УДК 519.21

В. І. Масол, Л. О. Ромашова (Київський нац. ун-т)

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ЄДИНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ РІВНЯНЬ У ПОЛІ $GF(3)$

The conditions of existence of the unique solution of the similar system of nonlinear random equations are explored above the field that consists of the three elements. With the positive probability it is assumed every equation of the system contains, at least, one coefficient the order non-linearity of which is equaled two. The random coefficients the order non-linearity of which are equaled two are independent between it self and do not depend of other coefficients of the similar system.

Досліджуються умови існування єдиного розв'язку однорідної системи нелінійних випадкових рівнянь над полем, що складається з трьох елементів. Припускається, що з додатною ймовірністю кожне рівняння системи містить, принаймні, один коефіцієнт, порядок нелінійності якого рівний двом. Випадкові коефіцієнти, порядок нелінійності яких рівний двом, незалежні між собою і не залежать від інших коефіцієнтів однорідної системи.

Вступ. Робота присвячена знаходженню необхідних та достатніх умов існування єдиного з ймовірністю одиниця нульового розв'язку однорідної системи нелінійних випадкових рівнянь у полі $GF(3)$, утвореного з трьох елементів. Доведення відповідної теореми побудовано на використанні відомих нерівностей та отриманні й асимптотичному аналізі перших двох факторіальних моментів числа нетривіальних розв'язків вихідної системи рівнянь.

Для однорідної системи лінійних випадкових рівнянь над двоелементним полем необхідна і достатня умови існування єдиного розв'язку розглянуті в [1].

Основні результати.

Нехай над полем $GF(3)$ задана система

$$f^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) +_3 \sum\nolimits_3_{1\le j_1<j_2\le n} a^{(\mu)}_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} = 0, \quad \mu \in J, \tag{1}$$

де $J = \{1, 2, \ldots, T\}$, $T \ge 1$, $+_3$ та $\sum_3$ — символи додавання у полі $GF(3)$, яка задовольняє умову (A).

Умова (A): 1) Коефіцієнти $a^{(\mu)}_{j_1 j_2}$, $1 \le j_1 < j_2 \le n$, $\mu \in J$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких приймає значення a з ймовірністю $P(a^{(\mu)}_{j_1 j_2} = a) = p_{\mu 2}$, $a \in GF(3)$, $a \ne 0$ та значення $0 \in GF(3)$ з ймовірністю $P(a^{(\mu)}_{j_1 j_2} = 0) = 1 - 2p_{\mu 2}$.

2) $f^{(\mu)}(\bar{x})$, $\mu \in J$ — незалежні випадкові функції при кожному фіксованому $\bar{x}$, розподіли яких не залежать від розподілів коефіцієнтів $a^{(q)}_{j_1 j_2}$ для усіх $q \in J$, $1 \le j_1 < j_2 \le n$, $f^{(\mu)}(\bar{x}) \in GF(3)$, $\bar{x} \in V_n$, де V_n — сукупність усіх n-вимірних векторів над полем $GF(3)$, $f^{(\mu)}(\bar{0}) = 0$, з ймовірністю одиниця, $\bar{0} \in V_n$.

Покладемо ν_n кількість розв'язків $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, системи (1) з додатним числом $|\bar{x}|$ ненульових компонент, $|\bar{x}| > 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A) *та*

$$\frac{\ln n + z}{n} \le p_{\mu 2} \le \frac{1}{2} - \frac{\ln n + z}{n}, \ \mu \in J, \tag{2}$$

де $z = o(\ln n)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} z > -\infty$, $n \to \infty$;

(*У1*):

$$P\left(f^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}) = a,\ k = 1,2\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_\mu,\ a \in GF(3),\ a \neq 0,$$

$$P\left(f^{(\mu)}(\bar{x}^{(k)}) = 0,\ k = 1,2\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_\mu,$$

де

$$-\frac{1}{2} \le p_\mu \le 1 - 3\frac{\ln n}{n}, \tag{3}$$

$\mu \in J$, $\bar{x}^{(k)} \in V_n$, $|\bar{x}^{(k)}| \ge 1$, $k = 1,2$.

Тоді умова

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{T}{n} \ge 1 + \varepsilon_n, \tag{4}$$

де $\varepsilon_n \to 0$,

$$\varepsilon_n lnn \to \infty, \tag{5}$$

є достатньою, а умова

$$T = n + A_n, \tag{6}$$

де $A_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *є необхідною для того, щоб* $P(\nu_n > 0) = o(1), n \to \infty$.

Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* ξ — *випадкова величина, яка має представлення* $\xi = \xi_1 +_3 +_3 \ldots +_3 \xi_k$, *де* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — *незалежні однаково розподілені випадкові величини;* $P(\xi_s = 0) = 1 - 2p^*$, $P(\xi_s = a) = p^*$, $a \in GF(3)$, $a \neq 0$, $s = 1, \ldots, k$, $1 \le k < \infty$.

Тоді ймовірності подій $\xi = 0$ *та* $\xi = a$ *дорівнюють відповідно*

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - 3p^*)^k,$$

$$P(\xi = a) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3p^*)^k,\ a \in GF(3),\ a \neq 0.$$

(Тут і далі вважаємо $0^0 = 1$).

Доведення леми 1 можна виконати методом математичної індукції за параметром $k \ge 1$.

Лема 2. *Якщо виконуються умова* (*A*) *та умова* (*У1*) *при* $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(2)}$, *то математичне сподівання* $E\nu_n$ *випадкової величини* ν_n *дорівнює*

$$E\nu_n = 3^{-T} \sum_{t=1}^{n} C_n^t 2^t Q, \tag{7}$$

$$Q = \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2(1 - 3p_{\mu 2})^{C_t^2} p_\mu\right), \tag{8}$$

$C_n^t = n!(t!(n-t)!)^{-1}$.

