УДК 517.927

Н. М. Щобак (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З РОЗДІЛЕНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

The sufficient and necessary conditions of the existence of solutions for some boundary-value problems with separated conditions are proved on the basis of the numerical-analytic method of the successive approximations.

На основі чисельно-аналітичного методу послідовних наближень доведені необхідні та достатні умови існування розв'язків крайових задач із розділеними крайовими умовами.

Вступ. В [1] обґрунтована модифікація чисельно-аналітичного методу послідовних наближень [2,3] для нелінійної крайової задачі з розділеними крайовими умовами

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(T) &= x_{2T}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$, $x = (x_1, x_2) : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^2$ і $D \subset \mathbb{R}^2$ – замкнена обмежена область. Якщо записати крайові умови (2) у матричній формі

$$Ax\left(0\right) + C_1 x\left(T\right) = d\ , \tag{3}$$

де $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $C_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ і $d = \left(\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{2T} \end{smallmatrix}\right)$, то бачимо, що тут матриця C_1 є виродженою.

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, вводимо параметр λ наступним чином:

$$x_1\left(T\right) = \lambda. \tag{4}$$

Використовуючи позначення (4), крайові умови (3) матимуть вигляд

$$Ax\left(0\right) + Cx\left(T\right) = d(\lambda)\ , \tag{5}$$

де $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ і $d(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} x_{10} + \lambda \\ x_{2T} \end{smallmatrix}\right)$. Тут, на відміну від C_1 в умові (3), матриця C є невиродженою.

Таким чином, вихідна крайова задача з розділеними крайовими умовами (1), (2) еквівалентна крайовій задачі (1) з умовами (5).

Для всіх $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ введемо позначення $|x| = (|x_1|, |x_2|)$ і всі подальші нерівності та мінімальні і максимальні значення між 2-вимірними векторами розумітимемо покомпонентно.

Якщо $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ це функція, $I \subset \mathbb{R}$ і $z \in \mathbb{R}^2$, то через $B_I(z, \beta)$ позначимо множину

$$B_I(z, \beta) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - z| \leq \beta(\lambda) \text{ для всіх } \lambda \in I\}.$$

Якщо множина $D \subset \mathbb{R}^2$ і функція $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}$, то

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f\left(t, x\right) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f\left(t, x\right)\right]. \tag{6}$$

Припускаємо для крайової задачі (1), (5) виконання наступних умов.

(A) *Функція f є неперервною в області $[0,T]\times D$ і для деякої сталої матриці з невід'ємними компонентами $K=(K_{ij})_{i,j=1}^2$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq K\,|x-y| \tag{7}$$

для всіх $t\in[0,T]$ і $\{x,y\}\subset D$.

(B) *Множина*

$$D_\beta := \{z\in D: B_I(z,\beta(z,\cdot))\subset D\} \tag{8}$$

є непорожньою, де $I:=\{\lambda\in\mathbb{R}: \left(\begin{smallmatrix}\lambda\\ x_{2T}\end{smallmatrix}\right)\in D\}$ і

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f)+|d(\lambda)-(A+E)z|, \tag{9}$$

де E – одинична матриця.

(C) *Найбільше власне значення матриці K задовольняє нерівність*

$$\lambda_{\max}(K)<\frac{10}{3T}.$$

Визначимо множину $U\subset\mathbb{R}$:

$$U:=\{u\in\mathbb{R}:(x_{10},u)\in D_\beta\}\,.$$

В [1] доведено, що послідовність функцій

$$x_m(t,u,\lambda):=z+\int_0^t f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))ds+\frac{t}{T}[d(\lambda)-(A+E)z], \tag{10}$$

де $m=1,2,3,\ldots$, $x_0(t,u,\lambda)=(x_{10},u)=:z$ і $u\in U$, рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$ до граничної функції $x^*(t,u,\lambda)$ яка є розв'язком збуреної крайової задачі

$$\begin{gathered} x'(t)=f(t,x(t))+\Delta(u,\lambda),\\ Ax(0)+Cx(T)=d(\lambda), \end{gathered} \tag{11}$$

де

$$\Delta(u,\lambda):=-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s,u,\lambda))ds+\frac{1}{T}[d(\lambda)-(A+E)z]. \tag{12}$$

з початковим значенням при $t=0$ рівним $x^*(0,u,\lambda)=z=(x_{10},u)$.

