УДК 519.832

Ю.В. Андрашко, О. І.Кузка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ДЕЯКІ КОНКУРЕНТНІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ

The article reviews the competitive placement problems with complete distribution of the market and incomplete distribution of the market in the case of two firms. The mathematical models of these problems are constructed. There is the generalization to the case of k firms.

У статті розглядаються конкурентні задачі розміщення з повним та неповним розподілом ринку у випадку наявності на ньому двох фірм. Побудовані їх математичні моделі. Робиться узагальнення для k фірм.

Виникнення дискретних задач розміщення і перші спроби їх вирішення приписують французьким та італійським математикам XVII століття. По-справжньому бурхливий розвиток моделі розміщення отримали з народженням обчислювальної техніки. Лінійні моделі, моделі частково-цілочислового програмування, статистичні та динамічні моделі розміщення, а також моделі з нелінійними цільовими функціями виникали при реалізації програм розміщення нафтових і газових станцій, підприємств, станцій метро, поліцейських та пожежних дільниць та ін. [5]. Проте ці задачі часто фігурують у зовсім інших галузях, зокрема, при вирішенні завдань уніфікації та стандартизації, коли вибирається склад системи технічних засобів, призначених для виконання заданого списку робіт [4].

Розглянемо **найпростішу задачу розміщення**. Дослідимо ринок однієї послуги. На ньому присутня множина клієнтів $J = \{1, \ldots, n\}$, що мають певні потреби в обслуговуванні. Також відома множина пунктів $I = \{1, \ldots, m\}$, де можуть бути відкриті підприємства для обслуговування клієнтів. Вважається, що підприємство задовольняє всі потреби клієнта, що обслуговується на ньому, тобто, клієнт повністю обслуговується на одному підприємстві. Однак, на одному підприємстві може обслуговуватись декілька клієнтів. Також відомі виробничо-транспортні витрати c_{ij}, що потрібні для обслуговування j-го клієнта на підприємстві, якщо воно буде відкрите в i-ому пункті. Всі множини вважаються скінченними. Для кожного пункту $i \in I$ відома вартість $f_i > 0$ відкриття підприємства в цьому пункті.

Нехай існує одна особа, яка приймає рішення (ОПР), наприклад, керівник фірми. Його задача полягає у виборі такої підмножини $S \subset I$ пунктів розміщення виробництва, яка дозволяє обслуговувати всіх клієнтів з мінімальними сумарними затратами, тобто знайти:

$$\min_{S \subset I} \left\{ \sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} c_{ij} \right\}.$$

Найпростіша задача розміщення є NP-складною [2].

У цій моделі передбачено, що рішення приймає одна особа, що стоїть на вищому рівні ієрархії. Це спричинене тим, що класичні задачі розміщення виникли в період централізованого управління в економіці. Однак у ринкових умовах клієнт має можливість сам вибирати, в якому пункті будуть його обслуговувати, виходячи з власних уподобань. Він не зобов'язаний мінімізувати витрати фірми. Крім того, на ринку можуть діяти декілька конкуруючих фірм.

Спочатку розглянемо **конкурентну задачу розміщення з повним розподілом ринку**. Нехай на ринок виходить перша фірма (Лідер) і відкриває свою множину підприємств $S^0 \subset I$. Потім, знаючи це рішення, конкуруюча фірма (Конкурент) відкриває власні підприємства $S^1 \subset I$. Вважається, що $S^0 \bigcap S^1 = \emptyset$. Кожен клієнт вибирає з множини відкритих підприємств одне. Лідер відкриває p підприємств, а Конкурент – r підприємств. Залежно від розміщення цих підприємств, ринок (множина клієнтів) буде якось розподілено між цими фірмами. Деяких клієнтів буде обслуговувати Лідер, решту – Конкурент. Обслуговування j-ого клієнта приносить прибуток u_j. Кожна фірма прагне максимізувати прибуток і, відповідно, свою частку ринку $[1, 5]$.

