УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачівський держ. ун-т)

ОБЕРНЕНИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ТІЛЕ

The Thiele type reciprocal continued fraction is investigated.

Досліджується обернений ланцюговий дріб типу Тіле.

Вступ. Задача розвинення функцій у ланцюговий дріб належить до важливих задач в теорії ланцюгових дробів, яка має крім теоретичного ще і практичне значення, оскільки такі розвинення можна використовувати для обчислення значень функцій на комп'ютері. В роботі [1] розглянута задача розвинення функцій в ланцюговий дріб Тіле. В цій же роботі розглянута історія питання.

Дана робота присвячена розвиненню функцій в обернений ланцюговий дріб типу Тіле. У роботі буде розглядатися задача наближення функцій однієї дійсної змінної ланцюговим дробом виду

$$D_n(x) = \frac{1}{b_0(x)} \, \underset{+}{} \, \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \, \underset{+}{} \, \frac{a_2(x)}{b_2(x)} \, \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \, \frac{a_n(x)}{b_n(x)} = \left(b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)} \right)^{-1}, \quad (1)$$

де $a_k(x), b_k(x) \in \mathbf{C}[\Omega]$, $a_k(x) \not\equiv 0$.

1. Обернений інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле. Нехай функція $f(x) \in \mathbf{C}[\Omega]$, де $\Omega \subset \mathbb{R}$— деякий компакт, та визначена своїми значеннями в точках множини

$$X = \{x_i : x_i \in \Omega,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Побудуємо інтерполяційний ланцюговий дріб (ІЛД) виду (1) за значеннями функції $f(x)$ в точках множини X. Для цього визначимо послідовність $\{v_k(x)\}$ наступними співвідношеннями

$$f(x) = v_0(x), \quad v_0(x) = \cfrac{1}{v_0(x_0) + \cfrac{x - x_0}{v_1(x)}}, \quad v_k(x) = v_k(x_k) + \frac{x - x_k}{v_{k+1}(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Вкладаючи елементи послідовності один в другий через $n+1$ крок отримаємо

$$f(x) = v_0(x) = \left(v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x)} \right)^{-1} = \left(v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x_1)} \, \underset{+}{} \, \frac{x - x_1}{v_2(x)} \right)^{-1} = \cdots =$$

$$= \left(v_0(x_0) + \frac{x - x_0}{v_1(x_1)} \, \underset{+}{} \, \frac{x - x_1}{v_2(x_2)} \, \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \, \frac{x - x_{n-1}}{v_n(x_n)} \, \underset{+}{} \, \frac{x - x_n}{v_{n+1}(x)} \right)^{-1}.$$

Позначимо через $b_k = v_k(x_k)$ та підставимо нуль замість $(x - x_n)/v_{n+1}(x)$, тоді отримаємо ІЛД виду ([2–4])

$$D_n(x; b_1, b_2, \ldots, b_n) = \frac{P_n(x; b_1, b_2, \ldots, b_n)}{Q_n(x; b_1, b_2, \ldots, b_n)} = \left(b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k} \right)^{-1}, \quad (2)$$

який можна розглядати як "обернений" ІЛД до ІЛД Тіле ([5–7]).

З умови

$$D_n(x_i) = y_i, \qquad \text{де} \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3}$$

для коефіцієнтів цього дробу можна отримати формули ([2–4])

$$b_0 = \frac{1}{y_0}, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} \; + \; \cdots \; + \; \frac{x_k - x_1}{-b_1} \; + \; \frac{x_k - x_0}{\dfrac{1}{y_k} - b_0}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Отримаємо тепер аналог формули Тіле ([8]) для ланцюгового дробу такого типу. Для цього скористаємося методикою, яка запропонована в [9].

Введемо в розгляд послідовність обернених поділених різниць 2–го типу наступним чином

$$\Phi_k[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - \Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}]}, \tag{5}$$

$\Phi_0[x] = 1/f(x)$, а тоді $b_k[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \Phi_k[x_0, x_1, \ldots, x_k], k = 0, 1, \ldots, n$.

Кожний коефіцієнт $b_k[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ ІЛД (2) залежить від інтерполяційних вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_k$ та значень функції $f(x)$ в цих вузлах. В той же час, коефіцієнт $b_k[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ є симетричною функцією тільки відносно двох останніх своїх аргументів x_{k-1} та x_k. Введемо в розгляд співвідношення вигляду

$$\rho_k[x_0, \ldots, x_k] = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k] + \Phi_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}] + \cdots + \Phi_{k-2[k/2]}[x_0, x_{k-2[k/2]}], \tag{6}$$

які будемо називати оберненими різницями 2–го типу. Легко бачити, що

$$\rho_1[x_0, x_1] = \frac{(x_1 - x_0)\, y_0\, y_1}{y_0 - y_1}$$

та

$$\rho_2[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_0\,(y_1 - y_2) + x_1\,(y_2 - y_0) + x_2\,(y_0 - y_1)}{x_0\, y_0\,(y_1 - y_2) + x_1\, y_1\,(y_2 - y_0) + x_2\, y_2\,(y_0 - y_1)}$$

симетричні відносно всіх своїх аргументів. Симетричність інших $\rho_k[x_0, \cdots, x_k]$, $k = 3, 4, \ldots, n$, буде доведена нижче.

