УДК 517.927

В. В. Маринець, А. В. Добридень (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ДЕЯКІ НЕКЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

The problem of Gursa–Darbu and Darbu–Gursa for quazilinear differential equation have been researched and one two-sided method's modification of the approximate integration of that problems has been constructed.

За допомогою монотонного двостороннього методу досліджено задачі Гурса–Дарбу та Дарбу–Гурса для квазілінійного диференціального рівняння, доведено теореми існування та єдиності розв'язку, про диференціальну нерівність, отримано умову належності розв'язку поставленої задачі простору $C^{(1.1)}(D) \cap C^{(0.1)}(\overline{D})$.

Вступ. Одне з важливих питань теорії наближених методів є проблема оцінки похибки отриманого наближеного розв'язку. Тому розробка та дослідження конструктивних методів наближеного інтегрування задач теорії диференціальних рівнянь, які б давали порівняно простий алгоритм обчислення похибки наближених розв'язків, є проблемою актуальною.

До таких методів відносяться і так звані двосторонні методи, які дають можливість на кожному кроці ітераційного процесу шуканий розв'язок охоплювати в „вилку" і таким чином отримувати зручну апостеріорну оцінку похибки послідовних наближень.

Вперше ідея двостороннього методу була висловлена академіком С.О. Чаплигіним близько 100 років тому. Після того, як Н.Н. Лузіним в 1932 році було показано надзвичайну швидкість збіжності двостороннього методу, він отримав широке застосування в різних областях математики, про що свідчить велика кількість наукових публікацій, присвячених цій проблематиці (роботи Н.В. Азбелєва та його учнів, Н.Б. Бабкіна, Е.А. Волкова, К.В. Задираки, И.Т. Кігурадзе, Ю.І. Ковача, Н.С. Курпеля, В. Лакшмікантам, Р.Рабчука, А.Л. Тептіна та багатьох інших).

Дана стаття присвячена побудові модифікацій двостороннього методу для дослідження деяких некласичних задач теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.

1. Задача Гурса–Дарбу.

1.1. Постановка задачі та її дослідження. Нехай $y = g(x)$ — „вільна" крива $(y_1 = g(x_0),\ y_2 = g(x_1))$, $g'(x) > 0$ при $x \in [x_0, x_1]$, а $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x, y)|x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}$, $D_2 = \{(x, y)|x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g(x))\}$ (див. рис. 1).

Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(M) = C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_{xy}(x, y) + a_1(x, y)U_x(x, y) + a_2(x, y)U_y(x, y) = f(x, y, U(x, y)) \equiv f[U(x, y)], \quad (1)$$

який на характеристиках $x = x_0$, $y = y_0$ та на „вільній" кривій $y = g(x)$ $(x = k(y))$ задовольняє умови

$$\begin{aligned} &U(x_0, y) = \varphi(y), y = [y_0, y_1], \\ &U(x, y_1) = \psi(x), x \in [x_0, x_1], \end{aligned} \quad (2)$$

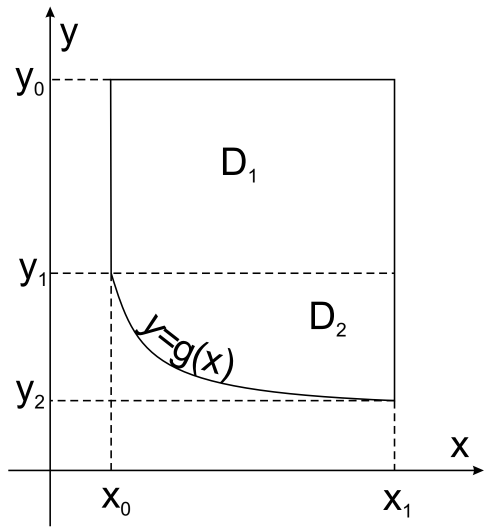

Рис. 1

$$U(x,g(x))=\omega(x), x\in[x_0,x_1], \tag{3}$$

де $\phi(x),\omega(x)\in C^1[x_0,x_1]$, $\varphi(y)\in C^1[y_0,y_1]$, крім того виконуються умови узгодженості

$$\omega(x_0)=\varphi(y_1), \varphi(y_0)=\psi(x_0). \tag{4}$$

Будемо вважати, що $f[U(x,y)]\in C(\overline{B})$, $f:\overline{B}\to R$, $\overline{B}\subset R^3$, $a_1(x,y)\in C(D)$, $a_2(x,y)\in C^{(0.1)}(D)$ при $(x,y)\in D$.

Позначимо через $Z_1(x,y)$ розв'язок задачі Гурса: в просторі функцій $C^{(1.1)}(D_1)\cap C(\overline{D}_1)$ знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову (2) і другу з умов (4), а через $Z_2(x,y)$ - розв'язок задачі Дарбу: в просторі $C^{(1.1)}(D_2)\cap C(\overline{D}_2)$ знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову (3), першу з умов (4) і

$$Z_2(x,y_1)=Z_1(x,y_1). \tag{5}$$

Очевидно, що розв'язок задачі (1)-(4)

$$U(x,y)=\begin{cases} Z_1(x,y),(x,y)\in\overline{D}_1,\\ Z_2(x,y),(x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases}$$

