УДК 517.9

О.А. Жуковська (Нац. технічний ун-т України "КПІ")
А.О. Титаренко (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка)

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИПАДКІВ ДИСТРИБУТИВНОСТІ ДЛЯ СПРЯМОВАНИХ ІНТЕРВАЛІВ

The paper of the study distributive cases for directed intervals is offered. Necessary and sufficient conditions to ensure compliance with the law of distributive have proved.

В статье предложено исследование случаев дистрибутивности для направленных интервалов. Доказаны необходимые и достаточные условия, которые обеспечивают выполнение закона дистрибутивности..

Вступ. У багатьох практичних задачах є природним наявність неповної інформації про необхідні для розв'язку задачі величини, коли відома тільки їх належність до деякого інтервалу. Отримання розв'язку в явному вигляді задач з інтервальною невизначеністю та неоднозначністю в даних, що виникають при постановці задачі або на проміжних стадіях процесу розв'язання, призвело до створення інтервального аналізу. Основні визначення інтервальних величин, загальні алгебраїчні властивості інтервалів та їх застосування до чисельного аналізу вперше надані в роботах Т.Сунаги [1] та М. Вармуса [2]. Подальший розвиток математичних аспектів інтервальних обчислень можна знайти в монографії Р. Мура [3], публікації Л.В Канторовича [4] та багатьох інших. Така цікавість пояснюється тим, що практична реалізація ідеї інтервального аналізу – розгляд множин невизначеності як самостійних цілісних об'єктів – вимагає перегляду усіх іс-нуючих на даний момент методів [5–6]. Основна причина такої ситуації – це алгебраїчна неповнота класичної інтервальної арифметики, що призвело до різноманітних підходів до її розширення. Алгебраїчне розширення класичної інтервальної арифметики вперше запропоновано в роботах Е. Каухера [7] та Е. Гарденеса [8]. Показано, що таке узагальнення при збереженні всіх важливих властивостей класичного інтервального аналізу зводиться до більш замкненого простору як в алгебраїчному, так і в теоретико-множинному сенсі. Дослідження влас-тивостей розширеної інтервальної арифметики, зокрема, умов, за яких для інтервалів виконується дистрибутивний закон було проведено в [9, 10]. Однак, запропоновані в цих роботах умови, за яких виконується закон дистрибутивності, є надто громіздкими, що ускладнює подальші практичні застосування. Метою даної статті є дослідження можливості представлення множини інтервалів як об'єднання таких підмножин, в яких гарантовано буде виконуватись закон дистрибутивності.

Інтервальні арифметичні операції у розширеному інтервальному просторі Інтервально-арифметична структура

$$Y = (I(R), +, x, \subseteq),$$

де

$$I(R) = \left\{[x^-, x^+] \mid x^- < x^+, x^-,\ x^+ \in R\right\}$$

множина класичних (або власних) інтервалів, розширюється [7, 8] множиною невласних інтервалів

$$\overline{I(R)} = \left\{[x^-, x^+] \mid x^- > x^+, x^-,\ x^+ \in R\right\}.$$

Результат об'єднання множини $I(R)$ класичних (власних) інтервалів та множини $\overline{I(R)}$ невласних інтервалів є множина $T(R)$ спрямованих інтервалів

$$I(R)\bigcup\overline{I(R)} = T(R), \quad T(R) = \left\{[x^-, x^+] \mid x^-, x^+ \in R\right\} \cong R^2.$$

Арифметичні операції додавання та множення розширюються від множини $I(R)$ класичних інтервалів до множини $T(R)$ спрямованих інтервалів. Інтервальна операція додавання визначається за допомогою формули:

$$X + Y = [x^- + y^-,\ x^+ + y^+] \text{ при } X, Y \in T(R). \tag{1}$$

Інтервальна операція множення виконується в залежності від "напрямку"

$$\tau(X) = \begin{cases} +, & \text{якщо } x^- \le x^+, \\ -, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

інтервалів та їх належність до від'ємної або додатної області

$$\sigma(X) = \begin{cases} +, & \text{якщо } x^{-\tau(X)} \le 0, \\ -, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