Згідно із (6) маємо

$$b_k[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \rho_k[x_0, \ldots, x_k] - \rho_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}], \qquad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{7}$$

а тоді ІЛД (2) запишеться у вигляді

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \left(\rho_0 + \frac{x - x_0}{\rho_1} \; + \; \frac{x - x_1}{\rho_2 - \rho_0} \; + \; \cdots \; + \; \frac{x - x_{n-1}}{\rho_n - \rho_{n-2}}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Зауважимо, що $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = \rho_0$, $P_1(x) = \rho_1$, $Q_1(x) = \rho_0\,\rho_1 + x - x_0$. Скориставшись прямим рекурентним алгоритмом ([10]), легко показати, що

$$\begin{array}{rcll}
P_{2m}(x) & = & a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + x^m, & a_m = 1, \\
Q_{2m}(x) & = & b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \rho_{2m} \cdot x^m, & b_m = \rho_{2m}, \\
P_{2m+1}(x) & = & c_0 + c_1 \cdot x + \cdots + c_{m-1} \cdot x^{m-1} + \rho_{2m+1} \cdot x^m, & c_m = \rho_{2m+1}, \\
Q_{2m+1}(x) & = & d_0 + d_1 \cdot x + \cdots + d_m \cdot x^m + x^{m+1}, & d_{m+1} = 1,
\end{array}$$

де $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_m, c_0, \ldots, c_m, d_0, \ldots, d_{m+1}$ деякі коефіцієнти.

В силу того, що ланцюговий дріб (8) інтерполяційний, то виконуються співвідношення

$$y_k = D_n(x_k) = \frac{P_n(x_k)}{Q_n(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Розглянемо окремо два випадки: а) $n = 2m$; б) $n = 2m + 1$.

а) При $n = 2m$ отримуємо

$$a_0 + a_1 \cdot x_k + \cdots + a_{m-1} \cdot x_k^{m-1} + x_k^m = y_k(b_0 + b_1 \cdot x_k + \cdots + b_{m-1} \cdot x_k^{m-1} + b_m \cdot x_k^m)$$

для кожного $k = 0, 1, \ldots, n$. Або

$$\begin{cases} a_0 - y_0 b_0 + x_0 a_1 - x_0 y_0 b_1 + \cdots + x_0^{m-1} a_{m-1} - x_0^{m-1} y_0 b_{m-1} - x_0^m y_0 b_m = -x_0^m, \\ a_0 - y_1 b_0 + x_1 a_1 - x_1 y_1 b_1 + \cdots + x_1^{m-1} a_{m-1} - x_1^{m-1} y_1 b_{m-1} - x_1^m y_1 b_m = -x_1^m, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_0 - y_n b_0 + x_n a_1 - x_n y_n b_1 + \cdots + x_n^{m-1} a_{m-1} - x_n^{m-1} y_n b_{m-1} - x_n^m y_n b_m = -x_n^m. \end{cases}$$

Отримали систему з $2m+1$ лінійного алгебричного рівняння відносно $2m+1$ невідомого $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m$. Визначник системи

$$\Delta^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & -y_0 & x_0 & -x_0 y_0 & x_0^2 & -x_0^2 y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & -x_0^{m-1} y_0 & -x_0^m y_0 \\ 1 & -y_1 & x_1 & -x_1 y_1 & x_1^2 & -x_1^2 y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & -x_1^{m-1} y_1 & -x_1^m y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -y_n & x_n & -x_n y_n & x_n^2 & -x_n^2 y_n & \cdots & x_n^{m-1} & -x_n^{m-1} y_n & -x_n^m y_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0 y_0 & x_0^2 & x_0^2 y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1} y_0 & x_0^m y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1} y_1 & x_1^m y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n y_n & x_n^2 & x_n^2 y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1} y_n & x_n^m y_n \end{vmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta_1^{(e)} = (-1)^m \begin{vmatrix} x_0^m & y_0 & x_0 & x_0 y_0 & x_0^2 & x_0^2 y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1} y_0 & x_0^m y_0 \\ x_1^m & y_1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1} y_1 & x_1^m y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^m & y_n & x_n & x_n y_n & x_n^2 & x_n^2 y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1} y_n & x_n^m y_n \end{vmatrix}.$$

Виконавши послідовно $2m-1$ перестановку стовпців у цьому визначнику, отримаємо

$$\Delta_1^{(e)} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0 y_0 & x_0^2 & x_0^2 y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1} y_0 & x_0^m & x_0^m y_0 \\ y_1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & x_1^2 y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1} y_1 & x_1^m & x_1^m y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & x_n y_n & x_n^2 & x_n^2 y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1} y_n & x_n^m & x_n^m y_n \end{vmatrix}.$$