причому $U(x,y)\in C^*(M)$, якщо $Z_{1,x}(x,y_1)=Z_{2,x}(x,y_1)$ і $Z_{1,y}(x,y_1)=Z_{2,y}(x,y_1)$. Легко показати, що сформульовані задачі Гурса та Дарбу еквівалентні інтегральним рівнянням відповідно

$$Z_1(x,y)=\Phi_1(x,y)+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}K(x,y;\xi,\eta)F[Z_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi, (x,y)\in\overline{D}_1, \tag{6}$$

$$Z_2(x,y)=\Phi_2(x,y)+\int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_1}^{y}K(x,y;\xi,\eta)F[Z_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi, (x,y)\in\overline{D}_2, \tag{7}$$

де

$$\Phi_1(x,y) = \left[\varphi(y) + \int\limits_{x_0}^{x} (\psi'(\xi) + a_2(\xi, y_0)\psi(\xi)) exp\left(\int\limits_{x_0}^{\xi} a_2(\tau,t)d\tau + \int\limits_{y}^{y_0} a_1(\xi,\eta)d\eta\right) d\xi\right] \times$$
$$\times \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,y)d\xi\right),$$
$$\Phi_2(x,y) = \omega_{1,2}(x,y) + \int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta)F[Z_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi \equiv$$
$$\equiv \omega(k(y)) \exp\left(\int\limits_{x}^{k(y)} a_2(\xi,y)d\xi\right) + \int\limits_{k(y)}^{x} K(x,y;\xi,y_0)[\psi'(\xi) + a_2(\xi,y_0)\psi(\xi)]d\xi +$$
$$+ \int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta)F[Z_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$
$$K(x,y;\xi,\eta) = \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi} a_2(\tau,y)d\tau + \int\limits_{y}^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau\right),$$
$$F[U(x,y)] \equiv f[U(x,y)] + [a_{2,y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]U(x,y).$$

Очевидно, що $Z_{1,x}(x,y) = Z_{2,x}(x,y)$ і

$$Z_{2,y}(x,y_1) - Z_{1,y}(x,y_1) = \rho(x_0,y_0,y_1)\exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,y_1)d\xi\right), \tag{8}$$

де

$$\rho(x_0,y_0,y_1) = k'(y)\omega'(x_0) - k'(y)(\psi'(x_0) + a_2(x_0,y_0)\psi(x_0)) \times \exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_1(x_0,\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + a_2(x_0,y_1)\varphi(y_1) - \int\limits_{y_0}^{y_1} F(x_0,\eta,\varphi(\eta)) \exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x_0,\tau)d\tau\right) d\eta\right) - \varphi'(y_1).$$

Таким чином справедлива наступна теорема

Теорема 1. *Якщо інтегральні рівняння* (6), (7) *мають розв'язки, то для того, щоб розв'язок задачі* (1)–(4) *належав простору функцій* $C^*(M)$, *необхідно і достатньо виконання умови*

$$\rho(x_0,y_0,y_1) = 0. \tag{9}$$

В супротивному випадку розв'язок задачі (1)–(4) $U(x,y) \in C^{(1.1)}(D \setminus I) \cap C^{(1.0)}(D)$,
$I = \{(x,y)\,|y = y_1, x \in [x_0,x_1]\}$, *і справедлива рівність* (8).

З теореми 1 випливає, що якщо „вільна“ крива $x = k(y)$ є такою, що $k'(y) = 0$, то умова (9) виконується, якщо $\varphi'(y_1) = 0$.

Наслідок 1. *Нехай рівняння* (1) *— лінійне, тобто* $f[U(x,y)] = \Omega(x,y) - a_3(x,y)U(x,y)$, *де* $\Omega(x,y)$, $a_3(x,y) \in C(D)$ *і при* $(x,y) \in D$ *виконується умова*

$$a_3(x,y) - a_1(x,y)a_2(x,y) = a_{2,y}(x,y). \tag{10}$$

Тоді задача (1)–(4) *в області* $\overline{D}$ *має единий розв'язок*

$$Z_1(x,y) = \Phi_1(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta)\Omega(\xi,\eta)d\eta d\xi, (x,y) \in \overline{D}_1, \tag{11}$$

$$Z_2(x,y) = \Phi_2(x,y) + \int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_1}^{y} K(x,y;\xi,\eta)\Omega(\xi,\eta)d\eta d\xi, (x,y) \in \overline{D}_2, \tag{12}$$

причому якщо виконується умова (9), *то* $U(x,y) \in C^*(M)$.

Якщо ж умови (2), (3) *однорідні і для всіх* $(x,y) \in \overline{D}$ $\Omega(x,y) \geq 0 (\leq 0)$, *то розв'язок задачі* (1)-(3) $U(x,y) \geq 0 (\leq 0)$ *при* $(x,y) \in \overline{D}$.

Очевидно, що в цьому випадку $F[U(x,y)] \equiv \Omega(x,y)$ і з (6) і (7) отримуємо (11), (12), звідки випливає твердження наслідку 1.