Доведення. Нехай $\xi(\bar{x})$ — індикатор події, яка полягає у тому, що вектор $\bar{x}$, $\bar{x} \in V_n$, є розв'язком системи (1). З урахуванням умови (A) маємо

$$E\nu_n = \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|=1} E\xi(\bar{x}) + \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|\geq 2} E\xi(\bar{x}) =$$

$$= \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|=1} \prod_{\mu=1}^{T} P\left(f^{(\mu)}(\bar{x}) = 0\right) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|\geq 2} \prod_{\mu=1}^{T} P\left(f^{(\mu)}(\bar{x}) +_3 \sum\nolimits_{3}{}_{1\leq j_1<j_2\leq n} a^{(\mu)}_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} = 0\right) =$$

$$= \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|=1} \prod_{\mu=1}^{T} P\left(f^{(\mu)}(\bar{x}) = 0\right) + \sum_{\bar{x}:\ |\bar{x}|\geq 2} \prod_{\mu=1}^{T} \sum{}' P\left\{f^{(\mu)}(\bar{x}) = y_1\right\} \cdot$$

$$\cdot P\left\{\sum\nolimits_{3}{}_{1\leq j_1<j_2\leq n} a^{(\mu)}_{j_1 j_2} x_{j_1} x_{j_2} = y_2\right\}, \tag{10}$$

де символ сумування $\sum'$ розповсюджується на усі розв'язки рівняння $y_1 +_3 y_2 = 0$ у полі $GF(3)$.

Кількість доданків у сумі $\sum_3$ з правої частини (10), які відмінні від 0, дорінює C_t^2, де t — загальна кількість ненульових компонент вектора $\bar{x}$, $|\bar{x}| \geq 1$. Тоді, скориставшись лемою 1, умовою (У1) при $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(2)}$ та співвідношенням (10), неважко прийти до (7).

Лема 2 доведена.

Для довільних векторів $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\bar{x}^{(q)} = (x_1^{(q)}, \ldots, x_n^{(q)})$, $q = 1, 2$, позначимо через $i_{c_1 c_2}$ кількість компонент вектора $\bar{x}^{(1)}$, які дорівнюють c_1, а у векторі $\bar{x}^{(2)}$ їм відповідають компоненти, що дорівнюють c_2, де $c_1, c_2 \in GF(3)$, $0 \leq i_{c_1 c_2} \leq n$. Позначимо I наступну множину

$$I = \{\ i_{01}, i_{02}, i_{10}, i_{20}, i_{11}, i_{22}, i_{12}, i_{21}\ \}.$$

Покладемо

$$t = \sum_{j\in I} j,\ \ i = i_{01} + i_{02},\ \ l = i_{10} + i_{20}.$$

Позначимо $E\nu_n^{[2]}$ другий факторіальний момент випадкової величини ν_n, тобто $E\nu_n^{[2]} = E\nu_n(\nu_n - 1)$.

Лема 3. *Якщо виконуються умови* (A) *та* (У1), *то*

$$E\nu_n^{[2]} = \frac{4n^2}{3^T} \prod_{\mu=1}^{T} (1 + 2p_\mu) + 9^{-T} \sum_{t=2}^{n} C_n^t \left(n2^{t+2}Q' + \sum \frac{t!}{\prod\limits_{j\in I} j!} Q^* \right), \tag{11}$$

де

$$Q' = \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2(1 - 3p_{\mu 2})^{C_t^2}\right)(1 + 2p_\mu), \tag{12}$$

$$Q^* = \prod_{\mu=1}^{T} \left(1 + 2\left((1 - 3p_{\mu 2})^{\Gamma_2^{(1)}} + p_\mu \sum_{r=2}^{4} (1 - 3p_{\mu 2})^{\Gamma_2^{(r)}}\right)\right), \tag{13}$$

сумування $\sum$ *відбувається за всіма* $j \in I$ *таким, що* $\sum\limits_{j\in I} j = t$*; в рівності* (11) *елементи множини* I *задовольняють співвідношенням*

$$t - i \geq 2, \tag{14}$$

$$t - l \geq 2, \tag{15}$$

$$i + l + i_{12} + i_{21} \geq 1; \tag{16}$$

параметри $\Gamma_2^{(g)}$, $g = 1, 2, 3, 4$ *визначаються відповідно рівностями*

$$\Gamma_2^{(1)} = C_l^2 + C_i^2 + (i+l)(t-l-i), \tag{17}$$

$$\Gamma_2^{(2)} = C_{t-l}^2, \tag{18}$$

$$\Gamma_2^{(3)} = C_{t-i}^2, \tag{19}$$

$$\Gamma_2^{(4)} = C_l^2 + C_i^2 + C_{t-l-i}^2 + (i+l)(t-l-i). \tag{20}$$

Доведення. Користуючись умовою (A) та співвідношеннями

$$E\nu_n^{[2]} = \sum_{t=1}^{4} S_t,$$

$$S_t = \sum\nolimits_{(t)} E\xi(\bar{x}^{(1)})\xi(\bar{x}^{(2)}),$$

де сумування $\sum_{(1)}$ виконується за всіма векторами $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\left|\bar{x}^{(q)}\right| = 1,\ q = 1, 2$, $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $\sum_{(2)}$ — $\bar{x}^{(q)} \in V_n,\ q = 1, 2,\ \left|\bar{x}^{(1)}\right| = 1,\ \left|\bar{x}^{(2)}\right| \geq 2,\ \bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $\sum_{(3)}$ — $\bar{x}^{(q)} \in V_n,\ q = 1, 2,\ \left|\bar{x}^{(1)}\right| \geq 2,\ \left|\bar{x}^{(2)}\right| = 1,\ \bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $\sum_{(4)}$ — $\bar{x}^{(q)} \in V_n$, $\left|\bar{x}^{(q)}\right| \geq 2,\ q = 1, 2,\ \bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, отримуємо

$$\begin{gathered}
E\nu_n^{[2]} = \sum\nolimits_{(1)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0 \right\} + \\
+ \sum\nolimits_{(2)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) +_3 A_1^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0 \right\} + \\
+ \sum\nolimits_{(3)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) +_3 A_1^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0 \right\} + \\
+ \sum\nolimits_{(4)} \prod_{\mu=1}^{T} P\Big\{ A_2^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) +_3 A_{12}^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right) +_3 f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0, \\
A_2^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) +_3 A_{12}^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right) +_3 f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0 \Big\},
\end{gathered} \tag{21}$$

