УДК 517.987.1

М. Т. Таращанський, Н. Ю. Щестюк (Східноукраїнський нац. ун-т ім. В. Даля)

ПРО НЕЗАЛЕЖНЕ ДОПОВНЕННЯ У ЙМОВІРНІСНОМУ ПРОСТОРІ

Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space and $\mathcal{B}$ a subalgebra of $\mathcal{A}$. Sufficient conditions for existence of an P-compliment and P-independence compliment for $\mathcal{B}$ are given.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ імовірнісний простір та $\mathcal{B}$ підалгебра алгебри $\mathcal{A}$. Наведено достатні умови, що забезпечують існування P-доповнення та P-незалежного доповнення для алгебри $\mathcal{B}$.

Вступ. Дослідження проблеми існування P-незалежного доповнення було започатковано у роботі В. А. Рохліна [1]. Нагадаємо визначення P-незалежного доповнення до деякої алгебри у ймовірнісному просторі. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ймовірнісний простір, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — σ-підалгебра σ-алгебри $\mathcal{A}$ та $\mathcal{I}$ — σ-ідеал всіх таких $A \in \mathcal{A}$, що $P(A) = 0$. Для будь-якої множини $\mathcal{D} \subset 2^{\Omega}$ символом $\langle \mathcal{D} \rangle$ позначимо алгебру, породжену множиною $\mathcal{D}$. Нехай $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ — дві підалгебри алгебри $\mathfrak{A}$. Говоритимемо, що алгебра $\mathcal{C}$ є P-доповненням до алгебри $\mathcal{B}$ у алгебрі $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \subset \langle \mathcal{I} \rangle$ та $\langle \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \rangle = \mathcal{A}$. Якщо, до того ж $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ для будь-яких $B \in \mathcal{B}$ та $C \in \mathcal{C}$, то алгебра $\mathcal{C}$ називається P-незалежним доповненням алгебри $\mathcal{B}$.

Вивчення проблеми існування P-незалежного доповнення було продовжено у роботах [2,3]. Для випадку сепарабельної σ-алгебри $\mathcal{A}$ та досконалої ймовірності P в [3] було отримано необхідну та достатню умову існування незалежного доповнення. Аналогічні питання було розглянуто у недавніх роботах [4,5].

Проте ні вимоги досконалості ймовірності P, ні вимоги сепарабельності алгебри $\mathcal{A}$ не є істотними для існування P-незалежного доповнення алгебри $\mathcal{B}$. Тому заслуговує на увагу побудова P-незалежного доповнення у ситуаціях, що відмінні від розглянутих у згаданих роботах. Самостійний інтерес має питання існування P-незалежного доповнення до алгебри $\mathcal{B}$.

У цій роботі буде наведено достатню умову, що забезпечує існування P-доповнення алгебри $\mathcal{B}$ у алгебрі $\mathcal{A}$ та застосування цього результату до проблеми існування P-незалежного доповнення.

Основні означення та позначення. Скрізь надалі $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — імовірнісний простір , $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — підалгебра алгебри $\mathcal{A}$ та μ — звуження ймовірності P на підалгебру $\mathcal{B}$.

Позначимо через $S_{\mu}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ множину всіх продовжень міри μ з алгебри $\mathcal{B}$ на алгебру $\mathcal{A}$ та через $\mathrm{ex}S_{\mu}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — множину всіх його екстремальних точок, яку називатимемо екстремальним продовженням ймовірності μ. Нехай, далі $\mathrm{ex}S_{\mu}^{\sigma}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — множина всіх σ-адитивних екстремальних продовжень.

Для $A, B \in \mathcal{A}$ символом $A \Delta B$ позначатимемо симетричну різницю елементів $A, B \in \mathcal{A}$, тобто $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, де $\bar{A}$ — доповнення елемента A в алгебрі $\mathcal{A}$.

Алгебра $\mathcal{B}^*$, породжена алгеброю $\mathcal{B}$ та елементом $A \in \mathcal{A}$, $A \notin \mathcal{B}$ складається з усіх елементів $A^* \in \mathfrak{A}$, які можуть бути зображені у вигляді

$$A^* = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap \bar{A}), \; B_1, B_2 \in \mathcal{B},$$

що випливає з того, що об'єднання та доповнення елементів такого вигляду є елементами такого ж вигляду.

Міра μ називається двозначною, якщо $\mu(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$ та — строго додатною, якщо $\mu(B) > 0$ для будь-якого $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}$.

Постановка задачі. Почнемо з простого прикладу, який показує, що жодна з вимог: ні вимога досконалості ймовірності P, ні вимога сепарабельності алгебри $\mathcal{A}$ не є обов'язковою для існування незалежного доповнення алгебри $\mathcal{B}$.