за формулами:

$$XY = \begin{cases} \left[x^{-\sigma(Y)}y^{-\sigma(X)}, x^{\sigma(Y)}y^{\sigma(X)}\right], \quad X, Y \in T(R) \setminus Z(R), \\ \left[x^{\sigma(X)\tau(Y)}y^{-\sigma(X)}, x^{\sigma(X)\tau(Y)}y^{\sigma(X)}\right], \ X \in T(R) \setminus Z(R), Y \in Z(R), \\ \left[x^{-\sigma(Y)}y^{\sigma(X)\tau(X)}, x^{\sigma(Y)}y^{\sigma(Y)\tau(X)}\right], \ X \in T(R) \setminus Z(R), Y \in Z(R), \\ [min\{x^-y^+, x^+y^-\}, max\{x^-y^-, x^+y^+\}], \ X, Y \in Z(R), \ \tau(X) = \tau(Y) = +, \\ [min\{x^-y^-, x^+y^+\}, max\{x^-y^+, x^+y^-\}], \ X, Y \in Z(R), \ \tau(X) = \tau(Y) = -, \\ 0, \quad X, Y \in Z(R), \tau(X) = -\tau(Y), \end{cases} \tag{2}$$

де

$$Z(R) = \left\{X \in T(R) | X = [0, 0] \quad \text{або} \quad x^-x^+ < 0\right\}.$$

Інтервальні операції віднімання та ділення виражені як складові операцій додавання та множення

$$X - Y = X + (-1)Y, \quad X/Y = X(1/Y),$$

де $1/Y = [1/y^+, 1/y^-]$, якщо $Y \in T(R) \setminus Z(R)$.

Зазначені арифметичні операції (2) над спрямованими інтервалами, зокрема, операція множення та ділення, перед безпосереднім застосуванням потребують попереднього аналізу первинних характеристик інтервалів і не вирішують задачу визначення мінімального та максимального значень для інтервалів, що містять нуль. Тому в [11, 13] нами запропонована, використовуючи форму центр-радіус інтервалів $< x, r_x >= [x - r_x, x + r_x]$, така класифікація інтервалів (рис.1):

$$T_1^{(X,Y)}(R) = \left\{\langle x, r_x\rangle, \langle y, r_y\rangle \mid \frac{|x|}{|r_x|} \ge 1, \ \frac{|y|}{|r_y|} \ge 1, \quad x, r_x, y, r_y \in R\right\},$$

$$T_2^{(X,Y)}(R) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle \mid \frac{|x|}{|r_x|} < 1, \ \frac{|x|}{|r_x|} < \frac{|y|}{|r_y|} \ x, r_x, y, r_y \in R \right\},$$

$$T_3^{(X,Y)}(R) = \left\{ \langle x, r_x \rangle, \langle y, r_y \rangle | \frac{|x|}{|r_x|} < 1, \ \frac{|x|}{|r_x|} \geq \frac{|y|}{|r_y|} \ x, r_x, y, r_y \in R \right\},$$

$T_1^{(X,Y)}(R) \bigcup T_2^{(X,Y)}(R) \bigcup T_3^{(X,Y)}(R) = T(R) \times T(R)$, ($''\times''$ – знак прямого добутку), яка дозволила отримати формули добутку інтервалів у формі центр-радіус:

$$XY = \langle xy + sgn(xy) r_x r_y, \ |x| r_y + |y| r_x \rangle, \quad X, Y \in T_1^{(X,Y)}(R), \tag{3}$$

$$XY = \langle xy + sgn(y r_x) x r_y, \ |y| r_x + |r_x| r_y \rangle, \quad X, Y \in T_2^{(X,Y)}(R), \tag{4}$$

$$XY = \langle xy + sgn(x r_y) y r_x, \ |x| r_y + r_x |r_y| \rangle, \quad X, Y \in T_3^{(X,Y)}(R), \tag{5}$$

$XY = 0$ при $\left(\left| \frac{x}{r_x} \right| < 1 \right) \wedge \left(\left| \frac{y}{r_y} \right| < 1 \right) \wedge (sgn(r_x) = -sgn(r_y))$.