де для $\mu \in J$

$$A_1^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(q)}\right) = \sum\nolimits_{\substack{3 \\ \omega\in E_2'^{(q)}}} a_\omega^{(\mu)},$$

$$A_{12}^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right) = \sum\nolimits_{\substack{3 \\ \omega\in E_2^{(12)}}} a_\omega^{(\mu)},\ A_2^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(q)}\right) = \sum\nolimits_{\substack{3 \\ \omega\in E_2^{(q)}}} a_\omega^{(\mu)},\ q=1,2,$$

$$E_2'^{(q)} = \left\{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n : x_{j_1}^{(q)} x_{j_2}^{(q)} \ne 0\right\},$$
$$E_2^{(12)} = \left\{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n : x_{j_1}^{(q)} x_{j_2}^{(q)} \ne 0, q=1,2\right\},$$
$$E_2^{(q)} = \left\{(j_1, j_2), 1 \le j_1 < j_2 \le n : x_{j_1}^{(q)} x_{j_2}^{(q)} \ne 0, x_{j_1}^{(q^*)} x_{j_2}^{(q^*)} = 0\right\},$$

$q \in \{1,2\}$, $q^* \in \{1,2\}$, $q^* \ne q$.

За допомогою умов (A), (У1) та (21) знаходимо

$$E\nu_n^{[2]} = \sum\nolimits_{(1)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0\right\} +$$
$$+\sum\nolimits_{(2)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0\right\} P\left\{A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0\right\} +$$
$$+\sum\nolimits_{(3)} \prod_{\mu=1}^{T} P\left\{f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = 0,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0\right\} P\left\{A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = 0\right\} + \quad (22)$$
$$+\sum\nolimits_{(4)} \prod_{\mu=1}^{T} \sum\nolimits^{*} P\left\{\ A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = y_1\ \right\} P\left\{\ A^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = y_2\ \right\} \cdot$$
$$\cdot P\left\{\ A_{12}^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}\right) = y_{12}\ \right\} P\left\{\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(1)}\right) = y_3,\ f^{(\mu)}\left(\bar{x}^{(2)}\right) = y_4\ \right\},$$

де символ сумування $\sum^*$ розповсюджується на усі розв'язки однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1 +_3 y_{12} +_3 y_3 = 0, \\ y_2 +_3 y_{12} +_3 y_4 = 0 \end{cases}$$

у полі $GF(3)$.

Позначимо

$$\Gamma_2^{(1)} = \left|E_2^{(1)}\right| + \left|E_2^{(2)}\right|, \Gamma_2^{(2)} = \left|E_2^{(2)}\right| + \left|E_2^{(12)}\right|,$$
$$\Gamma_2^{(3)} = \left|E_2^{(1)}\right| + \left|E_2^{(12)}\right|, \Gamma_2^{(4)} = \left|E_2^{(1)}\right| + \left|E_2^{(12)}\right| + \left|E_2^{(2)}\right|,$$

де $|E|$ — потужність множини E. Скориставшись лемою 1 та умовою (У1), праву частину (22) можна подати у вигляді

$$E\nu_n^{[2]} = 3^{-T}\sum\nolimits_{(1)}\prod_{\mu=1}^{T}(1+2p_\mu) + 9^{-T}\left(\left(\sum\nolimits_{(2)}+\sum\nolimits_{(3)}\right)Q' + \sum\nolimits_{(4)} Q^*\right), \quad (23)$$

де Q', Q^* визначені відповідно рівностями (12) та (13).

Сумування $\sum_{(4)}$ у правій частині (23) за всіма $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$, $\left|\bar{x}^{(q)}\right| \geq 2$, $q = 1, 2$, еквівалентно у прийнятих позначеннях сумуванню за всіма $j \in I$, наведеного у правій частині (11). Нерівності (14), (15), (16) гарантують виконання відповідно співвідношень $\left|\bar{x}^{(1)}\right| \geq 2$, $\left|\bar{x}^{(2)}\right| \geq 2$ та $\bar{x}^{(1)} \neq \bar{x}^{(2)}$.

Лема 3 доведена.

Лема 4. *Якщо виконуються умови* (A), (3) *та*

$$\upsilon \leq p_{\mu 2} \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \quad (24)$$

де $0 < \upsilon < \frac{1}{6}$, $\mu \in J$, *то*

$$E\nu_n > 0. \quad (25)$$

Доведення. В силу (7) та (8) для доведення співвідношення (25) достатньо показати, що для $n \geq 2$

$$Q > 0. \quad (26)$$

З цією метою представимо добуток Q, визначений рівністю (8), у вигляді

$$Q = \prod_{r=1}^{4} Q_r, \quad (27)$$

де Q_r, $r = 1, 2, 3, 4$, позначає добуток усіх множників з правої частини (8), для яких параметр μ належить множині W_r, де $W_r, r = 1, 2, 3, 4$, визначаються наступним чином

$$W_1 = \left\{ \mu, \quad 1 \leq \mu \leq T: \ \upsilon \leq p_{\mu 2} \leq \frac{1}{3}, \ p_\mu < 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \mu, \quad 1 \leq \mu \leq T: \ \upsilon \leq p_{\mu 2} \leq \frac{1}{3}, \ p_\mu \geq 0; \right.$$

$$\text{або} \ \ \frac{1}{3} < p_{\mu 2} \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \ p_\mu \leq 0, \ C_t^2 \text{ — непарне};$$

$$\left. \text{або} \ \frac{1}{3} < p_{\mu 2} \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \ p_\mu \geq 0, \ C_t^2 \text{ — парне} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \mu, \quad 1 \leq \mu \leq T: \frac{1}{3} < p_{\mu 2} \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \ p_\mu < 0, \quad C_t^2 \text{ — парне} \right\},$$

$$W_4 = \left\{ \mu, \quad 1 \leq \mu \leq T: \frac{1}{3} < p_{\mu 2} \leq \frac{1}{2} - \upsilon, \ p_\mu \geq 0, \quad C_t^2 \text{ — непарне} \right\},$$

де $t \geq 2$.