Далі, визначник

$$\Delta_2^{(e)} = (-1)^{m+1}\begin{vmatrix} 1 & x_0^m & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m\,y_0 \\ 1 & x_1^m & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^m & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1}\,y_n & x_n^m\,y_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m-1}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1}\,y_n & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix}.$$

В загальному випадку

$$\Delta_{2i+1}^{(e)} = (-1)^{m-1}\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{i-1}\,y_0 & x_0^i\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{i-1}\,y_1 & x_1^i\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & \cdots & x_n^{i-1}\,y_n & x_n^i\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix},$$

при $i = 1, 2, \cdots, m-1$,

$$\Delta_{2i+2}^{(e)} = (-1)^{m-1}\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^i & x_0^{i+1} & x_0^{i+1}\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^i & x_1^{i+1} & x_1^{i+1}\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & \cdots & x_n^i & x_n^{i+1} & x_n^{i+1}\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix},$$

при $i = 1, 2, \cdots, m-2$, і

$$\Delta_{2m}^{(e)} = (-1)^{m+1}\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^{m-1} & x_n^{m-1}\,y_n & x_n^m \end{vmatrix}.$$

Тоді $\rho_{2m}[x_0, x_1, \ldots, x_{2m}] = b_m$ буде рівне

$$\rho_{2m} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2m} & x_{2m} & x_{2m}\,y_{2m} & \cdots & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^{m-1}\,y_{2m} & x_{2m}^m \end{vmatrix} : \bar{\Delta}^{(e)}, \tag{9}$$

де

$$\bar{\Delta}^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2m} & x_{2m} & x_{2m}\,y_{2m} & \cdots & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^{m-1}\,y_{2m} & x_{2m}^m\,y_{2m} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Із формул (9)–(10) випливає, що обернена різниця 2-го типу $\rho_{2m}[x_0, x_1, \dots, x_{2m}]$ симетрична відносно всіх своїх аргументів.

Чисельник $P_{2m}(x)$ та знаменник $Q_{2m}(x)$ можуть бути записані у вигляді

$$P_{2m}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & \cdots & x^{m-1} & 0 & x^m & 0 \\ 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2m} & x_{2m} & x_{2m}\,y_{2m} & \cdots & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^{m-1}\,y_{2m} & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^m\,y_{2m} \end{vmatrix} : \bar{\Delta}^{(e)},$$

$$Q_{2m}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & \cdots & 0 & x^{m-1} & 0 & x^m \\ 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1} & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1} & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{2m} & x_{2m} & x_{2m}\,y_{2m} & \cdots & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^{m-1}\,y_{2m} & x_{2m}^{m-1} & x_{2m}^m\,y_{2m} \end{vmatrix} : \bar{\Delta}^{(e)}.$$

б) При $n = 2m + 1$ аналогічно отримуємо

$$c_0 + c_1 \cdot x_k + \dots + c_{m-1} \cdot x_k^{m-1} + c_m \cdot x_k^m = y_k (d_0 + d_1 \cdot x_k + \dots + d_{m-1} \cdot x_k^{m-1} + d_m \cdot x_k^m + x_k^{m+1})$$

для кожного $k = 0, 1, \dots, n$. Або у вигляді системи

$$\begin{cases} c_0 - y_0 d_0 + x_0 c_1 - x_0 y_0 d_1 + \cdots + x_0^m c_m - x_0^m y_0 d_m = x_0^{m+1} y_0, \\ c_0 - y_1 d_0 + x_1 c_1 - x_1 y_1 d_1 + \cdots + x_1^m c_m - x_1^m y_1 d_m = x_1^{m+1} y_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_0 - y_n d_0 + x_n c_1 - x_n y_n d_1 + \cdots + x_n^m c_m - x_n^m y_n d_m = x_n^{m+1} y_n . \end{cases}$$

Знову отримали систему з $2m + 2$ лінійних алгебричних рівнянь відносно $2m + 2$ невідомих $c_0, c_1, \dots, c_m, d_0, d_1, \dots, d_m$. Визначник системи

$$\Delta^{(o)} = \begin{vmatrix} 1 & -y_0 & x_0 & -x_0\,y_0 & x_0^2 & -x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & -x_0^m\,y_0 \\ 1 & -y_1 & x_1 & -x_1\,y_1 & x_1^2 & -x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & -x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -y_n & x_n & -x_n\,y_n & x_n^2 & -x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^m & -x_n^m\,y_n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix}.$$

Визначник

$$\Delta_1^{(o)} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} x_0^{m+1}\,y_0 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ x_1^{m+1}\,y_1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^{m+1}\,y_m & y_n & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix}.$$

