довільної функції однієї дійсної змінної, розроблений в [8].

Приклад 1. *Розглянемо задачу мінімізації функції Розенброка при* $n = 2$.

$$f(x, y) = 100\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2.$$

Графік цієї функції зображений на рис. 1.

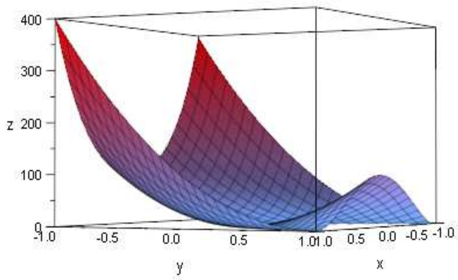

Рис. 1

Для відшукання мінімуму даної функції будемо шукати максимум функції

$$-f(x, y) + 1000 = -100\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2 + 1000,$$

оскільки $-f(x, y) + 1000 > 0$ в області $D = \{-1 \le x \le 1,1; -1 \le y \le 1,1\}$.

Покладемо $h = 0,1$ і для кожного $x_i = -1 + 0,1 \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, 21$, знайдемо значення $\bar{z}_i$. У результаті одержимо таблицю значень функції $z = \bar{\varphi}(x)$ (табл. 1).

Тоді за алгоритмом [8] шукаємо максимум функції $z = \bar{\varphi}(x)$, яка представлена таблицею своїх значень. В результаті одержуємо точку $x_{20} = 1$, в якій ця функція досягає максимального значення.

Таблиця 1

i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$
0	-1	996	11	0,1	999,18
1	-0,9	996,38	12	0,2	999,2
2	-0,8	996,6	13	0,3	999,5
3	-0,7	997,1	14	0,4	999,48
4	-0,6	997,28	15	0,5	999,5
5	-0,5	997,5	16	0,6	999,68
6	-0,4	997,88	17	0,7	999,9
7	-0,3	998,3	18	0,8	999,8
8	-0,2	998,4	19	0,9	999,98
9	-0,1	998,78	20	1	1000
10	0	999	21	1,1	999,98

Аналогічно, покладемо $k = 0,1$ і для кожного $y_j = -1 + 0,1 \cdot j$, $j = 0, 1, \ldots, 21$, знайдемо значення $\tilde{z}_j$. У результаті одержимо таблицю значень функції $z = \tilde{\psi}(y)$ (табл. 2).

Таблиця 2

j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$
0	-1	899	11	0,1	999,5
1	-0,9	918	12	0,2	999,5
2	-0,8	935	13	0,3	999,5
3	-0,7	950	14	0,4	999,68
4	-0,6	963	15	0,5	999,9
5	-0,5	974	16	0,6	999,8
6	-0,4	983	17	0,7	999,6
7	-0,3	990	18	0,8	999,98
8	-0,2	995	19	0,9	999,18
9	-0,1	998	20	1	1000
10	0	999,2	21	1,1	999

За алгоритмом [8] одержимо точку $y_{20} = 1$, в якій досягається максимум функції $z = \tilde{\psi}(y)$, заданої таблицею своїх значень.

Отже, максимальне значення функції $-f(x, y)$ в області D дорівнює $-f(x, y) - 1000 = 0$. Тому мінімальне значення функції $f(x, y)$ також дорівнює 0.

Приклад 2. *Розглянемо задачу максимізації функції*

$$f(x, y) = -\sqrt{|x \cdot y| - x} + 100.$$

Графік цієї функції зображений на рис. 2.

Розглянемо область $D = \{-2 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 2\}$.

Покладемо $h = 0,1$ і для кожного $x_i = -2 + 0,1 \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, 40$, знайдемо значення $\bar{z}_i$. У результаті одержимо таблицю значень функції $z = \bar{\varphi}(x)$ (табл. 3).