Покладемо η_r — кількість елементів множини W_r, $\eta_r = |W_r|$, $r = 1, 2, 3, 4$. Тоді

$$\sum_{r=1}^{4} \eta_r = T. \tag{28}$$

З урахуванням (24) та означення добутків Q_1, Q_4 отримуємо

$$Q_1 \geq (3\upsilon)^{\eta_1}, \quad Q_4 \geq (6\upsilon)^{\eta_4}. \tag{29}$$

За допомогою умов (3) та (24) знаходимо

$$Q_2 \geq 1, \quad Q_3 \geq \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{C_t^2}\right)^{\eta_3}, \tag{30}$$

де $t \geq 2$.

Із (27)–(30) випливає

$$Q \geq 2^{\eta_4} 3^{\eta_1+\eta_4} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{C_t^2}\right)^{\eta_3} \upsilon^{\eta_1+\eta_4},$$

звідки маємо (26), а отже й (25).

Лема 4 доведена.

Зауваження 1. *Очевидно, що*

$$E\nu_n \leq E\nu_n^2 < \infty. \tag{31}$$

Співвідношення (25) *та* (31) *дозволяють використати лему 1* [2], *згідно з якою ймовірність* $P(\nu_n > 0)$ *задовольняє нерівності*

$$P(\nu_n > 0) \geq \left(2 (E\nu_n)^{-1} + E\nu_n^{[2]} (E\nu_n)^{-2}\right)^{-1}. \tag{32}$$

Лема 5. *Нехай виконуються умови* (*A*), (2), (3) *та*

$$T \leq n + m_0, \tag{33}$$

де m_0 *— стале число.*

Тоді при $n \to \infty$

$$Q > a \tag{34}$$

для довільного $t \in F$, *де* $F = \left[\left[\frac{2}{3}n\right] - \left[\frac{n}{\ln n}\right];\, n\right]$, *a — деяке фіксоване додатне число,* $a < \infty$, $[\, d\,]$ *— знак цілої частини числа d.*

Доведення. Дійсно, користуючись (8), маємо

$$Q = \prod_{r=1}^{2} Q_r^*, \tag{35}$$

де Q_r^*, $r = 1, 2$ позначає добуток усіх множників з правої частини (8), для яких параметр μ належить множині W_r^*, де $W_r^*, r = 1, 2$, з урахуванням (33), визначаються наступним чином:

$$W_1^* = \{\ \mu,\ 1 \le \mu \le n + m_0 :\ p_\mu \ge 0\},$$
$$W_2^* = \{\ \mu,\ 1 \le \mu \le n + m_0 :\ p_\mu < 0\}.$$

Покладемо η_r^* — кількість елементів множини W_r^*, $\eta_r^* = |W_r^*|$, $r = 1, 2$, тоді за допомогою умови (2) та означення множин W_1^* та W_2^* маємо для $t \in F$ при $n \to \infty$

$$(\ 1 - 3p_{\mu_2})^{C_t^2}\, p_\mu\ \ge\ -\exp\left\{-\frac{2\ln 2}{9}\ n^2\,(1 + o(1))\right\}, \mu \in W_1^*, \tag{36}$$

$$(\ 1 - 3p_{\mu 2})^{C_t^2}\, p_\mu\ \ge\ -\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{2n\ln n}{3}\,(1 + o(1))\right\}, \mu \in W_2^*. \tag{37}$$

Користуючись (36) та (37), отримуємо при $n \to \infty$

$$Q_1^* \ge \left(1 - 2\exp\left\{-\frac{2\ln 2}{9}\ n^2\,(1 + o(1))\right\}\right)^{\eta_1^*}, \tag{38}$$

$$Q_2^* \ge \left(1 - \exp\left\{-\frac{2n\ln n}{3}\,(1 + o(1))\right\}\right)^{\eta_2^*}. \tag{39}$$

З урахуванням співвідношень (33), (35), (38) та (39) приходимо до (34) при $n \to \infty$.

Лема 5 доведена.

Лема 6. *Нехай ψ_n — послідовність цілих чисел така, що $\frac{\psi_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді*

$$C_n^{\left[\frac{2}{3}n\right]-\psi_n} \le \frac{3^n}{2^{\frac{2}{3}n-\psi_n}} \exp\left\{-\frac{\psi_n^2}{n}\left(\frac{9}{4} + O\left(\frac{\psi_n}{n}\right)\right)\right\},\ n\ \to\ \infty. \tag{40}$$

Доведення. Оскільки

$$C_n^{\left[\frac{2}{3}n\right]-\psi_n} = \frac{n!}{\left(\left[\frac{2}{3}n\right] - \psi_n\right)!\left(n - \left[\frac{2}{3}n\right] + \psi_n\right)!},$$

то за допомогою формули Стірлінга [3] отримуємо

$$C_n^{\left[\frac{2}{3}n\right]-\psi_n} \le \frac{3^n}{2^{\frac{2}{3}n-\psi_n}} \exp\left\{-\left(\frac{2}{3}n - \psi_n\right)\ln\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\psi_n}{n}\right) - \left(\frac{1}{3}n + \psi_n\right)\ln\left(1 - 3\frac{\psi_n}{n}\right)\right\}.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності розклад в ряд Тейлора для функції ln в околі точки 0, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$ при $|u| < 1$, приходимо до (40).

Лема 6 доведена.

Лема 7. *Серед чотирьох параметрів* $\Gamma_2^{(l)}$, $l = 1,2,3,4$ *існують принаймні три* $\Gamma_2^{(l_1)}$, $\Gamma_2^{(l_2)}$, $\Gamma_2^{(l_3)}$, $l_1, l_2, l_3 \in \{1,2,3,4\}$, $l_1 \neq l_2$, $l_2 \neq l_3$, $l_1 \neq l_3$ *таких, що* $\Gamma_2^{(l_r)} \geq \frac{t}{2} - 1$, $t \geq 4$, $r = 1,2,3$, *причому серед цих трьох параметрів існує принаймні один* $\Gamma_2^{(l^*)}$ *такий, що* $\Gamma_2^{(l^*)} \geq C_{\frac{t}{2}}^2$, $t \geq 4$, $l^* \in \{l_1, l_2, l_3\}$.