Наслідок 2. *Нехай рівняння* (1) — *лінійне і його коефіцієнти в області* D *задовольняють умови*

$$a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(\overline{D}), a_3(x,y) - a_1(x,y)a_2(x,y) = a_{1,x}(x,y). \tag{13}$$

Тоді единий в області $\overline{D}$ *розв'язок задачі* (1)–(4) *задається формулами*

$$Z_1(x,y) = \tilde{\Phi}_1(x,y) + \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} K(x,y;\xi,\eta)\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_1, \tag{14}$$

$$Z_2(x,y) = \tilde{\Phi}_2(x,y) + \int\limits_{y_1}^{y}\int\limits_{k(\eta)}^{x} K(x,y;\xi,\eta)\Omega(\xi,\eta)d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_2, \tag{15}$$

де

$$\tilde{\Phi}_1(x,y) = \Bigg[\psi(x) + \int\limits_{y_0}^{y}(\varphi'(\eta) + a_1(x_0,\eta)\varphi(\eta)) \times$$
$$\times \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_2(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_{y_0}^{\eta} a_1(x,\tau)d\tau\right) d\eta\Bigg] \exp\left(\int\limits_{y}^{y_0} a_1(x,\eta)d\eta\right),$$
$$\tilde{\Phi}_2(x,y) = \Bigg[Z(x,y_1) + \int\limits_{y_1}^{y}(f(\eta) + a_1(K(\eta),\eta)\omega(K(\eta)))\times$$
$$\times \exp\left(\int\limits_{x}^{k(\eta)} a_2(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x,\tau)d\tau\right) d\eta\Bigg] \exp\left(\int\limits_{y}^{y_1} a_1(x,\eta)d\eta\right),$$

а $f_1(y)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\int\limits_{y_1}^{y} K(y,\eta)f_1(\eta)d\eta = \rho(y),$$

$$K(y,\eta) = \exp\left(\int\limits_{k(y)}^{k(\eta)} a_2(\xi,\eta)d\xi + \int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(K(y),\tau)d\tau\right),$$

$$\rho(y) = \omega(k(y))\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y} a_1(k(\eta),\eta)d\eta\right) - Z_1(k(y),y_1) -$$

$$-\int\limits_{y_1}^{y} K(y,\eta)a_1(k(\eta),\eta)\omega(k(\eta))d\eta - \int\limits_{y_1}^{y}\int\limits_{k(\eta)}^{k(y)} K(y,\eta)\Omega(\xi,\eta)\exp\left(\int\limits_{k(\eta)}^{\xi} a_2(\tau,\eta)d\tau\right)d\xi d\eta,$$

причому, якщо виконується умова

$$\varphi'(y_1) - k'(y)\left[\omega'(x_0) - \psi'(x_0)\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_1(x_0,\eta)d\eta\right) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{y_0}^{y_1} (a_2(x_0,\eta)\varphi'(\eta) + a_3(x_0,\eta)\varphi(\eta) - \Omega(x_0,\eta))\exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_1(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta\right] = 0,$$

то розв'язок задачі (1)–(4) $U(x,y) \in C^*(M)$.

Нехай права частина рівняння (1) має вигляд

$$f[U(x,y)] = \begin{cases} \Omega(x,y) - a_3(x,y)U(x,y), (x,y) \in D_1, \\ f_1(x,y,U(x,y)), (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

$\Omega(x,y_1) - a_3(x,y_1)U(x,y_1) \equiv f_1(x,y_1,U(x,y_1))$, причому виконується умова (10) при $(x,y) \in \overline{D}_1$.

Тоді розв'язок задачі Гурса при $(x,y) \in \overline{D}_1$ задається формулою (11), а розв'язок задачі Дарбу при $(x,y) \in \overline{D}_2$ — формулою (7).

В цьому випадку має місце рівність (8), де $F(x_0,\eta,\varphi(\eta)) \equiv \Omega(x_0,\eta)$.

1.2. Двосторонній метод наближеного інтегрування задачі (1)-(4). Нехай функція $F[U(x,y)] \in C_4(\overline{B})$, де $C_4(\overline{B})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$;

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset R^4$, $\Pi p_{x0y}\overline{B}_1 = \overline{D}$, $\exists$ така функція

$$H(x,y,U(x,y),V(x,y)) \equiv H(U(x,y);V(x,y)),$$

що $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$ і для довільних з простору $C(\overline{D})$ двох пар функцій $U_i(x,y)$, $V_i(x,y) \in \overline{B}_1$, $i = 1,2$, які задовольняють умови

$$U_i(x,y) \geq V_i(x,y), (x,y) \in \overline{D},$$

в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U_1(x,y);V_2(x,y)] \geq H[V_1(x,y);U_2(x,y)]; \tag{16}$$

3) функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області її визначення $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшица

$$\begin{gathered}|H[U_1(x,y);V_1(x,y)]-H[U_2(x,y);V_2(x,y)]|\leq\\ \leq L\left(|U_1(x,y)-U_2(x,y)|+|V_1(x,y)-V_2(x,y)|\right),\end{gathered}\tag{17}$$

$\forall U_i(x,y),V_i(x,y)\in\overline{B}_1$, $i=1,2$, L - стала Ліпшіца.

Легко переконатися, що якщо $F[U(x,y)]$ в області її визначення неперервна і має обмежену частинну похідну по $U(x,y)$, то вона завжди належить простору $C_4(\overline{B})$.