Виконавши послідовно $2m+1$ перестановку стовпців, отримаємо

$$\Delta_1^{(o)} = (-1)^m \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 & x_0^{m+1}\,y_0 \\ y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 & x_1^{m+1}\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n & x_n^{m+1}\,y_n \end{vmatrix}.$$

Далі, визначник

$$\Delta_2^{(o)} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 & x_0^{m+1}\,y_0 \\ 1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 & x_1^{m+1}\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n & x_n^{m+1}y_n \end{vmatrix}.$$

В загальному випадку при $i = 1, 2, \cdots, m$

$$\Delta_{2i+1}^{(o)} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^{i-1}y_0 & x_0^iy_0 & \cdots & x_0^m & x_0^my_0 & x_0^{m+1}y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1^{i-1}y_1 & x_1^iy_1 & \cdots & x_1^m & x_1^my_1 & x_1^{m+1}y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_ny_n & \cdots & x_n^{i-1}y_n & x_n^iy_n & \cdots & x_n^m & x_n^my_n & x_n^{m+1}y_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2i+2}^{(o)} = (-1)^{m+1} \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^i & x_0^{i+1} & x_0^{i+1}\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^i & x_1^{i+1} & x_1^{i+1}\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & \cdots & x_n^i & x_n^{i+1} & x_n^{i+1}\,y_n & \cdots & x_n^m & x_n^m\,y_n \end{vmatrix}.$$

Зокрема

$$\Delta_{2m+1}^{(o)} = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m\,y_0 & x_0^{m+1}\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m\,y_1 & x_1^{m+1}\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n\,y_n & x_n^2 & x_n^2\,y_n & \cdots & x_n^{m-1}\,y_n & x_n^m\,y_n & x_n^{m+1}\,y_n \end{vmatrix},$$

а тоді $\rho_{2m+1}[x_0, x_1, \ldots, x_{2m+1}] = c_m$ буде рівне

$$\rho_{2m+1} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & \cdots & x_0^{m-1}\,y_0 & x_0^m\,y_0 & x_0^{m+1}\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & \cdots & x_1^{m-1}\,y_1 & x_1^m\,y_1 & x_1^{m+1}\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_s & x_s & x_s\,y_s & \cdots & x_s^{m-1}\,y_s & x_s^m\,y_s & x_s^{m+1}\,y_s \end{vmatrix} : (-\bar{\Delta}^{(o)})\,, \qquad (11)$$

де

$$\bar{\Delta}^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0 & x_0\,y_0 & x_0^2 & x_0^2\,y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\,y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\,y_1 & x_1^2 & x_1^2\,y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\,y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_s & x_s & x_s\,y_s & x_s^2 & x_s^2\,y_s & \cdots & x_s^m & x_s^m\,y_s \end{vmatrix}, \qquad s = 2m+1\,. \qquad (12)$$

Із формул (11)–(12) випливає, що обернена різниця 2-го типу $\rho_{2m+1}[x_0, \ldots, x_{2m+1}]$ також симетрична відносно всіх своїх аргументів. Чисельник $P_{2m+1}(x)$ та знаменник $Q_{2m+1}(x)$ можуть бути записані у вигляді

$$P_{2m+1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 & \cdots & x^m & 0 & 0 \\ 1 & y_0 & x_0 & x_0\, y_0 & \cdots & x_0^m & x_0^m\, y_0 & x_0^{m+1}\, y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\, y_1 & \cdots & x_1^m & x_1^m\, y_1 & x_1^{m+1}\, y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_s & x_s & x_s\, y_s & \cdots & x_s^m & x_s^m\, y_s & x_s^{m+1}\, y_s \end{vmatrix} : (-\bar{\Delta}^{(o)})\,,$$

$$Q_{2m+1}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & x & \cdots & x^m & 0 \\ 1 & y_0 & x_0 & x_0\, y_0 & \cdots & x_0^m\, y_0 & x_0^{m+1}\, y_0 \\ 1 & y_1 & x_1 & x_1\, y_1 & \cdots & x_1^m\, y_1 & x_1^{m+1}\, y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_s & x_s & x_s\, y_s & \cdots & x_s^m\, y_s & x_s^{m+1}\, y_s \end{vmatrix} : (-\bar{\Delta}^{(o)})\,,$$

До цього часу робилися припущення, що вузли інтерполяції, $x_i, i = 0, \ldots, n$, усі різні. Перейдемо тепер до граничного випадку, тобто коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення. Граничне значення $\rho_k[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, коли всі вузли прямують до x, назвемо оберненою похідною 2–го типу і позначимо через ${}^{[k]}f(x)$, тобто

$${}^{[k]}f(x) = \rho_k[\underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}] = \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_k \to x} \rho_k[x_0, x_1, \ldots, x_k].$$