Доведення. Нехай $i \geq \frac{t}{2}$. Тоді, користуючись співвідношеннями (17) — (20), знаходимо, що існують принаймні три параметри $\Gamma_2^{(l_1)}$, $\Gamma_2^{(l_2)}$, $\Gamma_2^{(l_3)}$, $l_1, l_2, l_3 \in \in \{1,2,3,4\}$, $l_1 \neq l_2$, $l_2 \neq l_3$, $l_1 \neq l_3$ таких, що $\Gamma_2^{(l_r)} \geq C_{\frac{t}{2}}^2$, $t \geq 4$, $r = 1,2,3$.

Нехай тепер

$$i < \frac{t}{2}. \tag{41}$$

Розглянемо всі можливі випадки, тобто:

1) якщо виконується (41) і при цьому $l \geq \frac{t}{2}$, то з урахуванням (17) та (20) отримуємо $\Gamma_2^{(1)} \geq C_l^2 \geq C_{\frac{t}{2}}^2$, $\Gamma_2^{(4)} \geq \Gamma_2^{(1)} \geq C_{\frac{t}{2}}^2$;

2) якщо виконується (41) і крім того $\alpha \geq \frac{t}{2}$, де $t = i + l + \alpha$, $\alpha = i_{11} + i_{22} + i_{12} + + i_{21}$, то за допомогою співвідношень (18) та (20) приходимо до $\Gamma_2^{(2)} \geq C_\alpha^2 \geq C_{\frac{t}{2}}^2$, $\Gamma_2^{(4)} \geq C_{t-l-i}^2 = C_\alpha^2 \geq C_{\frac{t}{2}}^2$;

3) якщо виконується (41) і нехай також $l + \alpha \geq \frac{t}{2}$, $l \geq 1$ та $\alpha \geq 1$ (випадки, коли $l \geq \frac{t}{2}$, $\alpha = 0$ або $l = 0$, $\alpha \geq \frac{t}{2}$ розглянуті в пунктах 1) та 2)), то $l\alpha \geq \frac{t}{2} - 1$. Дійсно, нехай $l + \alpha = \beta$, де $\beta \geq \frac{t}{2}$. Тоді $l\alpha = l(\beta - l) \geq \beta - 1 \geq \frac{t}{2} - 1$ (передостання нерівність має місце, оскільки функція $f(x)$, $f(x) = x(\beta - x)$ зростає на відрізку $\left[1; \frac{\beta}{2}\right]$ і спадає на інтервалі $\left[\frac{\beta}{2}; \beta - 1\right]$ досягаючи мінімального значення при $x = 1$ або при $x = \beta - 1$ (не порушуючи загальності, вважаємо, що $1 \leq x \leq \leq \beta - 1$)). Отже, використовуючи (17), (20), (41) та нерівність $l\alpha \geq \frac{t}{2} - 1$, знаходимо $\Gamma_2^{(1)} \geq (i + l)(t - l - i) = (i + l)\alpha \geq l\alpha \geq \frac{t}{2} - 1$, $\Gamma_2^{(4)} \geq \Gamma_2^{(1)} \geq \frac{t}{2} - 1$.

Лема 7 доведена.

Доведення теореми. ***Доведення.*** *Достатність.* Покажемо, що при виконанні (4) має місце

$$E\nu_n \ = \ o(1), n \to \infty. \tag{42}$$

Беручи до уваги (7) та (8), математичне сподівання $E\nu_n$ можна подати у вигляді

$$E\nu_n = \sum_{h=1}^{5} D_h, \tag{43}$$

де

$$D_h = 3^{-T} \sum_{t \in R_h} C_n^t 2^t Q, \;\; h = 1, \ldots, 4,$$

$$D_5 = \frac{2n}{3^T} \prod_{\mu=1}^{T} (1 + 2p_\mu).$$

Замкнені відрізки R_h, $h = 1, 2, 3$ кінцями яких слугують цілі числа, дорівнюють $R_1 = \left[\ 2, \left[\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right]\ \right]$, $R_2 = \left[\ \left[\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right] + 1, \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]\ \right]$, $R_3 = \left[\ \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right] + 1, [\varepsilon_2 n]\ \right]$, $R_4 = [\ [\varepsilon_2 n] + 1, n\ ]$. Тут і далі ε_t — достатньо мале фіксоване додатне число, $t = 1, 2, \ldots$ За допомогою (43) для обгрунтування (42) достатньо переконатися, що при $n \to \infty$

$$D_h \;=\; o(1) \tag{44}$$

для $h = 1, \ldots, 5$.

Позначимо $p_{\max} \;=\; \max\limits_{1 \,\le\, \mu \,\le\, T} p_{\mu 2}$, $\;p_{\min} \;=\; \min\limits_{1 \,\le\, \mu \,\le\, T} p_{\mu 2}$.

З урахуванням (2), (3) та $p_{min} C_t^2 \in [\ 0; 1\ ]$ при $n \to \infty$ для $t \in R_1$ отримуємо

$$Q \;\le\; 3^T \left(1 - 2p_{min} C_t^2 + 3\left(p_{min} C_t^2\right)^2\right)^T. \tag{45}$$

Використовуючи (45), знаходимо при $n \to \infty$

$$D_1 \le \sum_{t=2}^{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}} \frac{(2n)^t}{t!} \exp\left\{-Ttp_{\min}\left(1 - \frac{3}{4\ln n}\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right)\right)\right\}. \tag{46}$$

Оскільки в силу (2) та (4) для всіх $t \in R_1$ маємо $\left(\frac{2}{e^{Tp_{\min}\left(1 - \frac{3}{4\ln n}\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)\right) - \ln n}}\right)^t \le$ $\le \left(\frac{2}{e^{\varepsilon_n \ln n + z + z\varepsilon_n}}\right)^t$, то з урахуванням (46) приходимо до оцінки

$$D_1 \le \sum_{t=2}^{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}} \frac{1}{t!} \exp\left\{-t\left(\varepsilon_n \ln n + z + z\varepsilon_n\right)\right\}, \;\; n \to \infty. \tag{47}$$

За допомогою умов (2) та (5) переконуємося, що із (47) випливає (44) при $h = 1$.