Введемо позначення

$$\begin{gathered}F_i^p(x,y)\equiv H[Z_{i,p}(x,y);V_{i,p}(x,y)],i=1,2,\\ F_{i,p}(x,y)\equiv H[V_{i,p}(x,y);Z_{i,p}(x,y)],p=0,1,2,...,(x,y)\in\overline{D}_i,\end{gathered}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}T_1f(\xi,\eta)\equiv\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta d\xi,(x,y)\in\overline{D}_1,\\ T_2f(\xi,\eta)\equiv\int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_1}^{y}K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta d\xi,(x,y)\in\overline{D}_2,\\ T_3f(\xi,\eta)\equiv\int\limits_{k(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1}K(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta d\xi,(x,y)\in\overline{D}_2,\\ \alpha_{i,p}(x,y)=Z_{i,p}(x,y)-\omega_{i,i}^p(x,y)-T_iF_i^p(\xi,\eta),\\ \beta_{i,p}(x,y)=V_{i,p}(x,y)-\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)-T_iF_{i,p}(\xi,\eta),(x,y)\in\overline{D}_i,\end{gathered}\tag{19}$$

$$\begin{gathered}\omega_{1,1}^p(x,y)=\overline{\omega}_{1,1}^p=\Phi_1(x,y)\forall p\in N,(x,y)\in\overline{D}_1,\\ \omega_{2,2}^p=\omega_{1,2}(x,y)+T_3F_1^p(\xi,\eta),\\ \overline{\omega}_{2,2}^p=\omega_{1,2}(x,y)+T_3F_{1,p}(\xi,\eta),(x,y)\in\overline{D}_2,\\ W_{i,p}(x,y)=Z_{i,p}(x,y)-V_{i,p}(x,y),(x,y)\in\overline{D}_i.\end{gathered}\tag{20}$$

Послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$ і $\{V_{i,p}(x,y)\}$ побудуємо згідно формул

$$\begin{gathered}Z_{i,p+1}(x,y)=\omega_{i,i}^p(x,y)+T_iF_i^p(\xi,\eta),\\ V_{i,p+1}(x,y)=\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)+T_iF_{i,p}(\xi,\eta),(x,y)\in\overline{D}_i,\end{gathered}\tag{21}$$

$i=1,2$, $p=0,1,2,...$, де за нульове наближення $Z_{i,0}(x,y),V_{i,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, $i=1,2$, вибираємо довільні функції з простору $C(\overline{D}_i)$, які задовольняють умови

$$\alpha_{i,0}(x,y)\geq 0,\beta_{i,0}(x,y)\leq 0,W_{i,0}(x,y)\geq 0,(x,y)\in\overline{D}_i.\tag{22}$$

Приймаючи до уваги умову (4), маємо

$$\begin{gathered}\omega_{2,2}^p(x,y_1)=Z_{1,p+1}(x,y_1)=Z_{2,p+1}(x,y_1),\\ \overline{\omega}_{2,2}^p(x,y_1)=V_{1,p+1}(x,y_1)=V_{2,p+1}(x,y_1),x\in[x_0,x_1].\end{gathered}$$

З (18), (21) отримаємо

$$\alpha_{i,p+1}(x,y)=\begin{cases}\alpha_{1,p+1}(x,y)=T_1\left(F_1^p(\xi,\eta)-F_1^{p+1}(\xi,\eta)\right),(x,y)\in\overline{D}_1,\\ \alpha_{2,p+1}(x,y)=T_2\left(F_2^p(\xi,\eta)-F_2^{p+1}(\xi,\eta)\right)+\\ +T_3\left(F_1^p(\xi,\eta)-F_1^{p+1}(\xi,\eta)\right),(x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases}$$
$$\beta_{i,p+1}(x,y)=\begin{cases}\beta_{1,p+1}(x,y)=T_1\left(F_{1,p}(\xi,\eta)-F_{1,p+1}(\xi,\eta)\right),(x,y)\in\overline{D}_1,\\ \beta_{2,p+1}(x,y)=T_2\left(F_{2,p}(\xi,\eta)-F_{2,p+1}(\xi,\eta)\right)+\\ +T_3\left(F_{1,p}(\xi,\eta)-F_{1,p+1}(\xi,\eta)\right),(x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}Z_{i,p}(x,y)-Z_{i,p+1}(x,y)=\alpha_{i,p}(x,y),\\ V_{i,p}(x,y)-V_{i,p+1}(x,y)=\beta_{i,p}(x,y),\end{aligned}\tag{24}$$

$$W_{i,p+1}(x,y)=\omega_{i,i}^p(x,y)-\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)+T_i[F_i^p(\xi,\eta)-F_{i,p}(\xi,\eta)].\tag{25}$$

В силу умов (16), (22) з (24) і (25) при $p=0$ маємо

$$\begin{gathered}Z_{i,0}(x,y)\geq Z_{i,1}(x,y),V_{i,0}(x,y)\leq V_{i,1}(x,y),\\ W_{i,1}(x,y)\geq 0,(x,y)\in\overline{D}_i,\end{gathered}$$

тобто справедливі при $(x,y)\in\overline{D}$ нерівності

$$V_{i,0}(x,y)\leq V_{i,1}(x,y)\leq Z_{i,1}(x,y)\leq Z_{i,0}(x,y).$$

Таким чином, якщо нульове наближення належить $\overline{B}_1$, то і $Z_{i,1}(x,y)$, $V_{i,1}(x,y)\in\overline{B}_1$, $i=1,2$, $(x,y)\in\overline{D}$. Приймаючи до уваги останні нерівності і умову (16), з (23) при $p=0$ отримаємо

$$\alpha_{i,1}(x,y)\geq 0,\beta_{i,1}\leq 0.\tag{26}$$

Повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості нерівностей

$$V_{i,p}(x,y)\leq V_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p}(x,y)\tag{27}$$

для $\forall p\in N$ і $(x,y)\overline{D}$.