З (11) та (12) при $m = 0$ маємо

$${}^{[1]}f(x) = \rho_1[x, x] = -\lim_{x_0, x_1 \to x} \frac{\begin{vmatrix} f(x_0) & f(x_0)\, x_0 \\ f(x_1) & f(x_1)\, x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\begin{vmatrix} f(x) & f(x)\, x \\ f(x+h) & f(x+h)\,(x+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & f(x+h) \end{vmatrix}} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x) f(x+h) \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & f(x+h) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x)\, f(x+h) \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 0 & \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{vmatrix}} = -\frac{f^2(x)}{f'(x)}.$$

З формул (9) та (10) при $m=1$ отримуємо, що

$$
{}^{[2]}f(x)=\rho_2[x,x,x]=\lim_{x_0,x_1,x_2\to x}\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x_0) & x_0\\ 1 & f(x_1) & x_1\\ 1 & f(x_2) & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x_0) & f(x_0)\,x_0\\ 1 & f(x_1) & f(x_1)\,x_1\\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2\end{vmatrix}}=
$$

$$
=\lim_{\substack{h\to 0\\ x_2\to x}}\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 1 & f(x+h) & x+h\\ 1 & f(x_2) & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & f(x)\,x\\ 1 & f(x+h) & f(x+h)\,(x+h)\\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2\end{vmatrix}}=
$$

$$
=\lim_{x_2\to x}\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 0 & f'(x) & 1\\ 1 & f(x_2) & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & f(x)\,x\\ 0 & f'(x) & x\,f'(x)+f(x)\\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2\end{vmatrix}}=\lim_{h\to 0}\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 0 & f'(x) & 1\\ 1 & f(x+h) & x+h\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & f(x)\,x\\ 0 & f'(x) & x\,f'(x)+f(x)\\ 1 & f(x+h) & f(x+h)(x+h)\end{vmatrix}}=
$$

$$
=\lim_{h\to 0}\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 0 & f'(x) & 1\\ 0 & f(x+h)-f(x)-h\,f'(x) & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & f(x)\,x\\ 0 & f'(x) & x\,f'(x)+f(x)\\ 0 & \begin{matrix}f(x+h)-f(x)-\\ -h\,f'(x)\end{matrix} & \begin{matrix}x(f(x+h)-f(x)-h\,f'(x))+\\ +h(f(x+h)-f(x))\end{matrix}\end{vmatrix}}=
$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 0 & f'(x) & 1\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & f(x)\,x\\ 0 & f'(x) & x\,f'(x)+f(x)\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & f(x) & x\\ 0 & f'(x) & 1\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & f(x) & 0\\ 0 & f'(x) & f(x)\\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & f'(x)\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}f'(x) & 1\\ \dfrac{f''(x)}{2!} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f'(x) & f(x)\\ \dfrac{f''(x)}{2!} & f'(x)\end{vmatrix}}=
$$

$$
=\frac{f''(x)}{f(x)f''(x)-2(f'(x))^2}\,.
$$

Аналогічно з формул (11) та (12) при $m = 1$ отримуємо

$$ {}^{[3]}f(x) = \rho_3[x,x,x,x] = -\lim_{x_0,\cdots,x_3\to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & f(x_0)\,x_0 & f(x_0)\,x_0^2 \\ 1 & f(x_1) & f(x_1)\,x_1 & f(x_1)\,x_1^2 \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2 & f(x_2)\,x_2^2 \\ 1 & f(x_3) & f(x_3)\,x_3 & f(x_3)\,x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & x_0 & f(x_0)\,x_0 \\ 1 & f(x_1) & x_1 & f(x_1)\,x_1 \\ 1 & f(x_2) & x_2 & f(x_2)\,x_2 \\ 1 & f(x_3) & x_0 & f(x_3)\,x_3 \end{vmatrix}} = $$

$$ = -\lim_{\substack{h\to 0 \\ x_2,x_3\to x}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 1 & f(x+h) & f(x+h)\,(x+h) & f(x+h)\,(x+h)^2 \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2 & f(x_2)\,x_2^2 \\ 1 & f(x_3) & f(x_3)\,x_3 & f(x_3)\,x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 1 & f(x+h) & x+h & f(x+h)\,(x+h) \\ 1 & f(x_2) & x_2 & f(x_2)\,x_2 \\ 1 & f(x_3) & x_3 & f(x_3)\,x_3 \end{vmatrix}} = $$

$$ = -\lim_{x_2,x_3\to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x) \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)\,x_2 & f(x_2)\,x_2^2 \\ 1 & f(x_3) & f(x_3)\,x_3 & f(x_3)\,x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x) \\ 1 & f(x_2) & x_2 & f(x_2)\,x_2 \\ 1 & f(x_3) & x_3 & f(x_3)\,x_3 \end{vmatrix}} = $$

$$ = -\lim_{\substack{h\to 0 \\ x_3\to x}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x) \\ 1 & f(x+h) & f(x+h)\,(x+h) & f(x+h)\,(x+h)^2 \\ 1 & f(x_3) & f(x_3)\,x_3 & f(x_3)\,x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x) \\ 1 & f(x+h) & x+h & f(x+h)\,(x+h) \\ 1 & f(x_3) & x_3 & f(x_3)\,x_3 \end{vmatrix}} = $$