Перевіримо (44) при $h = 2$. Для Q при $t \in R_2$ за допомогою (2), (3) та $p_{min} C_t^2 \to 0$ при $\varepsilon_1 \to\ 0$ отримуємо

$$Q \le\; 3^T \left(1 - 2p_{min} C_t^2 + O\left(\left(p_{min} C_t^2\right)^2\right)\right)^T. \tag{48}$$

Беручи до уваги (2), (4) та (48) знаходимо

$$D_2 \le \sum_{t \in R_2} \left(\frac{2(\ln n) e^{|O(\varepsilon_1)| \ln n}}{\sqrt{n} e^{\varepsilon_n \ln n + \varepsilon_n z + z}}\right)^t,$$

звідки, користуючись (2) та (5) маємо (44) при $h = 2$.

Покажемо (44) при $h = 3$. З урахуванням (3) для $t \in R_3$ приходимо до наступної оцінки

$$Q \leq \left(1 + 2\exp\left\{-3p_{\min} C^2_{\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}}\right]+1}\right\}\right)^T. \tag{49}$$

Із (2) та (49) випливає при $n \to \infty$

$$D_3 \leq \left(\frac{e^{\sigma_1(\varepsilon_2)\frac{n}{T}}\left(1 + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}\varepsilon_1\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)}}\right)}{3}\right)^T. \tag{50}$$

Тут і далі $\sigma_r(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ для $r \geq 1$. Беручи до уваги припущення (4), $z = o(\ln n)$ та нерівність (50), отримуємо (44) для $h = 3$.

Перевіримо (44) при $h = 4$. Із (3) для всіх $t \in R_4$

$$Q \leq \left(1 + 2\exp\left\{-3p_{\min} C^2_{[\ \varepsilon_2 n\ ]+1}\right\}\right)^T. \tag{51}$$

За допомогою (2) та (51) приходимо до

$$D_4 \leq \left(\frac{3^{\frac{n}{T}}}{3}\right)^T \exp\left\{\frac{2T}{\exp\left\{\frac{3\varepsilon_2^2}{2}\left(1 + \frac{z}{\ln n}\right) n \ln n\right\}}\right\}. \tag{52}$$

Із співвідношень (4), (5), (52) та $\varepsilon_n \to 0$, $z = o(\ln n)$ при $n \to \infty$ знаходимо (44) при $h = 4$.

І, нарешті, покажемо (44) для $h = 5$. З урахуванням (3), маємо

$$D_5 \leq \frac{2}{n^{\frac{T}{n}-1}},$$

звідки, використовуючи (4), (5) отримуємо (44) при $h = 5$. Беручи до уваги (43) та (44) переконуємось, що виконується (42). Із (42) та нерівності Чебишева випливає $P\left(\nu_n > 0\right) = o(1)$ при $n \to \infty$.

Достатність доведена.

Необхідність. Нехай при $n \to \infty$ ймовірність $P\left(\nu_n > 0\right)$ прямує до нуля, тобто $P(\nu_n > 0) \to 0$, $n \to \infty$. Покажемо, що тоді виконується (6). Припустимо, що рівність (6) не виконується, а саме при $n \to \infty$

$$T \leq n + m_0, \tag{53}$$

для деякої сталої m_0 і переконаємося, що у такому випадку

$$P(\nu_n > 0) > 0 \tag{54}$$

при $n \to \infty$, тобто з додатньою ймовірністю існують розв'язки, які відмінні від $\bar{0}$. З цією метою перевіримо наступні нерівності при $n \to \infty$

$$\left(E\nu_n\right)^{-1} \leq a_1, \tag{55}$$

$$E\nu_n^{[2]}\left(E\nu_n\right)^{-2} \le a_2, \tag{56}$$

де a_t — фіксоване додатне число, $a_t < \infty$, $t = 1, 2, \ldots$.
Дійсно, беручи до уваги (7) та (8), математичне сподівання $E\nu_n$ можна подати у вигляді

$$E\nu_n = F_1(Q) + F_2(Q), \tag{57}$$

де $F_1(Q)$ / $F_2(Q)$ / — позначає праву частину (7) при $t \ge 2$ / t = 1 /. Оскільки $F_2(Q) \ge 0$, то для доведення (55) достатньо показати, що при $n \to \infty$

$$\left(F_1(Q)\right)^{-1} \le a_3. \tag{58}$$

За допомогою леми 5 маємо для $t \in F$ при $n \to \infty$

$$\left(F_1(Q)\right)^{-1} \le 3^{T-n}\gamma_n, \tag{59}$$

де

$$\gamma_n \le a^{-1}\left(3^{-n}\sum_{t\in F} C_n^t 2^t\right)^{-1}. \tag{60}$$

Використовуючи співвідношення (40) і $3^{-n}\sum\limits_{t=0}^{n} C_n^t 2^t = 1$, отримуємо

$$3^{-n}\sum_{t=0}^{\left[\frac{2}{3}n\right]-\left[\frac{n}{\ln n}\right]} C_n^t 2^t \le \exp\left\{-\frac{n}{\ln^2 n}\left(\frac{9}{4} + O\left((\ln n)^{-1}\right)\right)\right\} \to 0,$$

$n \to \infty$, отже

$$3^{-n}\sum_{t\in F} C_n^t 2^t \to 1,\ n \to \infty. \tag{61}$$

Із співвідношень (59)–(61) випливає (58), звідки за допомогою (57) маємо (55).

Покажемо, що при $n \to \infty$ існує таке число a_4, для якого

$$\left(3^{T-n}E\nu_n\right)^{-1} \le a_4. \tag{62}$$

Дійсно, беручи до уваги (59), знаходимо

$$\left(3^{T-n}E\nu_n\right)^{-1} \le \left(3^{T-n}F_1(Q)\right)^{-1} \le \gamma_n \tag{63}$$

при $n \to \infty$. Але з урахуванням (60) та (61) приходимо до $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\gamma_n \le a^{-1}$, що разом з (63) доводить (62).

Позначимо $S(n; Q^*) = \sum\limits_{t=2}^{n} C_n^t \sum \dfrac{t!}{\prod\limits_{j\in J} j!} Q^*$.