Враховуючи значну обчислювальну складність розв'язання даного класу задач, часто розглядається випадок, коли Конкурент відкриває єдине підприємство, тобто $r = 1$ [3].

Для визначення уподобань клієнтів введемо до розгляду матрицю переваг G. Якщо $g_{lj} < g_{kj}$, то j-овий клієнт віддає перевагу пункту l перед пунктом k. При цьому клієнту байдуже, кому належить підприємство, відкрите в даному пункті. Будемо вважати, що всі $g_{lj}, l \in I$ різні при кожному фіксованому j, тобто, переваги кожного клієнта є строго проранжованими. Частковим випадком, що дозволяє краще зрозуміти зміст матриці переваг, є матриця відстаней: величина g_{il} є відстанню між клієнтом і відповідним пунктом обслуговування, а клієнта завжди обслуговує найближче із діючих підприємств. Варто зазначити, що нам неважливі числові значення g_{ij}, а важливе тільки їх співвідношення, тому можна вважати, що стовпці матриці є перестановками чисел $\overline{1, m}$.

Введемо змінні:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо Лідер відкриває підприємство в пункті } i; \\ 0, & \text{якщо Лідер не відкриває підприємство в пункті } i. \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо Конкурент відкриває підприємство в пункті } i; \\ 0, & \text{якщо Конкурент не відкриває підприємство в пункті } i. \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо клієнта обслуговує Лідер;} \\ 0, & \text{якщо клієнта обслуговує Конкурент.} \end{cases}$$

Тепер ми можемо записати конкурентну задачу розміщення з повним розподілом ринку таким чином:

$$z^0 = \sum_{j \in J} w_j u_j \to max; \tag{1}$$

$$z^1 = \sum_{j \in J} w_j (1 - u_j) \to max; \tag{2}$$

при умовах

$$\sum_{i\in I} x_i = p; \qquad \sum_{i\in I} y_i = r; \tag{3}$$

$$x_i + y_i \leqslant 1, i \in I; \tag{4}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad y_i \in \{0,1\}, i \in I; \tag{5}$$

$$u_j = \begin{cases} 1, & \min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\} \leqslant \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\} \\ 0, & \min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\} > \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\} \end{cases}, j \in J. \tag{6}$$

Множина захоплення $I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} < \min\limits_{l\in I}\{g_{lj}|x_l = 1\}\}, j \in J$ – це множина пунктів, що є кращими з точки зору j-го клієнта, ніж пункти, в яких вже є відкриті підприємства. В разі відкриття підприємства в одному з них клієнт змінить фірму і його буде обслуговувати не Лідер, а Конкурент. Конкуренту є сенс відкривати підприємства тільки в пунктах, що належать одній із множин захоплення, тобто $y_l = 0$, якщо $l \notin \bigcup\limits_j I_j(x)$.

Теорема 1. *Для конкурентної задачі розміщення з повним розподілом ринку (1)-(6) умова (6) еквівалентна таким умовам:*

$$1 - u_j \leqslant \sum_{i\in I_j(x)} y_i; j \in J; \tag{7}$$

$$u_j \in \{0,1\}, j \in J;$$

Доведення. Нехай u^* – розв'язок задачі (1)-(6).

Булевість змінних u_j^* випливає безпосередньо з умови (6).

Доведемо, що u_j^* задовольняє умову (7).

Якщо $u_j^* = 1$, тоді умова (7) еквівалентна $0 \leqslant \sum\limits_{i\in I_j(x)} y_i$. Її виконання випливає із булевості змінних y_j.

Якщо $u_j^* = 0$, то $\min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\} > \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\}$, звідки випливає, що $\exists l$ таке, що $g_{lj} < \min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\}$, тобто, $l \in I_j(x) \neq \emptyset$ та $y_l = 1$, отже, $\sum\limits_{i\in I_j(x)} y_i \geqslant y_l$, а $y_l = 1 = 1 - u_j^*$ і тому умова (7) виконується.

Нехай u^* – розв'язок задачі (1-5,7).

Доведемо виконання умови (6).