Теорема 2. *Нехай функція $F[U(x,y)]\in C_4(\overline{B})$ і в просторі $C^*(\overline{D})$ існують такі функції нульового наближення $V_{i,0}(x,y)$, $Z_{i,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, що виконуються умови (22).*

Тоді послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$, побудовані згідно формул (21), збігаються в області $\overline{D}_i$ абсолютно і рівномірно до единого розв'язку відповідно рівняння (6) $\left(i=1,(x,y)\in\overline{D}_1\right)$ або рівняння (7) $\left(i=2,(x,y)\in\overline{D}_2\right)$, причому для $\forall p\in N$ і $(x,y)\in\overline{D}_i$ справедливі нерівності

$$V_{i,p}(x,y)\leq V_{i,p+1}(x,y)\leq Z_i(x,y)\leq Z_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p}(x,y)\tag{28}$$

Доведення. Доведемо рівномірну збіжність послідовностей функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$. В силу нерівностей (27) для цього достатньо показати, що $W_{i,p}(x,y) \underset{p\to\infty}{\overset{\overline{D}_i}{\rightrightarrows}} 0$. З (25) легко отримати оцінки

$$W_{i,p}(x,y) \le \frac{[2LKl(x-x_0+y-y_0)]^p}{p!}d, (x,y) \in \overline{D}_i, \tag{29}$$

де $d = \max\limits_i \left\{ \sup\limits_{\overline{D}_i} W_{i,0}(x,y) \right\}, K = \sup\limits_{\overline{D}\times\overline{D}} K(x,y;\xi,\eta), l = \max\{1, x_1 - x_0 + y_2 - y_0\}.$

З оцінок (29) і нерівностей (28) випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} V_{i,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} Z_{i,p}(x,y) = Z_i^*(x,y),$$

таким чином, переходячи в (12) до границі при $p \to \infty$, переконуємося, що $Z_i^*(x,y) = Z_i(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_i$, тобто гранична функція $Z_i^*(x,y)$ є розв'язком відповідно інтегральних рівнянь (6), (7) при $(x,y) \in \overline{D}_i$.

Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) в області $\overline{D}$ доводиться методом від супротивного. Доведемо справедливість нерівностей (28). Для цього припустимо, що в деякому околі точки $(x,y) \in \overline{D}_i$ і для деякого p $Z_{i,p}(x,y) < Z_i(x,y)$. Тоді в силу нерівностей (28) для всякого $n \in N$

$$Z_{i,p+n}(x,y) \le Z_{i,p}(x,y) < Z_i(x,y),$$

а це значить, що в околі розглядуваної точки послідовність функцій $\{Z_{i,p+n}(x,y)\}$ при $n \to \infty$ не збігається до розв'язку $Z_i(x,y)$ відповідно інтегрального рівняння (6) або (7), а це суперечить доведеному.

Наслідок 3. *Нехай функція $F[U(x,y)] \in C_4(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існує така неперервна функція $V_{i,0}(x,y) \le 0$ $(Z_{i,0}(x,y) \ge 0)$, що при $(x,y) \in \overline{D}$ виконуються умови*

$$H[0; V_{i,0}(x,y)] \le 0, V_{i,0}(x,y) - H[0; V_{i,0}(x,y)] \le 0,$$
$$(H[Z_{i,0}(x,y); 0] \ge 0, Z_{i,0}(x,y) - H[Z_{i,0}(x,y); 0] \ge 0)\,.$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(4) *при однорідних умовах* (2), (3) *задовольняє нерівність*

$$U(x,y) \le 0\,(U(x,y) \ge 0) \tag{30}$$

для всіх $(x,y) \in \overline{D}$.

Відмітимо, що якщо $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y); 0]$, то нерівності (30) будуть виконуватися, якщо при $(x,y) \in \overline{D}$ $f(x,y,0) \le 0$ $(f(x,y,0) \ge 0)$.

2. Задача Дарбу-Гурса.

2.1. Основні позначення та означення. Нехай $y = g(x)$ - „вільна“ крива $(y_1 = g(x_0), y_2 = g(x_1),)$, причому $g'(x) > 0$ при $x \in [x_0, x_1]$, а $D = D_1 \cup D_2$, де $D_1 = \{(x,y) | x \in (x_0,x_1), y \in [y_1, g(x))\}$, $D_2 = \{(x,y) | x \in [x_0,x_1), y \in [y_0,y_1)\}$ (див. рис. 2).

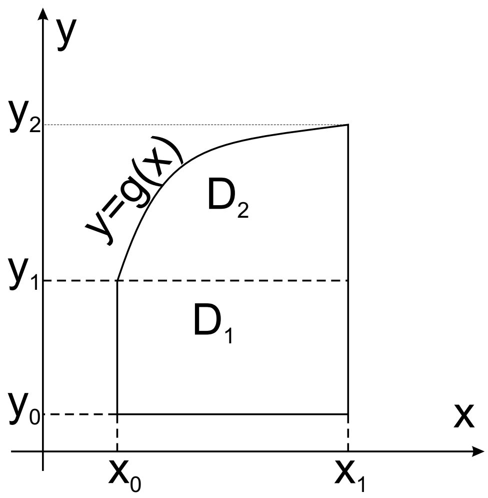

Рис. 2

Постановка задачі: в просторі функцій $C^*(\overline{D}) = C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_{xy}(x,y) = f\left(x, y, U(x,y), U_x(x,y), U_y(x,y)\right) \equiv f[U(x,y)], \tag{31}$$