Із (62) випливає, що для доведення (56) достатньо показати, що має місце співвідношення

$$9^{T-n}E\nu_n^{[2]} \le a_5,\ n \to \infty. \tag{64}$$

З цією метою за допомогою (11)–(13) ліву частину (64) представимо у вигляді

$$9^{T-n}E\nu_n^{[2]} = S^{(1)} + S^{(2)} + 9^{-T}\sum_{h=3}^{6} S^{(h)}, \tag{65}$$

де

$$S^{(1)} = \frac{4n^2 3^T}{9^n}\prod_{\mu=1}^{T}(1+2p_\mu),\ S^{(2)} = \frac{4n}{9^n}\sum_{t=2}^{n} C_n^t 2^t Q',$$

$$S^{(h)} = \sum_{t\in R_h^*} C_n^t \sum \frac{t!}{\prod\limits_{j\in J} j!}Q^*,\ h=3,4,5,6.$$

Замкнені відрізки R_h^*, $h=3,4,5,6$, кінцями яких слугують цілі числа, дорівнюють $R_3^* = \left[\ 2; \left[\dfrac{n}{\ln^2 n}\right]\ \right]$, $R_4^* = \left[\ \left[\dfrac{n}{\ln^2 n}\right]+1; \left[\gamma\dfrac{n}{\ln n}\right]\ \right]$, $R_5^* = [\ \left[\gamma\dfrac{n}{\ln n}\right] + 1; [\varepsilon' n]\ ]$, $R_6^* = [\ [\varepsilon_3 n]+1; n\ ]$, де $\gamma>0, \gamma = const < \dfrac{2}{3}$.

Використовуючи (3) та (53), маємо

$$S^{(1)} \le a_6 \tag{66}$$

та

$$S^{(2)} \le a_7\frac{4}{n3^n}\sum_{t=2}^{n} C_n^t 2^t \left(1+2(1-3p_{\min})^{C_t^2}\right)^{n+m_0}. \tag{67}$$

Беручи до уваги (2) та (67) встановлюємо

$$S^{(2)} = o(1), n\to\infty. \tag{68}$$

З урахуванням леми 7, умов (2), (3) та (53) для $t\in R_3^*$, отримуємо

$$Q^* \le a_8 9^n \exp\left\{-t(\ln n)\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)\left(1+\frac{m_0}{n}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{z}{\ln n}\right)\right)\right]\right\}$$

при $n\to\infty$. Звідки за допомогою поліноміальної теореми знаходимо

$$S^{(3)} \le a_9 9^n + a_{10}9^n \sum_{t=8}^{\left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]} \frac{8^t}{t!}\exp\left\{-t\left(z+O\left(1\right)\right)\right\}. \tag{69}$$

Для параметра Q^* при $t\in R_4^*$ беручи до уваги (2), (3), (53) та лему 7, справедлива наступна оцінка

$$Q^* \le a_{11}9^n\exp\left\{-t\zeta\ln n\right\}, \tag{70}$$

де

$$\zeta = \left(1-\frac{3}{2}\gamma\left(1+O\left(\frac{z}{\ln n}\right)\right)+O\left(\frac{z}{\ln n}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right).$$

Із (70) та поліноміальної теореми випливає

$$S^{(4)} \leq a_{12} 9^n \sum_{t=\left[\frac{n}{\ln^2 n}\right]+1}^{\left[\gamma \frac{n}{\ln n}\right]} \left(\frac{8(1+o(1))\ln^2 n}{n^{-\frac{3}{2}\gamma+1+o(1)}} \right)^t . \tag{71}$$

За допомогою (2), (3), (53) та леми 7 для всіх $t \in R_5^*$ маємо

$$Q^* \leq a_{13} 3^n \left(1 + 2\exp\left\{ -\frac{3}{2}\gamma \left(1+\frac{z}{\ln n}\right)\left(1-\frac{2\ln n}{\gamma n}\right) \right\} \right)^{n+m_0} . \tag{72}$$

Використовуючи поліноміальну теорему та (72), отримуємо

$$S^{(5)} \leq a_{14} 3^n e^{\sigma_2(\varepsilon_3)n} \left(1 + 2\exp\left\{ -\frac{3}{2}\gamma \left(1+\frac{z}{\ln n}\right)\left(1-\frac{2\ln n}{\gamma n}\right) \right\} \right)^{n+m_0} \tag{73}$$

$n \to \infty$.

Із урахуванням співвідношень (11)–(13) суму $S^{(6)}$ подамо у вигляді двох сум $S_1^{(6)}(n;Q^*)$ та $S_2^{(6)}(n;Q^*)$, а саме

$$S^{(6)} = S_1^{(6)}(n;Q^*) + S_2^{(6)}(n;Q^*) , \tag{74}$$

де $S_1^{(6)}(n;Q^*)$ відрізняється від $S^{(6)}$ тим, що сумування у правій частині (11) розповсюджується на всі j, $j \in I$, такі, що

$$\Gamma_2^{(k)} \geq C_{\varepsilon n}^2, \tag{75}$$

де $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$, $\Gamma_2^{(k)}$ визначено рівностями (17)–(20) для $k = 1, 2, 3, 4$; $S_2^{(6)}(n;Q^*)$ — сума доданків з $S^{(6)}$, які не увійшли до $S_1^{(6)}(n;Q^*)$. Тоді беручи до уваги (2), (3), (13), (53) та (75), приходимо до оцінки

$$S_1^{(6)}(n;Q^*) \leq S_1^{(6)}(n;1)\, Q_1^*, \tag{76}$$

де $Q_1^* = \left(1 + 8n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))} \right)^{n+m_0}$.