Якщо $\min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\} \leqslant \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\}$, тоді $\forall l$ таких, що $y_l = 1$ виконується нерівність $g_{lj} \geqslant \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\} \geqslant \min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\}$, а отже $y_l \notin I_j(x)$. Очевидно, що $y_l = 0, \forall l \in I_j(x)$, тому $\sum\limits_{i\in I_j(x)} y_i = 0$. З умови (7) отримуємо, що $1 - u_j^* \leqslant 0$, а, враховуючи булевість u_j^*, це можливо тоді і тільки тоді, коли $u_j^* = 1$, тобто клієнта обслуговує Лідер.

Якщо $\min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\} > \min\limits_k \{g_{kj}|y_k = 1\}$, тоді $\exists l$ таке, що $y_l = 1$ та $g_{lj} < \min\limits_k \{g_{kj}|x_k = 1\}$, звідки випливає, що $\sum\limits_{i\in I_j(x)} y_i \geqslant 1$. Тому умова (7) виконується для будь-яких u_j^*. Враховуючи оптимальність u_j^* і невід'ємність w_j, з (2) отримаємо, що $u_j^* = 0$, а отже, клієнта обслуговує Конкурент.

Еквівалентність доведено.

Враховуючи, що кожного клієнта обслуговує одна із фірм, неважко помітити, що сумарний дохід Лідера і Конкурента є сталою величиною. Він рівний сумі доходів, отриманих від обслуговування всіх клієнтів, тобто $z^0 + z^1 = \sum\limits_{j \in J} w_j$. Можна виразити одну з цільових функцій через іншу та отримати однокритеріальну задачу.

Іноді нема таких жорстких обмежень на кількість відкриттів підприємств. Натомість, керівник фірми Лідера володіє певною кількістю коштів, які назвемо бюджетом і позначимо B^0. Також відома вартість відкриття підприємства в кожному з пунктів f_i. В такому випадку, замість умови (3) треба використати таке обмеження: $\sum\limits_{i \in I} f_i x_i \leqslant B^0$. Аналогічне обмеження, замість умови (3), можна записати і для Конкурента, якщо він володіє бюджетом B^1: $\sum\limits_{i \in I} f_i y_i \leqslant B^1$.

У розглянутій задачі передбачається, що не можна відкривати підприємства в тих місцях, де вже є підприємства Лідера, тобто $S^0 \bigcap S^1 = \emptyset$. Від цієї умови можна відмовитися. Залежно від поведінки клієнтів отримаємо різні випадки. У випадку консервативних клієнтів, тобто клієнтів, що змінюють підприємство тільки тоді, коли нове пропонує кращі умови, видалення обмеження (4) із задачі не змінює оптимального рішення Конкурента. Йому невигідно відкривати підприємства в тому місці, де вже є підприємство Лідера. Це не призводить до обслуговування нових клієнтів. Однак ситуація може змінитися, якщо покласти $I_j(x) = \{i \in I | g_{ij} \leqslant \min\limits_{l \in I}\{g_{lj} | x_l = 1\}\}, j \in J$. У цьому випадку Лідер втрачатиме клієнта тоді, коли Конкурент відкриває підприємство з такою ж привабливістю, як і Лідер. Таким чином, отримуємо модель з допитливими клієнтами, які за інших рівних умов тягнуться до нового підприємства. Даний випадок тривіальний: Конкурент може відкрити підприємства в тих же пунктах, що і Лідер, та захопити весь ринок.

Також можливий випадок, коли при відкритті підприємств в одному пункті і Лідером і Конкурентом прибуток від обслуговування клієнта у цьому пункті розподіляється в певній пропорції між ними. Нехай Лідер отримує прибуток, рівний αw_j, а Конкурент $(1 - \alpha) w_j$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ – коефіцієнт розподілу прибутку. Якщо $\alpha = 1$, то отримуємо модель з консервативними клієнтами, якщо ж $\alpha = 0$ – з допитливими. Зазвичай вибирається $\alpha = 1/2$.