Доведено також, що пара $(x^*(\cdot,u^*,\lambda^*),\lambda^*)$ є розв'язком модифікованої крайової задачі (1), (5) з параметром λ тоді і тільки тоді, коли пара $(u^*,\,\lambda^*)$ задовольняє систему визначальних рівнянь

$$\Delta(u,\lambda)=-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,u,\lambda))ds+\frac{1}{T}[d(\lambda)-(A+E)z]=0. \tag{13}$$

Дана стаття містить подальші розширення досліджень, розпочатих в роботі [1]. Встановлено достатні та необхідні умови для існування розв'язку нелінійної крайової задачі (1), (2).

Існування достатніх умов. Позначимо $\Delta_m(u,\lambda)$ наближене до (13) визначальне рівняння

$$\Delta_m(u,\lambda) := -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}[d(\lambda) - (A+E)z] = 0, \tag{14}$$

де $x_m(t,u,\lambda)$ обчислюється за формулою (10).

Теорема 1. *Нехай для нелінійної крайової задачі* (1), (5) *виконуються умови* (A)–(C) *і, крім того:*

(D) існує випукла замкнена область

$$H_1 = U_1 \times I_1 \subset U \times I, \tag{15}$$

така, що для деякого $m \geq 1$ *наближена визначальна система* (14) *має в* (15) *єдиний розв'язок* $(u,\lambda) = (u_m, \lambda_m)$, *індекс якого відмінний від нуля;*

(E) на границі ∂H_1 *області* H_1 *має місце нерівність*

$$\inf_{(u,\lambda)\in\partial H_1} |\Delta_m(u,\lambda)| > \frac{10}{27}\, TKW(u,\lambda), \tag{16}$$

де

$$W(u,\lambda) = Q^{m-1}\left(E - Q\right)^{-1}\left[Q\delta_D(f) + K|d(\lambda) - (A+E)z|\right],$$
$$Q = \frac{3T}{10}K.$$

Тоді для крайової задачі (1), (5) *існує розв'язок* $x^*(t,u^*,\lambda^*)$. *Причому, початкове значення при* $t=0$ *цього розв'язку*

$$x^*(0,u^*,\lambda^*) = z,$$

де $\quad u^* \in U_1, \quad \lambda^* \in I_1, \quad z = (x_{10}, u^*).$

Доведення. Оцінимо різницю $|\Delta(u,\lambda) - \Delta_m(u,\lambda)|$. Взявши до уваги нерівність (див. [1])

$$|x^*(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)| \leq \bar{\alpha}_1(t)W(u,\lambda) = \epsilon(x^*(t,u,\lambda), x_m(t,u,\lambda)),$$

де, згідно із [3],

$$\bar{\alpha}_1(t) = \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right) \leq \frac{5}{9}T,$$

і, використовуючи умову Ліпшиця, з рівностей (12) і (14) матимемо наступну оцінку:

$$|\Delta(u,\lambda) - \Delta_m(u,\lambda)| =$$

$$= \left| \frac{1}{T} \int_0^T \left[f(s, x^*(s,u,\lambda)) - f(s, x_m(s,u,\lambda)) \right] ds \right| \le \tag{17}$$

$$\le \frac{1}{T} K W(u,\lambda) \int_0^T \bar{\alpha}_1(s) ds = \frac{10}{27}\, T K W(u,\lambda) = \epsilon\left(\Delta(u,\lambda), \Delta_m(u,\lambda)\right).$$

Враховуючи нерівності (16), (17), аналогічно як в теоремах 3.1; 17.1 з [2], можемо довести, що векторні поля $\Delta(u,\lambda)$, $\Delta_m(u,\lambda)$ є гомотопними. Це означає, що точне визначальне рівняння (13), параметризованої крайової задачі (1), (5) має в області H_1 хоча б один розв'язок $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$. Тоді можна зробити висновок, що крайова задача (1), (5) має хоча б один розв'язок $(x^*(t,u^*,\lambda^*), \lambda^*)$. Причому, $x^*(0,u^*,\lambda^*) = z = (x_{10}, u^*)$, де $u^* \in U_1$, $\lambda^* \in I_1$.