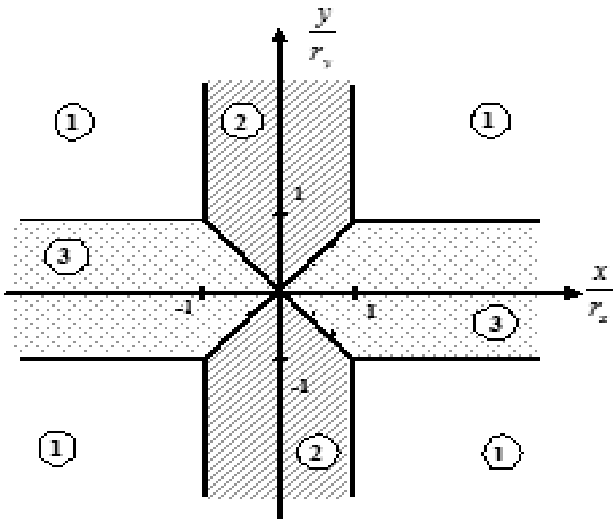

Рис. 1. Області, що відповідають множинам $T_1^{(X,Y)}(R)$, $T_2^{(X,Y)}(R)$, $T_3^{(X,Y)}(R)$

Задача полягає у визначенні необхідних і достатніх умов, що забезпечують виконання закону дистрибутивності в кожній з множин $T_1^{(X,Y)}(R)$, $T_2^{(X,Y)}(R)$, $T_3^{(X,Y)}(R)$.

Основний результат. Для подальшого дослідження введемо такі позначення:

$$T_1^{(A,B)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \frac{|b|}{|r_b|} \geq 1, \ a, r_a, b, r_b \in R \right\},$$

$$T_1^{(A,C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \frac{|c|}{|r_c|} \geq 1, \ a, r_a, c, r_c \in R \right\},$$

$$T_1^{(A,B+C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} \geq 1, \right.$$
$$\left. a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in R \right\},$$

$$T_2^{(A,B)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \leq \frac{|b|}{|r_b|}, \ a, r_a, b, r_b \in R \right\},$$

$$T_2^{(A,C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1,\ \frac{|a|}{|r_a|} \leq \frac{|c|}{|r_c|},\ a, r_a, c, r_c \in R \right\},$$

$$T_2^{(A,B+C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|a|}{|r_a|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \leq \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|}, \right.$$
$$\left. a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in R \right\},$$

$$T_3^{(A,B)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle b, r_b \rangle \mid \frac{|b|}{|r_b|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \geq \frac{|b|}{|r_b|},\ a, r_a, b, r_b \in R \right\},$$

$$T_3^{(A,C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle c, r_c \rangle \mid \frac{|c|}{|r_c|} < 1,\ \frac{|a|}{|r_a|} \geq \frac{|c|}{|r_c|},\ a, r_a, c, r_c \in R \right\},$$

$$T_3^{(A,B+C)}(R) = \left\{ \langle a, r_a \rangle, \langle (b+c), r_c \rangle \mid \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} < 1, \frac{|a|}{|r_a|} \geq \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|}, \right.$$
$$\left. a, r_a, (b+c), (r_b + r_c) \in R \right\}.$$

Розглянемо за яких умов пара інтервалів A, $B{+}C$ буде належати до підмножини $T_n^{(A,B+C)}(R)$, $n = 1, 2, 3$, з тим же значенням n, що і пари інтервалів: $A, B \in T_n^{(A,B)}(R)$, $A, C \in T_n^{(A,C)}(R)$. З цією метою доведемо таку лему.

Лема 1. *Нехай*

$$A, B \in T_n^{(A,B)}(R), \quad A, C \in T_n^{(A,C)}(R), \quad n = 1, 2, 3$$

тоді A, $B + C \in T_n^{(A,B+C)}(R)$, *якщо* $bc \geq 0$, $r_b r_c \geq 0$, *де* b, c, r_b, r_c *– центри та радіуси інтервалів* B, C *відповідно.*

Доведення. 1. Нехай $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$, $A, C \in T_1^{(A,C)}(R)$. Доведемо, що A, $B + C \in T_1^{(A,B+C)}(R)$ при $bc \geq 0$, $r_b r_c \geq 0$.