Більш детально різні варіанти поведінки клієнтів розглядаються в роботі Дрезнера [1].

Розглянемо **конкурентну задачу розміщення з неповним розподілом ринку**. Для цього введемо поняття граничної переваги g_{0j}. Якщо $g_{kj} > g_{0j}$, то клієнт j не вибере підприємство відкрите в пункті k, за жодних умов. Може трапитись так, що клієнт не вибере жодного підприємства і взагалі ніде не буде обслуговуватись (наприклад, якщо у Вашому місті нема супермаркетів, але вони є в іншому місті, то Ви не будете купувати товари в жодному з супермаркетів, а підете на ринок чи до крамниці).

Позначимо:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо клієнта } j \text{ обслуговує підприємство, відкрите в пункті } i; \\ 0, \text{якщо клієнта } j \text{ не обслуговує підприємство, відкрите в пункті } i, \end{cases}$$

$i \in I, j \in J$.

Тепер конкурентну задачу розміщення з неповним розподілом ринку ми можемо записати так:

$$z^0 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j x_i u_{ij} \to max; \qquad z^1 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_j y_i u_{ij} \to max; \tag{8}$$

при умовах

$$\sum_{i\in I} f_i x_i \leqslant B^0; \quad \sum_{i\in I} f_i y_i \leqslant B^1; \tag{9}$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad y_i \in \{0,1\}, i \in I; \tag{10}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & g_{ij} = \min\limits_k \{g_{kj} | x_k + y_k > 0, g_{kj} \leqslant g_{0j}\} \\ 0, & g_{ij} \neq \min\limits_k \{g_{kj} | x_k + y_k > 0, g_{kj} \leqslant g_{0j}\} \end{cases}, i \in I, j \in J. \tag{11}$$

Отримана задача є малодослідженою. В конкурентній задачі розміщення з неповним розподілом ринку сумарний дохід, отриманий Лідером і Конкурентом, не є сталою величиною. Він тільки обмежений зверху сумою доходів від усіх клієнтів: $z^0 + z^1 \leqslant \sum_{j\in J} w_j$.

Розглянемо множини захоплення $S_{ij} = \{q \in I | g_{qj} < min\{g_{ij}\}, g_{qj} \leqslant g_{0j}\}$.

Теорема 2. *Для конкурентної задачі розміщення з неповним розподілом ринку (8)-(11), якщо для кожно $j \in J$ існує $g_{qj} \leqslant g_{0j}, q \in I$, то умова (11) еквівалентна таким умовам:*

$$\sum_{i\in I} u_{ij} \leqslant 1, j \in J; \tag{12}$$

$$u_{ij} \leqslant x_i + y_i, i \in I, j \in J; \tag{13}$$

$$u_{ij} + \sum_{q\in S_{ij}} u_{qj} = \sum_{q\in S_{ij}} \max\{x_q, y_q\} + \max\{x_i, y_i\}, i \in I, j \in J; \tag{14}$$

$$u_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J. \tag{15}$$

Доведення. Нехай u^* – розв'язок задачі (8)-(11).

З умови (11) випливає, що u^*_{ij} – булеві змінні, і для кожного $j \in J$ існує не більше однієї змінної: $u^*_{ij} = 1$. Виконання умов (12) та (15) очевидне.

Якщо $u^*_{ij} = 0$, тоді виконання умови (13) очевидне.

Нехай $u^*_{ij} = 1$, тоді згідно з (11): $x_i + y_i > 0$. Врахувавши булевість змінних x_i, y_i та u^*_{ij}, отримуємо: $u^*_{ij} \leqslant 1 \leqslant x_i + y_i$. Виконання умови (13) доведено.

Перенумеруємо $g_{i,j}$ в порядку зростання для кожного фіксованого j, тобто $g_{1j} < g_{2j} < \ldots < g_{mj}$.