Нерівність $S_1^{(6)}(n;1) \leq 9^n$ у поєднанні з (76) дає

$$S_1^{(6)}(n;Q^*) \leq a_{15} 9^n \left(1 + 8n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))} \right)^{n+m_0} . \tag{77}$$

Суму $S_2^{(6)}(n;Q^*)$ представимо у вигляді

$$S_2^{(6)}(n;Q^*) = \sum_{r=1}^{4} S_{2;\,r}^{(6)}(n;Q^*) , \tag{78}$$

де $S_{2;\,r}^{(6)}(n;Q^*)$ відрізняється від $S_2^{(6)}(n;Q^*)$ тим, що сумування у правій частині (11) відбувається за всіма параметрами j, $j \in I$ такими, що існують $l_1, \ldots, l_r \in \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$, для яких $\Gamma_2^{(l_h)} < C_{\varepsilon n}^2$, $\Gamma_2^{(k)} \geq C_{\varepsilon n}^2$, де $k \in \{ 1, 2, 3, 4 \} \backslash \{ l_1, \ldots, l_r \}$, $h = 1, \ldots, r$, $r = 1, 2, 3, 4$. Далі, для $r = 1, 2, 3, 4$ подамо $S_{2;\,r}^{(6)}(n;Q^*)$ у вигляді

$$S_{2;\,r}^{(6)}(n;Q^*) = \sum_{1 \leq t_1 < \ldots < t_r \leq 4} S_{2;\,r;\,t_1,\ldots,t_r}^{(6)}(n;Q^*) , \tag{79}$$

де $S^{(6)}_{2;\ r;\ t_1,\ldots,t_r}(n;Q^*)$ позначає суму усіх доданків, що належать $S^{(6)}_{2;\ r}(n;Q^*)$ та для яких $\Gamma_2^{(t_l)} < C^2_{\varepsilon n}$, $l=1,\ldots,r$, $\Gamma_2^{(t')} \geq C^2_{\varepsilon n}$, $t' \in \{\ 1,2,3,4\ \}\backslash\{\ t_1,\ldots,t_r\ \}$.

За допомогою (2), (3), (13), (53), (79) для $r=1$ отримуємо

$$S^{(6)}_{2;\ r}(n;Q^*) \leq S^{(6)}_{2;\ r}(n;1)\,Q^*_{2;\ r}, \tag{80}$$

де $Q^*_{2;\ r} = a_{16}3^n\left(1+2n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))}\right)^{n+m_0}$. У свою чергу, з урахуванням (79) для $r=1$

$$S^{(6)}_{2;\ r}(n;1) = \sum_{l=1}^{4} S^{(6)}_{2;\ r;\ l}(n;1)\,. \tag{81}$$

Далі дамо оцінку кожному з чотирьох доданків правої частини (81).

Оскільки із нерівності $\Gamma_2^{(1)} < C^2_{\varepsilon n}$ / $\Gamma_2^{(4)} < C^2_{\varepsilon n}$ / та співвідношення (17) /(20)/ випливає, що усі параметри $j \in I$, на які розповсюджується сумування за параметром t у правій частині (11), не перевищують εn, тобто $t < \varepsilon n$, тому приходимо до протиріччя з означенням інтервалу R_6^*, на якому задана сума $S^{(6)}(n;Q^*)$. Отже, суми $S^{(6)}_{2;\ 1;\ 1}(n;Q^*)$ та $S^{(6)}_{2;\ 1;\ 4}(n;Q^*)$ дорівнюють нулю у правій частині (81).

Щоб переконатися у справедливості нерівності

$$S^{(6)}_{2;\ 1;\ 2}(n;1) \leq \exp\{\sigma_3(\varepsilon)n\}2^n, \tag{82}$$

достатньо помітити що усі параметри $j \in I\backslash\{i_{10}, i_{20}\}$, на які розповсюджується сумування $\sum$ у правій частині (11), не перевищують εn згідно співвідношень $\Gamma_2^{(2)} < C^2_{\varepsilon n}$ та (18); тут також були використані поліноміальна теорема та нерівність $\sum\limits_{k=0}^{[\varepsilon n]} C_n^k \leq \exp\{\sigma_4(\varepsilon)n\}$.

Враховуючи (19), переконуємося, аналогічно (82), у тому, що

$$S^{(6)}_{2;\ 1;\ 3}(n;1) \leq \exp\{\sigma_5(\varepsilon)n\}2^n. \tag{83}$$

За допомогою (82) та (83) оцінимо $S^{(6)}_{2;\ 1}(n;\ 1)$ наступним чином:

$$S^{(6)}_{2;\ 1}(n;1) \leq a_{17}\exp\{\sigma_6(\varepsilon)n\}2^n. \tag{84}$$

Поєднуючи (80) та (84), приходимо до нерівності

$$S^{(6)}_{2;\ 1}(n;Q^*) \leq a_{18}3^n2^n\exp\{\sigma_7(\varepsilon)n\}\left(1+2n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))}\right)^{n+m_0}. \tag{85}$$

Перевіримо, що

$$S^{(6)}_{2;\ l}(n;Q^*) = 0, \tag{86}$$

$l=2,3,4$. Дійсно, з означень (17)–(20) параметрів $\Gamma_2^{(l)}$, $l=1,2,3,4$ та сум $S^{(6)}_{2;\ l}(n;Q^*)$, $l \geq 2$ випливає, що усі параметри $j \in I$, на які розповсюджується сумування $\sum$ у правій частині (11), не перевищують εn, тобто $t < \varepsilon n$, а отже маємо протиріччя з означенням інтервалу R_6^*, на якому задана сума $S^{(6)}_{2;\ l}(n;Q^*)$. Отже, має місце (86).

Для $S^{(6)}$ із (74), (77), (78) та (85) знаходимо

$$S^{(6)} \leq \omega(n), \tag{87}$$

де

$$\omega(n) = a_{19}\left(9^n\left(1+8n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))}\right)^{n+m_0} + e^{\sigma_7(\varepsilon)n}2^n3^n\left(1+2n^{-\frac{3}{2}\varepsilon^2 n(1+o(1))}\right)^{n+m_0}\right).$$

Поєднуючи (2), (65), (66), (68), (69), (71), (73) та (87), отримуємо (64) при $n \to \infty$. Із (62) та (64) випливає (56).

Таким чином, із того, що виконується (53), отримали нерівності (55) та (56), які разом із співвідношенням (32) дозволяють дійти висновку, що має місце (54), а це, у свою чергу, суперечить тому, що з ймовірністю 1 існує єдиний розв'язок $\bar{0}$ системи (1) при $n \to \infty$.

Необхідність доведена.

Теорему доведено.

1. *Масол В. І.* Про ймовірність єдиного розв'язку системи лінійних випадкових булевих рівнянь // Вісник Київського ун-ту. Сер. матем. і механіка. – 1988. – Вип. 30. – С. 58–62.
2. *Севастьянов Б.* Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 528 с.

Одержано 15.10.2008