Приклад 1. *Нехай $\mathcal{B}$ — довільна σ-алгебра, μ — імовірнісна міра, що визначена на $\mathcal{B}$ і не є повною. Нехай, далі $\mathcal{A}$ — поповнення σ-алгебри $\mathcal{B}$ за мірою μ та $\bar{\mu}$ — канонічне продовження міри μ на σ-алгебру $\mathcal{A}$. Покладемо $\mathcal{C} = \langle \bar{\mu}^{-1}(0) \rangle$. Тоді звуження міри $\bar{\mu}$ на $\mathcal{C}$ є двозначною мірою. До того ж, зрозуміло, що алгебра $\mathcal{C}$ є P-доповненням до алгебри $\mathcal{B}$. Покажемо, що це доповнення P-незалежне. Розглянемо два випадки. Нехай $C \in \mathcal{C}$. Тоді або $\bar{\mu}(C) = 0$, або $\bar{\mu}(C) = 1$. Якщо $\bar{\mu}(C) = 0$, тоді для будь-якого $B \in \mathcal{B}$ маємо $\bar{\mu}(B \cap C) \leq \bar{\mu}(B) = 0$, отже $\bar{\mu}(B \cap C) = \bar{\mu}(B)\bar{\mu}(C)$. Якщо $\bar{\mu}(C) = 1$, тоді $\bar{\mu}(\bar{C} \cap B) = 0$ і тому*

$$\bar{\mu}(B \cap C) = \bar{\mu}(B \cap C) + \bar{\mu}(\bar{C} \cap B) = \bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(B)\bar{\mu}(C).$$

Аналогічними міркуваннями можна показати, що коли міра μ двозначна, то вся алгебра $\mathcal{A}$ є P-незалежним доповненям до підалгебри $\mathcal{B}$. Проте, не для будь-якого імовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ та не для будь-якої підалгебри $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ існує P-незалежне доповнення.

Приклад 2. *Нехай $A = \{a, b\}$, $\mathcal{B}$ — алгебра всіх підмножин на множині $\Omega = A \times A$, $\mathcal{A}$ — алгебра всіх підмножин на Ω та ймовірність P визначена рівностями $P(\{a,a\}) = P(\{b,b\}) = 1/2\alpha$, $P(\{a,b\}) = P(\{b,a\}) = 1/2(1-\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$. Нехай π_i, $i = 1, 2$ проекції декартової множини $A \times A$ на перший та другий множники, відповідно. Ототожнимо алгебру $\mathcal{B}$ з її ізоморфним образом $\pi_1^{-1}(\mathcal{B})$ в алгебрі $\mathcal{A}$. Тоді звуження ймовірності P на підалгебру $\pi_1^{-1}(\mathcal{B})$ визначається рівностями $\mu(\{a,a\} \cup \{a,b\}) = \mu(\{b,a\} \cup \{b,b\}) = 1/2$. Алгебра $\pi_2^{-1}(\mathcal{B})$ є P-доповненням алгебри $\pi_1^{-1}(\mathcal{B})$ в алгебрі $\mathcal{A}$, але не існує P-незалежного доповнення алгебри $\pi_1^{-1}(\mathcal{B})$.*

Нарешті, можна навести приклади таких підалгебр $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ у ймовірнісному просторі, які не мають P-доповнення.

Приклад 3. *Нехай Ω — зліченна множина, $\mathcal{A}$ — алгебра всіх підмножин, $\mathcal{B}$ — алгебра, породжена скінченними підмножинами, та ймовірність P визначена рівностями $P(\{\omega_n\}) = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Покажемо, що не існує P-доповнення до алгебри $\mathcal{B}$. Припустимо протилежне, тобто нехай існує деяке $\mathcal{C}$ — P-доповнення до алгебри $\mathcal{B}$. Оскільки міра μ строго додатна, то $\mathcal{C} \cap \mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, що суперечить теоремі 2.8 з [6].*

Зауваження 1. *Невідомо чи існує P-доповнення до будь-якої σ-підалгебри $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.*

У зв'язку з розглянутими прикладами постає задача опису таких підалгебр $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, які мають P-доповнення в алгебрі $\mathcal{A}$ та дослідження таких умов, за яких P-доповнення, якщо воно існує, буде P-незалежним.

Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *— підалгебра,* $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{B}$ *— ідеал алгебри* $\mathcal{B}$*, та існує такий ідеал* $\mathcal{I}_1$ *алгебри* $\mathcal{A}$*, що* $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{B} = \mathcal{I}_0$ *і* $\mathcal{I}_1 \not\subset \mathcal{B}$*. Тоді існує такий ідеал* $\mathcal{I}^*$ *алгебри* $\mathcal{A}$*, що* $\mathcal{I}^* \cap \mathcal{B} = \mathcal{I}_0$*,* $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}^*$ *та* $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle = \mathcal{A}$*.*

Доведення. Розглянемо множину $\mathcal{J}$ всіх таких ідеалів $\mathcal{I}$ алгебри $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \mathcal{I}_0$. Ця множина не є порожньою, бо $\mathcal{I}_1 \in \mathcal{J}$. У множині $\mathcal{J}$, впорядкованому відносно включення, будь-який ланцюг має верхню грань і, отже, за лемою Цорна множина $\mathcal{J}$ має максимальні елементи. Нехай $\mathcal{I}^*$ — максимальний елемент множини $\mathcal{J}$. Припустимо, що $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle \neq \mathcal{A}$ і нехай $A \in \mathcal{A}$, $A \notin \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle$. За означенням ідеала $\mathcal{I}^*$ та за умови $\mathcal{I}_1 \not\subset \mathcal{B}$, переріз алгебри $\mathcal{D} = \langle A \cup \mathcal{I}^* \rangle$ з алгеброю $\mathcal{B}$ має містити елементи, що відмінні від елементів алгебри $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle$. Покладемо $\mathcal{C} = \langle \mathcal{I}^* \rangle$. Тоді нехай $D = (A \cap C_1) \cup (\bar{A} \cap C_2) \in \mathcal{B}$, $D \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ для деяких$C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

Розглянемо три можливі випадки:

якщо $C_1, C_2 \in \mathcal{I}^*$, тоді $D = (A \cap C_1) \cup (\bar{A} \cap C_2) \subseteq C_1 \cup C_2 \in \mathcal{I}^*$ і, отже, $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, що є протиріччям до умов вибору D;

якщо $C_1, C_2 \notin \mathcal{I}^*$, тоді, за означенням алгебри $\mathcal{C}$, $\bar{C}_1, \bar{C}_2 \in \mathcal{I}^*$, і, отже, $\bar{D} = (A \cap \bar{C}_1) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}_2) \subseteq \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2 \in \mathcal{I}^*$. Таким чином, знову $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, що є протиріччям до умов вибору D;

якщо одна з цих множин, скажімо C_1, належить ідеалу $\mathcal{I}^*$, а $C_2 \notin \mathcal{I}^*$, тоді маємо $(\bar{A} \cap C_2) = D \cap \overline{(A \cap C_1)} \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$, бо $(A \cap C_1) \in \mathcal{I}^*$. Окрім цього, справедливим є відношення $(A \cap \bar{C}_2) \subseteq \bar{C}_2 \in \mathcal{I}^*$. Тому $A \Delta C_2 = (A \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{A} \cap C_2) \in \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$. Звідси $A = (A \Delta C_2) \Delta C_2 \in \langle \mathcal{C} \cup \mathcal{B} \rangle$, що є протиріччям до умов вибору $A \notin \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.

Аналогічним чином розглядається випадок, коли $C_1 \notin \mathcal{I}^*$,$C_2 \in \mathcal{I}^*$. З означення множини$\mathcal{J}$ випливає, що $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}^*$. Теорема доведена.

Зауваження 2. *Вимога* $\mathcal{I}_1 \not\subset \mathcal{B}$ *в умовах теореми є суттєвою. Дійсно, нехай* Ω *і* $\mathcal{B}$ *такі ж, як у прикладі 3. Фіксуємо деяку точку* $\omega^* \in \Omega$ *та покладемо* $\mu(\{\omega_n\}) = 2^{-n}$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *для* $\omega_n \in \Omega$*,* $\omega_n \neq \omega^*$ *і* $\mu(\{\omega^*\}) = 0$*. Ці рівності визначають міру на алгебрі* $\mathcal{B}$*. Нехай, далі,* $\mathcal{A}$ *— алгебра, породжена множиною* $A \subset \Omega$*,* $A \notin \mathcal{B}$*. Визначимо імовірнісну міру* P *на алгебрі* $\mathcal{A}$*, поклавши* $P(B) = \mu(B)$ *для будь-якої* $B \in \mathcal{B}$ *і* $P(A) = 1$*. Тоді не існує ідеалу* $\mathcal{I}$ *алгебри* $\mathcal{A}$*, відмінного від* $\mu^{-1}(0)$*, такого що* $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \mu^{-1}(0)$*. Це зауваження по суті належить Z. Lipecki. Отже, максимальний елемент* $\mathcal{I}^*$ *множини* $\mathcal{J} = \{\mathcal{I}, \mathcal{I} \cap \mathcal{B} = \mu^{-1}(0)\}$ *співпадає з* $\mu^{-1}(0)$ *і тому* $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle \neq \mathcal{A}$*.*