$$ = -\lim_{x_3\to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) & x^2\dfrac{f''(x)}{2!}+2xf'(x)+f(x) \\ 1 & f(x_3) & f(x_3)\,x_3 & f(x_3)\,x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0 & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) \\ 1 & f(x_3) & x_3 & f(x_3)\,x_3 \end{vmatrix}} = $$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) & x^2\dfrac{f''(x)}{2!}+2xf'(x)+f(x) \\ 1 & f(x+h) & f(x+h)\,(x+h) & f(x+h)\,(x+h)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0 & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) \\ 1 & f(x+h) & x+h & f(x+h)\,(x+h) \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)\,x & f(x)\,x^2 \\ 0 & f'(x) & xf'(x)+f(x) & x^2f'(x)+2xf(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) & x^2\dfrac{f''(x)}{2!}+2xf'(x)+f(x) \\ 0 & \dfrac{f'''(x)}{3!} & x\dfrac{f'''(x)}{3!}+\dfrac{f''(x)}{2!} & x^2\dfrac{f'''(x)}{3!}+2x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & f(x)\,x \\ 0 & f'(x) & 1 & xf'(x)+f(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0 & x\dfrac{f''(x)}{2!}+f'(x) \\ 0 & \dfrac{f'''(x)}{3!} & 0 & x\dfrac{f'''(x)}{3!}+\dfrac{f''(x)}{2!} \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & 0 & 0 \\ 0 & f'(x) & f(x) & 0 \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & f'(x) & f(x) \\ 0 & \dfrac{f'''(x)}{3!} & \dfrac{f''(x)}{2!} & f'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & x & 0 \\ 0 & f'(x) & 1 & f(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & 0 & f'(x) \\ 0 & \dfrac{f'''(x)}{3!} & 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} \end{vmatrix}} = \frac{(f'(x))^3 + f^2(x)\frac{f'''(x)}{3!} - f(x)f'(x)f''(x)}{\left(\frac{f''(x)}{2!}\right)^2 - f'(x)\frac{f'''(x)}{3!}}.$$

Визначимо рекурентне співвідношення для обчислення обернених похідних 2–го типу. З (5) та (7) випливає, що

$$\rho_k[x_0,\dots,x_k] - \rho_{k-2}[x_0,\dots,x_{k-2}] = \frac{x_k - x_{k-1}}{\rho_{k-1}[x_0,\dots,x_{k-2},x_k] - \rho_{k-1}[x_0,\dots,x_{k-1}]}.$$

Нехай в останньому співвідношенні $x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = x$, а $x_k = y$. Тоді

$$\frac{\rho_{k-1}[x,\dots,x,x] - \rho_{k-1}[x,\dots,x,y]}{x-y} = \frac{1}{\rho_k[x,\dots,x,y] - \rho_{k-2}[x,\dots,x,x]}.$$

Аналогічно можна отримати

$$\frac{\rho_{k-1}[x,\dots,x,y] - \rho_{k-1}[x,\dots,x,y,y]}{x-y} = \frac{1}{\rho_k[x,\dots,x,y,y] - \rho_{k-2}[x,\dots,x,y]},$$

$$\frac{\rho_{k-1}[x,\ldots,x,y,y]-\rho_{k-1}[x,\ldots,x,y,y,y]}{x-y}=\frac{1}{\rho_k[x,\ldots,x,y,y,y]-\rho_{k-2}[x,\ldots,x,y,y]},$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\frac{\rho_{k-1}[x,y\ldots,y]-\rho_{k-1}[y,\ldots,y]}{x-y}=\frac{1}{\rho_k[x,y,\ldots,y]-\rho_{k-2}[y,\ldots,y]}.$$

Додавши k співвідношень та перейшовши до границі при y прямуючому до x, отримуємо

$$\lim_{y\to x}\frac{\rho_{k-1}[x,x,\ldots,x]-\rho_{k-1}[y,y,\ldots,y]}{x-y}=\frac{k}{{}^{[k]}f(x)-{}^{[k-2]}f(x)},$$

$$\frac{1}{\backprime({}^{[k-1]}f(x))}=\frac{k}{{}^{[k]}f(x)-{}^{[k-2]}f(x)}.$$

Кінцеве отримуємо наступне рекурентне співвідношення для знаходження обернених похідних 2–го типу

$${}^{[k]}f(x)=k\cdot\backprime\big({}^{[k-1]}f(x)\big)+{}^{[k-2]}f(x). \tag{13}$$

Тоді з (7) маємо

$$b_k(x)=\lim_{x_0,\ldots,x_k\to x}b_k(x_0,x_1,\ldots,x_k)=k\backprime({}^{[k-1]}f(x)).$$