який на „вільній" кривій $y = g(x)$ $(x = K(y))$ і характеристиці $x = x_1$ задовольняє умови

$$\begin{aligned} U(x, g(x)) &= \varphi(x), x \in [x_0, x_1], \\ U(x_1, y) &= \psi(y), y \in [y_0, y_2], \end{aligned} \tag{32}$$

де $\varphi(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\psi(y) \in C^1[y_0, y_2]$, причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi(x_1) = \psi(y_2). \tag{33}$$

Будемо вважати, що $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to R$, $\overline{B} = \overline{D} \times \overline{B}_0 \times \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \subset R^5$, при $U(x,y) \in \overline{B}$ існує обмежена похідна $\frac{\partial f[U(x,y)]}{\partial U_y(x,y)}$.

Позначимо через $U_1(x,y)$ розв'язок задачі Дарбу: в просторі функцій $C^*(\overline{D}_1)$ знайти розв'язок рівняння (31), який задовольняє умови (32), (33); через $U_2(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса: в просторі функцій $C^*(\overline{D}_2)$ знайти розв'язок рівняння (31), який задовльняє умови

$$\begin{aligned} U_2(x_1, y) &= \psi(y), y \in [y_0, y_1], \\ U_2(x, y_1) &= U_1(x, y_1), x \in [x_0, x_1]. \end{aligned} \tag{34}$$

Очевидно, що розв'язок задачі (31)-(33)

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y), (x,y) \in \overline{D}_1, \\ U_2(x,y), (x,y) \in \overline{D}_2, \end{cases} \tag{35}$$

причому $U(x,y) \in C^*(\overline{D})$, якщо $U_{1,y}(x, y_1) = U_{2,y}(x, y_1)$.

Легко показати, що сформульовані задачі Дарбу та Гурса можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$U_1(x,y) = \Phi_1(x,y) + \int\limits_y^{g(x)} \int\limits_x^{x_1} f[U_1(\xi,\eta)] d\xi d\eta \equiv \Phi_1(x,y) + T_1 f[U_1(\xi,\eta)], \tag{36}$$

$$U_2(x,y) = \Phi_2(x,y) + \int\limits_y^{y_1}\int\limits_x^{x_1} f[U_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta \equiv \Phi_2(x,y) + T_2 f[U_2(\xi,\eta)], \qquad (37)$$

де

$$\Phi_1(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(g(x)), \Phi_2(x,y) = U_1(x,y_1) + \psi(y) - \psi(y_1),$$

Очевидно, що $U_{1,x}(x,y_1) = U_{2,x}(x,y_1)$.

З (36) і (37) маємо

$$U_{2,y}(x,y_1) - U_{1,y}(x,y_1) = \int\limits_x^{x_1}[f(\xi,y_1,U_1(\xi,y_1),U_{1,x}(\xi,y_1),U_{1,y}(\xi,y_1))-$$
$$-f(\xi,y_1,U_1(\xi,y_1),U_{1,x}(\xi,y_1),U_{2,y}(\xi,y_1))]d\xi =$$
$$\int\limits_x^{x_1}\frac{\partial\tilde{f}[U(\xi,y_1)]}{\partial U_y(\xi,y_1)}[U_{1,y}(\xi,y_1) - U_{2,y}(\xi,y_1)]d\xi,$$

де $\frac{\partial\tilde{f}[U(\xi,y_1)]}{\partial U_y(\xi,y_1)}$ — значення частинної похідної в деякій точці області $B\,|_{y=y_1}$.

Позначивши $Z(x) = U_{2,y}(x,y_1) - U_{1,y}(x,y_1)$, попередню рівність запишемо у вигляді

$$Z(x) = \int\limits_x^{x_1}\frac{\partial\tilde{f}[U(\xi,y_1)]}{\partial U_y(\xi,y_1)}Z(\xi)d\xi.$$

Оскільки для $\forall U(x,y)\in\overline{B}$ похідна $\frac{\partial f[U(x,y)]}{\partial U_y(x,y)}$ обмежена, то з останньої рівності випливає, що $Z(x)\equiv 0$.

Таким чином справедлива наступна

Лема 1. *Якщо задача* (31)–(33) *має розв'язок і функція* $f[U(x,y)]$ *задовольняє вище вказаним умовам, то цей розв'язок належить простору* $C^*(\overline{D})$.

2.2. Наближене інтегрування задачі Дарбу-Гурса. Надалі будемо вважати, що $f[U(x,y)] \equiv f\,(x,y,U(x,y),U_y(x,y))$ і $f[U(x,y)]\in C_5(\overline{B})$, де $C_5(\overline{B})$ — простір функцій, які задовольняють наступні умови:

1) функція $f[U(x,y)]\in C(\overline{D})$ і має обмежену частинну похідну $\frac{\partial f[U(x,y)]}{\partial U_y(x,y)}$ в області $\overline{B}$;