Необхідні умови існування розв'язку.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (A)–(C), *тоді для будь-яких триплетів*

$$(u', \lambda'),\ (u'', \lambda'') \in U \times I \tag{18}$$

має місце наступна оцінка:

$$\left| x^*(t,u',\lambda') - x^*(t,u'',\lambda'') \right| \le \left[E + \bar{\alpha}_1(t) K \left(E - Q\right)^{-1} \right] \left[\left| z' - z'' \right| + b_1(z', z'') \right], \tag{19}$$

де

$$b_1(z',z'') = \left[d(\lambda) - (A+E) \right] \left| z' - z'' \right|,$$

$$z' = (x_{10}, u'), \quad z'' = (x_{10}, u'')$$

Доведення. На основі (10) маємо:

$$x_1(t,u',\lambda') - x_1(t,u'',\lambda'') = \left(z' - z''\right) + \int_0^t \left[f\left(s, z'\right) - f\left(s, z''\right) \right] ds -$$

$$- \frac{t}{T} \int_0^T \left[f\left(s, z'\right) - f\left(s, z''\right) \right] ds + \frac{t}{T} \left[d(\lambda) - (A+E) \right] \left(z'' - z'\right).$$

Використовуючи умову Ліпшиця, аналогічно, як в лемі 17.1 із [2], з останньої рівності отримаємо

$$\left| x_1(t,u',\lambda') - x_1(t,u'',\lambda'') \right| \le \left[E + K\alpha_1(t) \right] \left| z' - z'' \right| + b_1(z', z'').$$

Аналогічно

$$\left| x_2(t,u',\lambda') - x_2(t,u'',\lambda'') \right| \le \left[E + K\alpha_1(t) + K^2 \alpha_2(t) \right] \left| z' - z'' \right| + \left[E + K\alpha_1(t) \right] b_1(z', z''),$$

де

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \alpha_m(s) ds + \frac{t}{T} \int_t^T \alpha_m(s) ds;$$

$$\alpha_0(t) = 1, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Згідно із методом математичної індукції, можна записати

$$\left|x_m(t,u',\lambda') - x_m(t,u'',\lambda'')\right| \leq \left[\sum_{i=0}^{m} \alpha_i(t)K^i\right] \left|z' - z''\right| + \left[\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i(t)K^i\right] b_1(z',z''), \tag{20}$$

Використовуючи оцінку Леми 2.4 з [3]

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \left(\frac{3}{10}T\right)^m \bar{\alpha}_1(t),$$

де $\bar{\alpha}_1(t) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)$, і умову, що $\lambda(Q) < 1$, де $Q = \frac{3T}{10}K$, та переходячи до границі при $m \to \infty$, з нерівності (20) випливає оцінка (19), що і потрібно було довести.

Лема 2. *Нехай для нелінійної крайової задачі* (1), (5) *виконуються умови* (A)–(C). *Тоді функція* $\Delta(u,\lambda)$, *вигляду* (12), *визначена і неперервна в області* $U \times I$ *і для будь-яких пар* (18) *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(u',\lambda') - \Delta(u'',\lambda'')\right| \leq$$

$$\leq \frac{b_1(z',z'')}{T} + \left[K + \frac{10}{27}K^2T\,(E-Q)^{-1}\right]\left[\left|z'-z''\right| + b_1(z',z'')\right] = \tag{21}$$

$$= \epsilon\left(\Delta(u',\lambda'),\Delta(u'',\lambda'')\right).$$

Доведення. Згідно із [1] для всіх $(u,\lambda) \in U \times I$ границя послідовності функцій (10) є неперервною функцією. Тому при $(u,\lambda) \in U \times I$ функція $\Delta(u,\lambda)$ також неперервна і обмежена в даній області.