Очевидно, що $S_{1j} = \emptyset$, а $\sum_{q\in S_{1j}} u^*_{qj} = \sum_{q\in S_{1j}} \max\{x_q, y_q\} = 0$. Згідно умови (11), якщо $u_{1j} = 1$, то $x_1 + y_1 > 0$ і $\max\{x_1, y_1\} = 1$. Якщо $u_{1j} = 0$, то, врахувавши існування $g_{qj} \leqslant g_{0j}$, отримаємо, що $g_{1j} \leqslant g_{0j}$, отже, $x_1 + y_1 = 0$ і $\max\{x_1, y_1\} = 0$.

Нехай умова (14) виконується для $l < m$: $u^*_{lj} + \sum_{q\in S_{lj}} u^*_{qj} = \sum_{q\in S_{lj}} \max\{x_q, y_q\} + \max\{x_l, y_l\}$. Доведемо її виконання для $l+1$:

$$u^*_{l+1j} + \sum_{q\in S_{l+1j}} u^*_{qj} = \sum_{q\in S_{l+1j}} \max\{x_q, y_q\} + \max\{x_{l+1}, y_{l+1}\}. \tag{16}$$

Якщо $u^*_{l+1j} = 1$, то $x_{l+1} + y_{l+1} > 0$ і $\max\{x_{l+1}, y_{l+1}\} = 1$. Якщо $u^*_{l+1j} = 0$, то $x_{l+1} + y_{l+1} = 0$ або $g_{l+1j} > g_{0j}$. Виконання умови (16) очевидне. Отже u^* – розв'язок задачі (8-10,12-15). Необхідність доведено.

Нехай u^* – розв'язок задачі (8-10,12-15).

Якщо $g_{ij} = \min\limits_k \{g_{kj} | x_k + y_k > 0, g_{kj} \leqslant g_{0j}\}$, то очевидно, що $x_i + y_i > 0$ та $\forall q \in I$ такого, що $x_q + y_q > 0$, виконується умова $g_{ij} < g_{qj}$. Отже, $S_{ij} = \emptyset$, а $\sum\limits_{q \in S_{ij}} u_{qj} = 0$. З умови (14) випливає, що $u^*_{ij} = 1$.

Нехай $g_{ij} \neq \min\limits_k \{g_{kj} | x_k + y_k > 0, g_{kj} \leqslant g_{0j}\}$.

Якщо $x_i + y_i = 0$, тоді з умови (13) випливає, що $u^*_{ij} \leqslant 0$, а згідно умови булевості (15), $u^*_{ij} = 0$.

Нехай $x_i + y_i \neq 0$. Тоді $\exists q \in S_{ij} \neq \emptyset$, а отже, $\sum\limits_{q \in S_{ij}} u^*_{qj} > 0$. Очевидно, що $u^*_{ij} + \sum\limits_{q \in S_{ij}} u^*_{qj} \leqslant \sum\limits_{i \in I} u^*_{ij}$, а згідно умови (12), $u^*_{ij} + \sum\limits_{q \in S_{ij}} u^*_{qj} \leqslant 1$, тобто, $u^*_{ij} \leqslant 1 - \sum\limits_{q \in S_{ij}} u^*_{qj}$. Враховуючи умову булевості (15), це можливо тоді і тільки тоді, коли $u^*_{ij} = 0$, а $\sum\limits_{q \in S_{ij}} u^*_{qj} = 1$. Виконання умови (11) доведено. u^* – розв'язок задачі (8-11).

Еквівалентність доведено.

Узагальнимо модель розподілу ринку на випадок, коли на ринку є більше, ніж дві фірми.

Нехай:

$I = \{1, \dots, m\}$ – множина пунктів, де можна відкрити підприємства для обслуговування клієнтів;

$J = \{1, \dots, n\}$ – множина клієнтів, яких можна обслуговувати;

$L = \{1, \dots, k\}$ – множина фірм, що відкривають підприємства;

$f_i > 0, i \in I$ – вартість відкриття підприємства в i-ому пункті;

$w_j > 0, j \in J$ – прибуток, що приносить обслуговування j-ого клієнта;

$B^l > 0, l \in L$ – стартовий капітал l-ої фірми;

$\alpha^l_i > 0, l \in L, \sum\limits_{l \in L} \alpha^l_i = 1, i \in I$ – коефіцієнт розподілу прибутку;

G – матриця переваг клієнтів;

g_{0j} – гранична перевага j-ого клієнта.