Сума $B + C$ визначається так:

$$B + C = \langle b, r_b \rangle + \langle c, r_c \rangle = \langle b + c, r_b + r_c \rangle.$$

Інтервали $A, B + C$ належать множині $T_1^{(A,B+C)}(R)$ за умов:

$$\frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \quad \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} \geq 1. \tag{6}$$

Так як A, $B \in T_1^{(A,B)}(R)$, $A, C \in T_1^{(A,C)}(R)$, то

$$\frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \quad \frac{|b|}{|r_b|} \geq 1, \qquad \frac{|a|}{|r_a|} \geq 1, \qquad \frac{|c|}{|r_c|} \geq 1.$$

Запишемо нерівності $\frac{|b|}{|r_b|} \geq 1$, $\frac{|c|}{|r_c|} \geq 1$ у вигляді $|b| \geq |r_b|$, $|c| \geq |r_c|$ та просумуємо їх:

$$|b| + |c| \geq |r_b| + |r_c|,$$

або

$$\frac{|b| + |c|}{|r_b| + |r_c|} \geq 1. \tag{7}$$

Відомо, що $|b| + |c| \geq |b+c|$, $|r_b| + |r_c| \geq |r_b + r_c|$, причому рівність виконується тільки при $bc \geq 0$, $r_b r_c \geq 0$ відповідно. Враховуючи цей факт та порівнюючи умови (6) і (7) можна зробити висновок, що інтервали A, $B + C$ належать множині $T_1^{(A,B+C)}$ за умови однакових знаків центрів та радіусів інтервалів B, C.

Доведення інших випадків проводиться аналогічно. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай*

$$A, B \in T_n^{(A,B)}(R), \quad A, C \in T_n^{(A,C)}(R), \quad n = 1, 2, 3,$$

тоді для виконання закону дистрибутивності

$$A(B + C) = AB + AC$$

необхідно та достатньо виконання такої умови: $A,\ B + C \in T_n^{(A,B+C)}(R)$, $n = 1, 2, 3$.

Доведення. Необхідність. Розглянемо такі випадки: 1. $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$, та $A, C \in T_1^{(A,C)}(R)$, а $A, (B + C) \in T_3^{(A,B+C)}(R)$. 2. $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$, та $A, C \in T_3^{(A,C)}(R)$, а $A, (B + C) \in T_1^{(A,B+C)}(R)$.

Випадок 1. Нехай $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$ та $A, C \in T_1^{(A,C)}(R)$, а $A, B + C \in T_3^{(A,B+C)}(R)$, тоді за формулою (3) маємо

$$AB = \langle ab + sgn(ab) r_a r_b,\ |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$

$$AC = \langle ac + sgn(ac) r_a r_c,\ |a| r_c + |c| r_a \rangle$$

Визначимо суму :

$$AB + AC = \langle a(b + c) + sgn(a(b + c)) r_a (r_b + r_c),\ |a|(r_b + r_c) + (|b| + |c|) r_a \rangle. \quad (8)$$

Так як $A, B + C \in T_3^{(A,B+C)}(R)$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (5):

$$A(B + C) = \langle a(b + c) + sgn(a(r_b + r_c))(b + c) r_a,\ |a|(r_b + r_c) + r_a(|r_b + r_c|) \rangle. \quad (9)$$

Згідно з означенням рівності двох інтервалів: інтервали $AB + AC$ і $A(B + C)$ рівні, якщо співпадають їх центри та радіуси. Розглянемо центри інтервалів $AB + AC$ і $A(B + C)$ та визначимо за яких умов можлива їх рівність. З (8) та (9) випливає, що рівність

$$a(b + c) + sgn(a(b + c)) r_a (r_b + r_c) = a(b + c) + sgn(a(r_a + r_c))(b + c) r_a$$

центрів інтервалів $AB + AC$ і $A(B + C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність $\frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} = 1$, яка суперечить умові $A, B + C \in T_3^{(A,B+C)}(R)$.