2) функцію $f[U(x,y)]$ в області її визначення можна подати у вигляді $f[U(x,y)] = H(x,y,U(x,y),U_x(x,y),U_y(x,y);U(x,y),U_x(x,y),U_y(x,y)) \equiv H[U(x,y);U(x,y)]$ таким чином, щоб для довільних функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)\in C^*(\overline{D})$, які належать області визначення $\overline{B}^*$ функції $H[U(x,y);U(x,y)]$ і задовольняють нерівності

$$W(x,y) = Z(x,y) - V(x,y) \geq 0, W_x(x,y) \leq 0, W_y(x,y) \leq 0 \qquad (38)$$

виконувалася умова

$$H[Z(x,y);V(x,y)] - H[V(x,y);Z(x,y)] \geq 0; \qquad (39)$$

3) функція $H[Z(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}^*$ задовольняє умову Ліпшіца

$$\begin{gathered}|H[Z(x,y);V(x,y)]-H[Z_1(x,y);V_1(x,y)]|\le\\ \le K\left\{|Z(x,y)-Z_1(x,y)|+|Z_x(x,y)-Z_{1,x}(x,y)|+\right.\\ +|Z_y(x,y)-Z_{1,y}(x,y)|+|V(x,y)-V_1(x,y)|+\\ \left.+|V_x(x,y)-V_{1,x}(x,y)|+|V_y(x,y)-V_{1,y}(x,y)|\right\}\end{gathered}\tag{40}$$

для довільних з простору $C^*(\overline{D})$ функцій $Z(x,y)$, $V(x,y)$, $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$, які належать області $\overline{B}^*$.

Введемо позначення

$$F_i^p(x,y)=H[Z_{i,p}(x,y);V_{i,p}(x,y)],F_{i,p}(x,y)=H[V_{i,p}(x,y);Z_{i,p}(x,y)],$$

$$T_1f(\xi,\eta)=\int\limits_y^{g(x)}\int\limits_x^{x_1}f(\xi,\eta)d\xi d\eta,T_2f(\xi,\eta)=\int\limits_y^{y_1}\int\limits_x^{x_1}f(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$T_3f(\xi,\eta)=\int\limits_{y_1}^{g(x)}\int\limits_x^{x_1}f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$ за формулами

$$\begin{gathered}Z_{i,p+1}(x,y)=\omega_{i,i}^p(x,y)+T_iF_i^p(\xi,\eta),(x,y)\in D_i,\\ V_{i,p+1}(x,y)=\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)+T_iF_{i,p}(\xi,\eta),(x,y)\in D_i,\end{gathered}\tag{41}$$

де

$$\begin{gathered}\omega_{1,1}^p(x,y)=\overline{\omega}_{1,1}^p(x,y)=\Phi_1(x,y),\\ \omega_{2,2}^p(x,y)=\psi(y)+\varphi(x)-\psi(g(x))+T_3F_1^p(\xi,\eta),\\ \overline{\omega}_{2,2}^p(x,y)=\psi(y)+\varphi(x)-\psi(g(x))+T_3F_{1,p}(\xi,\eta),\\ \alpha_{i,p}(x,y)=Z_{i,p}(x,y)-\omega_{i,i}^p(x,y)-T_iF_i^p(\xi,\eta),\\ \beta_{i,p}(x,y)=V_{i,p}(x,y)-\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)-T_iF_{i,p}(\xi,\eta).\end{gathered}\tag{42}$$

За нульове наближення вибираємо довільні з простору $C^*(\overline{D})$ функції $Z_{i,0}(x,y)$, $V_{i,0}(x,y)$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered}W_{i,0}(x,y)\ge0,W_{i,0,y}(x,y)\le0,\alpha_{i,0}(x,y)\ge0,\\ \beta_{i,0}(x,y)\le0,(x,y)\in\overline{D}_i,i=1,2,\end{gathered}\tag{43}$$

З (41) і (42) маємо

$$\begin{gathered}Z_{i,p}(x,y)-Z_{i,p+1}(x,y)=\alpha_{i,p}(x,y),\\ V_{i,p}(x,y)-V_{i,p+1}(x,y)=\beta_{i,p}(x,y),\end{gathered}\tag{44}$$

$$W_{i,p+1}(x,y)=\omega_{i,i}^p(x,y)-\overline{\omega}_{i,i}^p(x,y)+T_i[F_i^p(\xi,\eta)-F_{i,p}(\xi,\eta)],\tag{45}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{i,p+1}(x,y)=\begin{cases}\alpha_{1,p+1}(x,y)=T_1(F_1^p(\xi,\eta)-F_1^{p+1}(\xi,\eta)),\\ \alpha_{2,p+1}(x,y)=T_2(F_2^p(\xi,\eta)-F_2^{p+1}(\xi,\eta))+\\ +T_3(F_1^p(\xi,\eta)-F_1^{p+1}(\xi,\eta)),\end{cases}\\ \beta_{i,p+1}(x,y)=\begin{cases}\beta_{1,p+1}(x,y)=T_1(F_{1,p}(\xi,\eta)-F_{1,p+1}(\xi,\eta)),\\ \beta_{2,p+1}(x,y)=T_2(F_{2,p}(\xi,\eta)-F_{2,p+1}(\xi,\eta))+\\ +T_3(F_{1,p}(\xi,\eta)-F_{1,p+1}(\xi,\eta)),\end{cases}\end{gathered}\tag{46}$$

З (44), (45) при $p=0$ одержимо

$$Z_{i,0}(x,y)\geq Z_{i,1}(x,y), V_{i,0}(x,y)\leq V_{i,1}(x,y), W_{i,1}(x,y)\geq 0,$$
$$Z_{i,0,y}(x,y)\leq Z_{i,1,y}(x,y), V_{i,0,y}(x,y)\geq V_{i,1,y}(x,y), W_{i,1,y}(x,y)\leq 0,$$