Зробивши припущення, що граничні переходи можливі, отримуємо наступний розвиток функції $f(x)$ в ланцюговий дріб в околі точки x_*

$$f(x)=\left(\frac{1}{f(x_*)}+\frac{x-x_*}{{}^{[1]}f(x_*)}\;+\;\frac{x-x_*}{2\backprime({}^{[1]}f(x_*))}\;+\;\cdots\;+\;\frac{x-x_*}{n\backprime({}^{[n-1]}f(x_*))}\;+\;\cdots\right)^{-1}.$$

Отримаємо розвитки деяких елементарних функцій в ланцюговий дріб такого вигляду. Щоб отримати розвинення функції $y=e^x$, доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Функція $y=e^x$ має обернені похідні 2–го типу довільного порядку і вони обчислюються за допомогою наступних формул*

$${}^{[2n]}\,e^x=(-1)^n e^{-x},\qquad {}^{[2n+1]}\,e^x=(-1)^{n+1}\,(n+1)\,e^x. \tag{14}$$

Доведення. Для доведення твердження теореми скористаємося методом повної математичної індукції. Легко бачити, що

$${}^{[0]}e^x=e^{-x},\quad {}^{[1]}e^x=-e^x,\quad {}^{[2]}e^x=-e^{-x},\quad {}^{[3]}e^x=2\,e^x\,,$$

тобто при $n=0,1$ формули мають місце. Припустимо, що вони виконуються при $n=k$. Тоді із формули (13) при $n=k+1$ отримуємо

$${}^{[2(k+1)]}e^x=2(k+1)\cdot\backprime\big({}^{[2k+1]}e^x\big)+{}^{[2k]}e^x=\frac{2(k+1)}{(-1)^{k+1}\cdot(k+1)\cdot e^x}+(-1)^k\cdot e^{-x}=$$
$$=(-1)^{k+1}\cdot e^{-x}\,.$$

$${}^{[2(k+1)+1]}e^x=(2k+3)\cdot\backprime\big({}^{[2k+2]}e^x\big)+{}^{[2k+1]}e^x=\frac{2k+3)}{(-1)^{k+2}\cdot e^{-x}}+(-1)^{k+1}\cdot(k+1)\cdot e^x=$$
$$=(-1)^{k+2}\cdot(k+2)\cdot e^x\,.$$

Отже, формула виконується і в цьому випадку.

Із доведеної теореми 1 випливає, що

$$ {}^{[0]}(e^x) = e^{-x}, \quad {}^{[1]}(e^x) = -e^x, \quad {}^{[2n]}(e^x) - {}^{[2n-2]}(e^x) = (-1)^n \, 2e^{-x}, $$

$$ {}^{[2n+1]}(e^x) - {}^{[2n-1]}(e^x) = (-1)^{n+1} \, (2n+1)e^x, \qquad n = 1, 2, \cdots . $$

Розвиток функції $y = e^x$ в обернений ланцюговий дріб Тіле в околі нуля має вигляд

$$ e^x = \frac{1}{1} + \frac{x}{-1} + \frac{x}{-2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{-5} + \frac{x}{-2} + \ \cdots \ + $$

$$ + \frac{x}{(-1)^n 2} + \frac{x}{(-1)^{n+1}(2n+1)} + \ \cdots \ . \tag{15} $$

Цей розвиток збігається із відомим розвитком функції $y = e^x$ в обернений ланцюговий дріб [11, 12], але отриманий він іншим способом ніж в [11].

Для функції $y = (c + x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$, $c = const$, доведемо наступне твердження.

Теорема 2. *Функція $y = (c+x)^\alpha$ має обернені похідні 2–го типу довільного порядку і вони обчислюються за наступними формулами*

$$ {}^{[2n]}\,(c + x)^\alpha = (-1)^n \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n)} (c + x)^{-\alpha}, \tag{16} $$

$$ {}^{[2n+1]}\,(c + x)^\alpha = (-1)^{n+1} \, \frac{(n + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n + 1)}{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n)} (c + x)^{\alpha+1}. \tag{17} $$

Доведення. Для доведення знову скористаємося методом повної математичної індукції. Із означення оберненої похідної 2–го типу та формули (13) маємо, що

$$ {}^{[0]}\,(c + x)^\alpha = (c + x)^{-\alpha}, \ {}^{[1]}\,(c + x)^\alpha = \frac{-1}{\alpha}(c + x)^{\alpha+1}, \ {}^{[2]}\,(c + x)^\alpha = -\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}(c + x)^{-\alpha}, $$

$$ {}^{[3]}\,(c + x)^\alpha = \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha - 1)}(c + x)^{\alpha+1}, \ {}^{[4]}\,(c + x)^\alpha = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}(c + x)^{-\alpha}, $$

$$ {}^{[5]}\,(c + x)^\alpha = -\frac{3(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}(c + x)^{\alpha+1} \, . $$