Випадок 2. Нехай $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$ та $A, C \in T_3^{(A,C)}(R)$ а $A, B + C \in T_1^{(A,B+C)}(R)$, тоді за формулою (3) для $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$ маємо

$$AB = \langle ab + sgn(ab) r_a r_b, |a| r_b + |b| r_a \rangle.$$

Добуток для інтервалів $A, C \in T_3^{(A,C)}(R)$ обчислюємо за формулою (5):

$$AC = \langle ac + sgn(a r_c) c r_a, |a| r_c + r_a |r_c| \rangle.$$

Визначимо суму $AB + AC$:

$$AB + AC = \langle a(b + c) + r_a sgn(a)(r_b sgn(b) + c sgn(r_c)), |a|(r_b + r_c) + (|b| + |r_c|) r_a \rangle \quad (10)$$

Так як $A, B+C \in T_1^{(A,B+C)}(R)$, то добуток інтервалів обчислимо за формулою (3):

$$A(B+C) = \langle a(b+c) + sgn(a(b+c))r_a(r_b+r_c), |a|(r_b+r_c) + |b+c|r_a\rangle \qquad (11)$$

З (10) та (11) випливає, що рівність

$$a(b+c) + r_a sgn(a)(r_b sgn(b) + c sgn(r_c)) = a(b+c) + sgn(a(b+c))r_a(r_b+r_c),$$

або

$$a(b+c) + r_a sgn(a)(r_b sgn(b) + c\, sgn(r_c)) = a(b+c) + r_a sgn(a) sgn(b+c)(r_b+r_c)$$

центрів інтервалів $AB+AC$ і $A(B+C)$ можлива тільки тоді, якщо виконується рівність $\frac{c}{r_c} = 1$, яка суперечить умові $A, C \in T_3^{(A,C)}(R)$.

Інші можливі випадки доводяться аналогічно.

Достатність. Нехай $A, B \in T_1^{(A,B)}(R)$, та $A, C \in T_1^{(A,C)}(R)$, $A, B{+}C \in T_1^{(A,B+C)}(R)$, тоді за формулою (3) маємо

$$AB = \langle ab + sgn(ab)r_a r_b, |a|r_b + |b|r_a\rangle,$$

$$AC = \langle ac + sgn(ac)r_a r_c, |a|r_c + |c|r_a\rangle,$$

$$A(B+C) = \langle a(b+c) + sgn(a(b+c))r_a(r_b+r_c), |a|(r_b+r_c) + |b+c|r_a\rangle. \qquad (12)$$

Визначимо суму $AB+AC$:

$$AB+AC = \langle a(b+c) + sgn(a(b+c))r_a(r_b+r_c), |a|(r_b+r_c) + (|b|+|c|)r_a\rangle. \qquad (13)$$

Так як, згідно з лемою, $A, B+C \in T_1^{(A,B+C)}(R)$ при $bc \geq 0$, то $|b|+|c| = |b+c|$, тому вираз (13) набуває вигляду

$$AB+AC = \langle a(b+c) + sgn(a(b+c))r_a(r_b+r_c), |a|(r_b+r_c) + (|b+c|)r_a\rangle. \qquad (14)$$

З порівняння виразів (12) та (14) випливає, що має місце рівність

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Аналогічним чином проводиться доведення в інших випадках:

$$A, B \in T_2^{(A,B)}(R), \text{ та } A, C \in T_2^{(A,C)}(R), \quad A, B+C \in T_2^{(A,B+C)}(R)$$

$$A, B \in T_3^{(A,B)}(R), \text{ та } A, C \in T_3^{(A,C)}(R), \quad A, B+C \in T_3^{(A,B+C)}(R)$$

Теорема доведена.