Позначимо:

$$x^l_i = \begin{cases} 1, \text{якщо фірма } l \text{ відкриває підприємство в пункті } i; \\ 0, \text{якщо фірма } l \text{ не відкриває підприємство в пункті } i, \end{cases}$$

$i \in I$;

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо клієнта } j \text{ обслуговує підприємство, відкрите в пункті } i; \\ 0, \text{якщо клієнта } j \text{ не обслуговує підприємство, відкрите в пункті } i, \end{cases}$$

$i \in I, j \in J$.

Нехай W_i – сумарний прибуток, отриманий від обслуговування клієнтів в i-ому пункті. У разі відкриття всіма фірмами підприємств в i-ому пункті, l-ова фірма отримає прибуток, рівний $\alpha^l_i W_i$. Якщо підприємства в i-ому пункті відкривають тільки деякі фірми $l \in L_i = \{i \in I | \sum\limits_{q \in L} x^q_i = 1\}, L_i \subset L$, то l-ова фірма отримає прибуток, рівний $\frac{\alpha_i^l}{\sum\limits_{q\in L_i}\alpha_i^q}W_i$.

Необхідно знайти такі множини пунктів $S^l = \{q \in I | x_q^l = 1\}, S^l \subset I$, відкриття підприємств у яких максимізує прибуток кожної з фірм.

Нехай $\varepsilon > 0$ – деяке мале число, таке, що $\varepsilon < \min\limits_{l\in L, i\in I} \{\alpha_i^l | \alpha_i^l \neq 0\}$.

Тоді задачу можна формально записати так:

$$z^l = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\frac{\alpha_i^l w_j x_i^l u_{ij}}{\max\{\sum\limits_{q\in L}\alpha_i^q x_i^q; \varepsilon\}} \to max, l \in L;$$

при умовах

$$\sum_{i\in I} f_i x_i^l \leqslant B^l, l \in L;$$

$$u_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = \min\limits_p \{g_{pj} | \sum\limits_{q\in L} x_p^q > 0, g_{pj} \leqslant g_{0j}\} \\ 0, & i \neq \min\limits_p \{g_{pj} | \sum\limits_{q\in L} x_p^q > 0, g_{pj} \leqslant g_{0j}\} \end{cases}, i \in I, j \in J;$$

$$x_i^l \in \{0, 1\}, i \in I, l \in L.$$

Висновки. У роботі розглянуто кілька варіантів конкурентної моделі розподілу ринку для двох фірм. Зроблено узагальнення для випадку k фірм. Побудовано математичні моделі наведених задач. У результаті отримано багатокритеріальні моделі булевого програмування. Хоча цільові функції і частина обмежень в деяких моделях є лінійними, проте безпосереднє розв'язання отриманих задач класичними методами є неефективним через значну кількість дискретних змінних та обмежень. Це підштовхує до побудови спеціальних алгоритмів, що враховують специфіку задач і будуть наведені в наступних роботах. Також доведено еквівалентність деяких обмежень, що дозволяє спростити розв'язання відповідних задач.

1. *Drezner T., Eiselt H.A.* Consumers in competitive location models // Z.Drezner, H.W. Hamaher. (Eds.) Facility Location. Application and Theory. – Springer, 2004. – P. 151-178.
2. *Krarup J., Pruzan P.M.* The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. – 1983. – V. 12, N. 1. – P. 36–81.
3. *Plastria F., Vanhaverbeke L.* – Discrete models for competitive location with foresight // Computers and Operations Research. – 2008. – V. 35. – P. 683–700.
4. *Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т.* Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978. – 335 с.
5. *Кочетов Ю.А.* Методы локального поиска для дискретных задач размещения. – Новосибирск: НГТУ, 2009. – 267 с.

Одержано 21.02.2013