Отже, при $n = 0, 1, 2$ формули (16) та (17) виконуються. Зробимо припущення, що вони мають місце при $n = k$. Тоді при $n = k + 1$ із формули (13) маємо

$$ {}^{[2(k+1)]}\,(c + x)^\alpha = (-1)^{k+1} \frac{2(k + 1)\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - k)}{(k + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + k + 1)(c + x)^\alpha} + $$

$$ + (-1)^k \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - k)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + k)}(c + x)^{-\alpha} = $$

$$ = (-1)^{k+1} \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - k - 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + k + 1)}(c + x)^{-\alpha} \ , $$

і

$$^{[2(k+1)+1]}(c+x)^{\alpha} = (-1)^{k+2}\frac{(2k+3)(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k-1)}(c+x)^{\alpha+1}+$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{(k+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k)}(c+x)^{\alpha+1} =$$

$$= (-1)^{k+2}\frac{(k+2)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k+2)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k-1)}(c+x)^{\alpha+1}.$$

Отже, і в цьому випадку формули (16) і (17) виконуються. А тоді вони виконуються при довільному n.

Коефіцієнти розвитку функції $y=(1+x)^{\alpha}$ в околі точки $x=0$ в обернений ланцюговий дріб Тіле будуть рівні

$$^{[0]}(1+x)^{\alpha} = 1,\ ^{[1]}(1+x)^{\alpha} = -\frac{1}{k},$$

$$^{[2n]}(1+x)^{\alpha} - {}^{[2n-2]}(1+x)^{\alpha} = (-1)^{n}\frac{2\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)},$$

$$^{[2n+1]}(1+x)^{\alpha} - {}^{[2n-1]}(1+x)^{\alpha} = (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}.$$

Із тереми 2 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. *Обернена похідна $2n$–го порядку, $n\in\mathbb{N}$, функції $y=(c+x)^{n}$ дорівнює нулеві.*

Наслідок 2. *Обернена похідна $2n-1$–го порядку $n\in\mathbb{N}$, функції $y=(c+x)^{-n}$ дорівнює нулеві.*

Наслідок 3. *Обернена похідна 2–го типу n–го порядку функції $y=\sqrt{c+x}$ визначаєтьcя за формулою*

$$^{[2k]}\left(\sqrt{c+x}\,\right) = \frac{1}{(2k+1)\sqrt{c+x}}, \qquad \text{коли} \quad n=2k,$$

$$^{[2k+1]}\left(\sqrt{c+x}\,\right) = -\frac{2(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}(\sqrt{c+x})^{3}, \qquad \text{коли} \quad n=2k+1\,.$$

Наслідок 4. *Обернена похідна 2–го типу n–го порядку функції $y=\frac{1}{\sqrt{c+x}}$ визначаєтьcя за формулою*

$$^{[n]}\left(1/\sqrt{c+x}\right) = (n+1)\sqrt{c+x}\,.$$

Із наслідку 4 маємо, що

$$^{[0]}(1/\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+x}, \quad ^{[1]}(1/\sqrt{1+x}) = 2\sqrt{1+x},$$

$$^{[n]}(1/\sqrt{1+x}) - {}^{[n-2]}(1/\sqrt{1+x}) = 2\sqrt{1+x}\,, \qquad n=2,3,\cdots.$$

А тоді отримуємо наступний розвиток функції $y=1/\sqrt{1+x}$ в околі точки $x=0$ в обернений ланцюговий дріб Тіле

$$1/\sqrt{1+x} = \frac{1}{1}\,{+}\,\frac{x}{2}\,{+}\,\frac{x}{2}\,{+}\,\cdots\,{+}\,\frac{x}{2}\,{+}\,\cdots\,.$$

Висновки. В даній роботі введено нове означення оберненої похідної, так звана обернена похідна 2–го типу, і отримано аналог формули Т.Н. Тіле для обернених ланцюгових дробів. Встановлені деякі властивості таких обернених похідних і отримані розвитки деяких елементарних функцій у вигляді обернених ланцюгових дробів. Аналогічно можна отримати розвитки інших функцій в такий ланцюговий дріб. Запропонований тут спосіб не вимагає використання основного диференціального рівняння чи подання функції через гіпергеометричні функції або відношення гіпергеометричних функцій.

1. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвитки деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 107–116.
2. *Пагіря М. М.* Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень. Зб. наук. праць.– Т. 1. – Київ, Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2001. – С. 328–333.
3. *Pahirya M.* Interpolation Function of Non–Thiele Continued Fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2002. – Vol. X, Summer 2002. – P. 59–62.
4. *Пагіря М. М.* Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. **46**, № 4. – С. 57–64.
5. *Pahirya M.M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX, Summer 2001. – P. 21–29.
6. *Пагіря М.М.* Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 77–87.
7. *Pahirya M.* The Problem of Interpolation Function of Thiele Continued Fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2007. – Vol. XV, Summer 2007. – P. 34–39.
8. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 s.
9. *Nörlund N.E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, J. Springer, 1924. – 551 s.
10. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
11. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
12. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. – Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992. – 606 p.

Одержано 15.10.2008