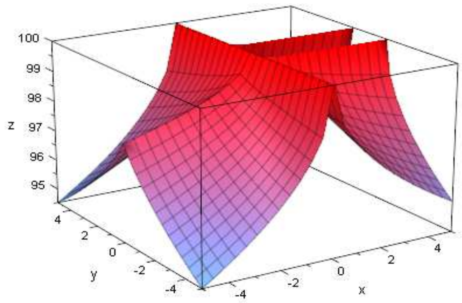

Рис. 2

Таблиця 3

i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$
0	-2	98,585	10	-1	99	20	0	100	30	1	100
1	-1,9	98,6216	11	-0,9	99,05132	21	0,1	100	31	1,1	100
2	-1,8	98,65836	12	-0,8	99,10557	22	0,2	100	32	1,2	100
3	-1,7	98,69616	13	-0,7	99,16334	23	0,3	100	34	1,4	100
4	-1,6	98,73509	14	-0,6	99,2254	24	0,4	100	35	1,5	100
5	-1,5	98,77526	15	-0,5	99,2928	25	0,5	100	36	1,6	100
6	-1,4	98,81678	16	-0,4	99,36754	26	0,6	100	37	1,7	100
7	-1,3	98,85982	17	-0,3	99,45228	27	0,7	100	38	1,8	100
8	-1,2	98,90455	18	-0,2	99,55279	28	0,8	100	39	1,9	100
9	-1,1	98,95119	19	-0,1	99,68377	29	0,9	100	40	2	100

Тоді за алгоритмом [8] шукаємо максимум функції $z = \bar{\varphi}(x)$, яка представлена таблицею своїх значень. В результаті одержуємо точку $x_{20} = 0$, в якій ця функція досягає максимального значення.

Апроксимуючою функцією $z = \tilde{\psi}(y)$ є пряма $z = 100$, тобто максимум функції $z = \tilde{\psi}(y)$ досягається в будь-якій точці $y \in [-2, 2]$.

Отже, максимум функції $f(x, y) = 100$.

Приклад 3. *Знайти максимум функції [1]*

$$f(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{|x \cdot y|} + 1, & x \in \{x : x < 0, y < 0\}, \\ -\sqrt{|x \cdot y|}, & x \notin \{x : x < 0, y < 0\}. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рис. 3.

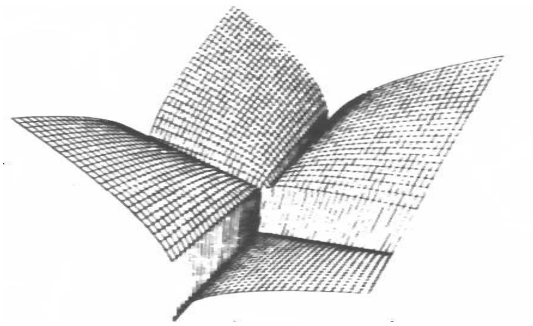

Рис. 3

Для того, щоб виконувалась умова невід'ємності значень функції, розглянемо функцію $f(x,y)+50$ в прямокутній області $D = \{-2 \le x \le 3; -3 \le y \le 3\}$.

Покладемо $h = 0,1$ і для кожного $x_i = -2 + 0,1 \cdot i$, $i = 0, 1, \ldots, 50$, знайдемо значення $\bar{z}_i$. У результаті одержимо таблицю значень функції $z = \bar{\varphi}(x)$ (табл. 4).

Тоді за алгоритмом [8] шукаємо максимум функції $z = \bar{\varphi}(x)$, яка представлена таблицею своїх значень. В результаті одержуємо точку $x_{19} = -0,1$, в якій ця функція досягає максимального значення.

Аналогічно, покладемо $k = 0,1$ і для кожного $y_j = -3 + 0,1 \cdot j$, $j = 0, 1, \ldots, 60$, знайдемо значення $\tilde{z}_j$. У результаті одержимо таблицю значень функції $z = \tilde{\psi}(y)$ (табл. 5).