Наслідок 1. *Для будь-якої* σ*-підалгебри* $\mathcal{B}$ σ*-алгебри* $\mathcal{A}$ *такої, що* $P^{-1}(0) \not\subset \mathcal{B}$ *завжди існує* P*-доповнення* $\mathcal{C}$*. Якщо, до того ж, звуження ймовірності* P *на* $\mathcal{C}$ *двозначно, тоді* $\mathcal{C}$ *є* P*-незалежним доповненням алгебри* $\mathcal{B}$*.*

Доведення. Дійсно, за теоремою 1 існує такий ідеал $\mathcal{I}^*$ алгебри $\mathcal{A}$, що $\mathcal{I}^* \cap \mathcal{B} = P^{-1}(0) \cap \mathcal{B}$, $P^{-1}(0) \subset \mathcal{I}^*$ і $\langle \mathcal{B} \cup \mathcal{I}^* \rangle = \mathcal{A}$. Позначимо через $\mathcal{I}^*_\sigma$ мінімальний σ-ідеал σ-алгебри $\mathcal{A}$, що містить ідеал $\mathcal{I}^*$. Оскільки $P^{-1}(0)$ є σ-ідеалом, то $\mathcal{I}^*_\sigma \cap \mathcal{B} = P^{-1}(0) \cap \mathcal{B}$. Покладемо $\mathcal{C} = \langle \mathcal{I}^*_\sigma \rangle$. Тоді, очевидно, σ-алгебра $\mathcal{C}$ є P-доповненням алгебри $\mathcal{B}$.

Доведення останньої частини наслідку аналогічно доведенню в прикладі 1.

Наслідок 2. *Якщо* $P \in \mathrm{ex} S^\sigma_\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *і* $P^{-1}(0) \not\subset \mathcal{B}$*, тоді для підалгебри* $\mathcal{B}$ *існує* P*-незалежне доповненя.*

Доведення. Нехай $\mathcal{C}$ — σ-алгебра, породжена ідеалом $\mathcal{I} = P^{-1}(0)$. Тоді $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \langle \mu^{-1}(0) \rangle$. Окрім цього, за теоремою 1 з [7] для кожного $A \in \mathcal{A}$ і будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $B_n \in \mathcal{B}$, що $P(A \Delta B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді $P(B_k \Delta B_n) \to 0$ при $k, n \to \infty$. Оскільки μ — σ-адитивна, а $\mathcal{B}$ є $\sigma-$алгеброю, то існує таке $B \in \mathcal{B}$, що $P(B \Delta B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Звідси $P(A \Delta B) = 0$. Таким чином, для будь-якого$A \in \mathcal{A}$ існує таке $B \in \mathcal{B}$, що $C = A \Delta B \in P^{-1}(0)$, тобто будь-яке $A \in \mathcal{A}$ може бути зображено у вигляді $A = B \Delta C$, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$. Звідси випливає, що $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \rangle$.

Оскільки звуження ймовірності P на алгебру $\mathcal{C}$ є двозначною мірою, то твердження теореми випливає з наслідку 1, що завершує доведення.

Зауваження 3. *Якщо* $P_i \in \mathrm{ex} S^{\sigma}_{\mu}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $i = 1, 2, \ldots$ *і* $P = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, *тоді з наслідку* 2 *отримаємо, що для підалгебри* $\mathcal{B}$ *існує* P-*незалежне доповнення.*

Висновки. У статті сформульовано умови, за яких підалгебри $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ мають P-доповнення в алгебрі $\mathcal{A}$ та умови, за яких P-доповнення, якщо воно існує, буде P-незалежним. У подальших дослідженнях доцільно розглянути побудову P-незалежного доповнення за умов, що відмінні від розглянутих у даній статті.

1. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры // Математ. сб. – 1949. – Т. 25(1), № 1. – С. 107–150.
2. *Rosenblatt M.* Stationary processes as shifts of functions of independent random variables //J. Math. Mech. – 1959. – V.8. – P. 665–681.
3. *Ramachandran D.* Existence of independent complements in regular conditional probability spaces // Ann. Prob. – 1979. – V. 7, №3. – P. 433–443.
4. *Yan C. H.* Decomposition of Lebesgue spaces // Adv. Math. – 1998. – V. 138(1). – P. 330–350.
5. *Yan C. H.* The theory of commuting Boolean sigma-algebras // Adv. Math. – 1999. – V. 144 (1). – P. 94–116.
6. *Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M.* On the lattice of subalgebras of a Boolean algebra // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1979. – V. 29. – P. 530–545.
7. *Plachky D.* Extremal and monogenic additive set functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 54 – P. 193–196.

Одержано 25.10.2008