$i=1,2$, таким чином

$$V_{i,0}(x,y)\leq V_{i,1}(x,y)\leq Z_{i,1}(x,y)\leq Z_{i,0}(x,y),$$
$$V_{i,0,y}(x,y)\geq V_{i,1,y}(x,y)\geq Z_{i,1,y}(x,y)\geq Z_{i,0,y}(x,y), (x,y)\in D_i, i=1,2.$$

Приймаючи до уваги останні нерівності, з (46) при $p=0$ одержимо

$$\alpha_{i,1}(x,y)\geq 0, \beta_{i,1}(x,y)\leq 0, (x,y)\in D_i, i=1,2.$$

Повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємося, що справедливі нерівності

$$\begin{gathered} V_{i,p}(x,y)\leq V_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p}(x,y),\\ V_{i,p,y}(x,y)\geq V_{i,p+1,y}(x,y)\geq Z_{i,p+1,y}(x,y)\geq Z_{i,p,y}(x,y), (x,y)\in D_i, i=1,2. \end{gathered} \tag{47}$$

Теорема 3. *Нехай функція* $F[U(x,y)]\in C_5(\overline{B})$ *і в просторі* $C^*(\overline{D})$ *існують такі функції нульового наближення* $Z_{i,0}(x,y)$, $V_{i,0}(x,y)\in B^*$, *які задовольняють нерівності* (43).

Тоді послідовності функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$, *побудовані за формулами* (41), *збігаються в області* $\overline{D}_i$ *абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку рівняння* (37) $(i=1)$ *або* (38) $(i=2)$ *і справедливі нерівності*

$$\begin{gathered} V_{i,p}(x,y)\leq V_{i,p+1}(x,y)\leq U_i(x,y)\leq\\ \leq Z_{i,p+1}(x,y)\leq Z_{i,p}(x,y),\\ V_{i,p,y}(x,y)\geq V_{i,p+1,y}(x,y)\geq U_{i,y}(x,y)\geq\\ \geq Z_{i,p+1,y}(x,y)\geq Z_{i,p,y}(x,y), (x,y)\in D_i, i=1,2. \end{gathered} \tag{48}$$

Доведення. Доведемо рівномірну збіжність послідовностей функцій $\{Z_{i,p}(x,y)\}$, $\{V_{i,p}(x,y)\}$ до розв'язків рівнянь (37) $(i=1)$ або (38) $(i=2)$. В силу нерівностей (48) для цього достатньо показати, що $W_{i,p}(x,y)\underset{p\to\infty}{\overset{(x,y)\in\overline{D}_i}{\rightrightarrows}} 0$.

Дійсно,

$$W_{i,p+1}(x,y)=\omega^p_{i,i}(x,y)-\overline{\omega}^p_{i,i}(x,y)+T_i[F^p_i(\xi,\eta)-F_{i,p}(\xi,\eta)]\leq$$
$$\leq\begin{cases} T_1\left[F^p_1(\xi,\eta)-F_{1,p}(\xi,\eta)\right], (x,y)\in\overline{D}_1,\\ T_3\left[F^p_1(\xi,\eta)-F_{1,p}(\xi,\eta)\right]+T_2\left[F^p_2(\xi,\eta)-F_{2,p}(\xi,\eta)\right], (x,y)\in\overline{D}_2,\end{cases}$$

таким чином

$$W_{i,p+1}(x,y)\leq\begin{cases} T_1\left[|W_{1,p}(\xi,\eta)|+|W_{1,p,y}(\xi,\eta)|\right], (x,y)\in\overline{D}_1,\\ T_3\left[|W_{1,p}(\xi,\eta)|+|W_{1,p,y}(\xi,\eta)|\right]+\\ +T_2\left[|W_{2,p}(\xi,\eta)|+|W_{2,p,y}(\xi,\eta)|\right], (x,y)\in\overline{D}_1.\end{cases}$$

Позначивши

$$d = \max\left\{\sup_{\overline{D}} |W_{i,0}|\,, \sup_{\overline{D}} |W_{i,0,y}|\right\},$$

з останніх нерівностей легко отримати оцінки

$$W_{i,p+1}(x,y) \le \frac{[2LR(x_1-x)]^p}{p!}(1+y_2-y)d,$$

де $R = \max\{1, 1+y_2-y\}$.

З оцінок випливає, що $W_{i,p}(x,y) \underset{p\to\infty}{\overset{\overline{D}}{\rightrightarrows}} 0$.

Єдиність розв'язку задачі (31)-(33) і справедливість нерівностей (48) доводяться аналогічно, як в теоремі 2.

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.– М.: Мир, 1969. – 448 с.
2. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наук. думка, 1980. – 268 с.
3. *Маринець В.В.* Один підхід побудови швидкозбіжних ітераційних процесів наближеного інтегрування задачі Коші для систем хвильових рівнянь на площині // Доп. АН України. – 1993. № 7. – С. 15-18.
4. *Маринець. В.В. Трошина А.В.* Узагальнена задача Дарбу // Наук. вісник УжНУ. Серія матем. – Ужгород, 1999. Вип. 4.– С. 79–84.

Одержано 15.10.2008