Приклад. Нехай $A = \langle 1, -5\rangle$, $B = \langle 1, -2\rangle$, $C = \langle 2, -3\rangle$. Знайдемо суму інтервалів $B = \langle 1, -2\rangle, C = \langle 2, -3\rangle$: $B{+}C = \langle 1{+}2, -2{-}3\rangle = \langle 3, -5\rangle$. Визначимо, до якої з підмножин $T_n^{(X,Y)}(R)$, $n = 1, 2, 3$ належить кожна пара інтервалів. Для $A = \langle 1, -5\rangle$, $B = \langle 1, -2\rangle$ виконуються такі умови:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1, \quad \frac{|b|}{|r_b|} = \frac{1}{2}, \quad \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|b|}{|r_b|},$$

тобто $A, B \in T_2^{(A,B)}(R)$. Для $A = \langle 1, -5\rangle$, $C = \langle 2, -3\rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1, \quad \frac{|c|}{|r_c|} = \frac{2}{3}, \quad \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|c|}{|r_c|},$$

тобто $A, C \in T_2^{(A,C)}(R)$. Для $A = \langle 1, -5\rangle$, $B + C = \langle 3, -5\rangle$:

$$\frac{|a|}{|r_a|} = \frac{1}{5} < 1, \quad \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|} = \frac{3}{5}, \quad \frac{|a|}{|r_a|} < \frac{|b+c|}{|r_b + r_c|},$$

тобто $A, B + C \in T_2^{(A,B+C)}(R)$. Так як всі пари інтервалів належать до підмножини з номером 2, то згідно з теоремою виконується закон дистрибутивності. Перевіримо це. Множення інтервалів виконуємо за формулою (4).

$$AB = \langle 1 \cdot 1 + sgn(1 \cdot (-5)) \cdot 1 \cdot (-2),\ 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-2)\rangle = \langle 3, -15\rangle,$$

$$AC = \langle 1 \cdot 2 + sgn(2 \cdot (-5)) \cdot 1 \cdot (-3),\ 2 \cdot (-5) + 5 \cdot (-3)\rangle = \langle 5, -25\rangle,$$

$$A(B + C) = \langle 1 \cdot 3 + sgn(3 \cdot (-5)) \cdot 1 \cdot (-5),\ 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-5)\rangle = \langle 8, -40\rangle, \quad (15)$$

$$AB + AC = \langle 3, -15\rangle + \langle 5, -25\rangle = \langle 8, -40\rangle. \quad (16)$$

З порівняння виразів (15) та (16) випливає, що виконується закон дистрибутивності.

Висновки. Таким чином, доведені необхідні та достатні умови, що забезпечують виконання закону дистрибутивності для інтервалів, які належать до однієї з підмножин $T_n^{(X,Y)}(R)$, $n = 1, 2, 3$.

1. *Sunaga T.* Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // RAAG Memoirs. – 1958. – №2. – P. 547–564.
2. *Warmus M.* Calculus of approximations // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1956. – V. IV, №5. – P. 253–259.
3. *Moore R.* Interval analysis. – New Jersey: Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1966. – 180 p.
4. *Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. математ. журнал. - 1962. - Т. 3. - №5. – С.701-709.
5. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления. – Москва: Мир, 1987. – 360 с.
6. *Калмыков С.А.* Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986. - 222с.
7. *Kaucher E.* Interval Analysis in the Extended Interval Space I(R) // Computing Suppl. – 1980. – V.2. – P. 33–49.
8. *Gardenes E.* Fundamentals of SIGLA, an Interval Computing System over the Completed Set of Intervals // Computing. – 1980. – V.24. – P.161–179.
9. *Markov S.M.* Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals // Mathematica Balkanika, New Series. – 1992. – V.6. – P. 269–304.
10. *Popova E.D.* Generalized Interval Distributive Relations // Preprint No 2, Institute of Mathematics and Computer Science, Bulgarian Academy of Sciences. – Bulgaria, 1997. – 18p.
11. *Жуковська О.А.* Дослідження інтервальних арифметичних операцій в класичному та роз-ширеному просторах // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2008. – Т.5. – №5. – С.85–110.
12. *Жуковська О.А.* Метод обчислення добутку спрямованих інтервалів у формі центр–радіус в розширеному інтервальному просторі // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 6. – С. 144–149.
13. *Жуковська О.А.* Основи інтервального аналізу. – К.: Освіта України, 2008. – 126 с.

Одержано 20.02.2013