Таблиця 4

i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$	i	x_i	$\bar{z}_i$
0	-2	50,5528	13	-0,7	50,7354	26	0,6	50	39	1,9	50
1	-1,9	50,5641	14	-0,6	50,755	27	0,7	50	40	2	50
2	-1,8	50,5757	15	-0,5	50,7764	28	0,8	50	41	2,1	50
3	-1,7	50,5877	16	-0,4	50,8	29	0,9	50	42	2,2	50
4	-1,6	50,6	17	-0,3	50,8267	30	1	50	43	2,3	50
5	-1,5	50,6127	18	-0,2	50,8585	31	1,1	50	44	2,4	50
6	-1,4	50,6258	19	-0,1	50,9	32	1,2	50	45	2,5	50
7	-1,3	50,6394	20	0	50	33	1,3	50	46	2,6	50
8	-1,2	50,6535	21	0,1	50	34	1,4	50	47	2,7	50
9	-1,1	50,6683	22	0,2	50	35	1,5	50	48	2,8	50
10	-1	50,6837	23	0,3	50	36	1,6	50	49	2,9	50
11	-0,9	50,7	24	0,4	50	37	1,7	50	50	3	50
12	-0,8	50,7171	25	0,5	50	38	1,8	50			

Застосувавши алгоритм [8] одержимо точку $y_{29} = -0,1$, в якій функція $z = \tilde{\psi}(y)$, задана таблицею своїх значень, досягає максимального значення.

Для уточнення точки $(-0,1; -0,1)$ застосуємо даний метод звужуючи область D на кожному етапі відшукання екстримальної точки. Розглянемо $D = \{-0,0001 \le x \le 0,0002, -0,0001 \le y \le 0,0002\}$ з кроком $0,00001$, в результаті одержимо точку $(-0,00001; -0,00001)$. Тоді максимум функції $f(x,y) = 0,99999$.

Таблиця 5

j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$
0	-3	50,4522	13	-1,7	50,5876	26	-0,4	50,8	39	0,9	50	52	2,2	50
1	-2,9	50,4614	14	-1,6	50,6	27	-0,3	50,8267	40	1	50	53	2,3	50
2	-2,8	50,4708	15	-1,5	50,6127	28	-0,2	50,8585	41	1,1	50	54	2,4	50
3	-2,7	50,4804	16	-1,4	50,6258	29	-0,1	50,9	42	1,2	50	55	2,5	50
4	-2,6	50,49	17	-1,3	50,6394	30	0	50	43	1,3	50	56	2,6	50
5	-2,5	50,5	18	-1,2	50,6535	31	0,1	50	44	1,4	50	57	2,7	50
6	-2,4	50,5101	19	-1,1	50,6683	32	0,2	50	45	1,5	50	58	2,8	50
7	-2,3	50,5204	20	-1	50,6837	33	0,3	50	46	1,6	50	59	2,9	50
8	-2,2	50,5309	21	-0,9	50,7	34	0,4	50	47	1,7	50	60	3	50
9	-2,1	50,5417	22	-0,8	50,7171	35	0,5	50	48	1,8	50			
10	-2	50,5527	23	-0,7	50,7354	36	0,6	50	49	1,9	50			
11	-1,9	50,5641	24	-0,6	50,755	37	0,7	50	50	2	50			
12	-1,8	50,5757	25	-0,5	50,7763	38	0,8	50	51	2,1	50			

У випадку розривних функцій вимагається, щоб точки розриву не потрапляли до точок по яких будуються апроксимуючі функції.

Висновок. Побудовано новий чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких і розривних функцій, в основі якого лежить проектування поверхні, яка досліджується, на координатні площини і використання методу відшукання екстремуму функції однієї змінної, запропонованого в [8]. Приведені приклади підтверджують високу ефективність методу. Метод може бути узагальнений на випадок функцій багатьох змінних.

1. *Батухтин В. Д, Майборода Л. А.* Оптимизация разрывных функций. – М.: Наука, 1984.
2. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. –К.: Наук. думка, 1979.
3. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2007. - Вип.14-15. – С. 18-21.
4. *Цегелик Г. Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – С. 1273–1276.
5. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних //Прикладні проблеми механіки і матем. – 2007. - Вип.5 – С. 17-21.
6. *Цегелик Г. Г., Федчишин Н. В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип 50. – С. 209-211.
7. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2006. - Вип.12-13. – С. 55-58.
8. *Глебена М. І., Цегелик Г. Г.* Модифікований чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій //Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.матем. і інформ. – 2008. - Вип.16. – С. 57-61.

Одержано 15.10.2008