Враховуючи (12), матимемо

$$\Delta(u',\lambda') - \Delta(u'',\lambda'') = -\frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)\right]\left(z'-z''\right) +$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^T \left[f\left(s,x(s,u',\lambda')\right) - f\left(s,x(s,u'',\lambda'')\right)\right] ds.$$

За допомогою безпосередніх обчислень можемо отримати

$$\left|\Delta(u',\lambda') - \Delta(u'',\lambda'')\right| = \frac{b_1(z',z'')}{T} +$$

$$+K\left[\left|z'-z''\right| + b_1(z',z'')\right] + \frac{K^2}{T}(E-Q)^{-1}\left[\left|z'-z''\right| + b_1(z',z'')\right]\int_0^T \bar{\alpha}_1(t)dt.$$

Враховуючи рівність $\int_0^T \bar{\alpha}_1(t)dt = \frac{10}{27}T^2$, з останньої нерівності випливає

$$\left|\Delta(u',\lambda') - \Delta(u'',\lambda'')\right| = \frac{b_1(z',z'')}{T} + K\left[\left|z'-z''\right| + b_1(z',z'')\right] +$$

$$+\frac{10}{27}K^2T\,(E-Q)^{-1}\left[\left|z'-z''\right| + b_1(z',z'')\right].$$

Групуючи доданки в останньому співвідношенні, отримаємо потрібну нам нерівність (21).

Наступне твердження визначає необхідні умови існування розв'язку задачі (1), (5).

Теорема 2. *Нехай для нелінійної крайової задачі* (1), (5) *виконуються умови* (A)–(C). *Для того, щоб в деяку область* $H_2 = U_2 \times I_2 \subset U \times I$, *входила пара* (u^*, λ^*) *даного розв'язку* $(x^*(t, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ *крайової задачі* (1), (5) *необхідно, щоб для кожного* m *і довільної пари* $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in H_2$ *була справедливою наступна нерівність:*

$$\Delta_m(\bar{u}, \bar{\lambda}) \leq$$
$$\leq \sup_{(u,\lambda)\in H_2} \left\{ \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T \left(E - Q\right)^{-1} \right] \left[|\bar{z} - z| + b_1(\bar{z}, z) \right] \right\} + \tag{22}$$
$$+\epsilon\left(\Delta(\bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{u}, \bar{\lambda})\right),$$

де вектори $\epsilon\left(\Delta(\bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{u}, \bar{\lambda})\right)$, $b_1(\bar{z}, z)$ *задаються відповідно формулами* (17) *та* (19).

Доведення. Нехай $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$ задовольняють систему визначальних рівнянь (13), тобто $(x^*(t, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком крайової задачі (1), (5). Запишемо нерівність (21) для пар $(u', \lambda') = (\bar{u}, \bar{\lambda})$ та $(u'', \lambda'') = (u, \lambda)$. Тоді

$$\Delta(\bar{u}, \bar{\lambda}) \leq \frac{b_1(\bar{z}, z)}{T} + \left[K + \frac{10}{27} K^2 T \left(E - Q\right)^{-1} \right] \left[|\bar{z} - z| + b_1(\bar{z}, z) \right].$$

З (17) для $(u, \lambda) = (\bar{u}, \bar{\lambda})$ матимемо

$$\Delta_m(\bar{u}, \bar{\lambda}) \leq \Delta(\bar{u}, \bar{\lambda}) + \epsilon\left(\Delta(\bar{u}, \bar{\lambda}), \Delta_m(\bar{u}, \bar{\lambda})\right).$$

Об'єднуючи дві останні нерівності, отримаємо потрібне співвідношення (22), що і потрібно було довести.

Робота виконана за підтримки гранту Президента України № GP/F26/0185.

1. *Ronto M., Shchobak N.* On parametrization for a non-linear boundary value problem with separated conditions // Electronic J. Qualitat. Theory Differential Equat., Proc. 8th Coll. QTDE. — 2007. — №18. — P. 1–16.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.– К.: Наук. думка, 1992. – 275 с.
3. *Ronto M., Samoilenko A.M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore.: World Scientific, 2000. – 455 p.

Одержано 15.10.2008