УДК 512.53+512.64

Зубарук О. В. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНІЄЇ НАПІВГРУПИ

In this paper we describe the matrix representations of a semigroup that is the simplest amplification of the wild semigroup $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$.

У цій роботі описано матричні зображення напівгрупи, яка є найпростішим посиленням дикої напівгрупи $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$.

Добре відомо, що у класичному випадку теорії матричних зображень скінченних груп, коли характеристика поля не ділить порядок групи (зокрема, для полів нульової характеристики), всі її нерозкладні зображення є незвідними прямими доданками регулярного зображення. Для напівгруп це вже не так навіть для полів нульової характеристики. У цій статті розглядається один із таких прикладів, а саме найпростіше посилення задачі про матричні зображення напівгрупи $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$, яка є дикою (в сенсі роботи [1]) за теоремою [2].

1. Формулювання основного результату. Протягом всієї статті K позначає поле характеристики $p \neq 2$.

Нехай S_{32}^0 позначає напівгрупу з нулем із системою твірних $0, a, b$ та визначальними співвідношеннями

1) $0^2 = 0,\ 0a = a0 = 0,\ 0b = b0 = 0;$

2) $a^3 = a,\ b^2 = b;$

3) $ab = 0.$

Ця напівгрупа є найпростішим посиленням нескінченної напівгрупи $S_{32} =< a, b \,|\, a^3 = a, b^2 = b >$, задача про опис матричних зображень якої є дикою.

Згідно загального означення матричних зображень напівгруп, матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K — це довільний гомоморфізм $T : S_{32}^0 \to M_n(K)$, де $M_n(K)$ напівгрупа (відносно множення) всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n називається розмірністю зображення T). Ми будемо завжди вважати, що матриця $T(0)$ є нульовою (по суті це не є обмеженням, бо при цій вимозі ми "втрачаємо" лише одне нерозкладне зображення розмірності 1, яке кожному елементу напівгрупи зіставляє одиничний елемент поля). Тоді зображення $T : S_{32}^0 \to M_n(K)$ напівгрупи S_{32}^0 однозначно задається парою матриць $R = \{A = T(a), B = T(b)\}$, такою, що $A^3 = A$, $B^2 = B$, $AB = 0$.

Матричні зображення $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи S_{32}^0 називаються еквівалентними, якщо $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ для деякої оборотної матриці C. Матричне зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $S = S_{32}^0$ (як і для будь-якої скінченної напівгрупи) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Мета цієї роботи — установити канонічну форму матричних зображень напівгрупи S_{32}^0.

Теорема 1. *Будь-яке матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K характеристики $p \neq 2$ еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$b \to B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & E & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Тут E позначає одиничні матриці деяких порядків $m \geq 0$.

Використовуючи цю теорему, в останньому параграфі ми опишемо (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні матричні зображення напівгрупи S_{32}^0.

Всі доведення проводяться за схемою, запропонованою В. М. Бондаренком (див., зокрема, [3]).

2. Доведення теореми 1. Нехай $R = \{A, B\}$ — матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що матриця A має жордановий нормальний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо матрицю B у блоковому вигляді, який відповідає запису A:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Спочатку скористаємося рівністю $AB = 0$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{або} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ -B_{21} & -B_{22} & -B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цього маємо: $B_{11} = 0$, $B_{12} = 0$, $B_{13} = 0$, $B_{21} = 0$, $B_{22} = 0$, $B_{23} = 0$, тобто

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Далі використаємо співвідношення $B^2 = B$, а саме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{33}B_{31} & B_{33}B_{32} & B_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо наступні рівності:

$$B_{33}B_{31} = B_{31} \tag{1}$$

$$B_{33}B_{32} = B_{32} \tag{2}$$

$$B_{33}^2 = B_{33} \tag{3}$$

Таким чином, наше матричне зображення $R = \{A, B\}$ породжується матрицями

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

де блоки B_{31} , B_{32} і B_{33} задовольняють співвідношення (1– (3).

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення $R = \{A, B\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{B_{31}} & \overline{B_{32}} & \overline{B_{33}} \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{A} = XAX^{-1}$, $\overline{B} = XBX^{-1}$, що еквівалентно $\overline{A}X = XA$, $\overline{B}X = XB$. Зрозуміло, що з подібності матриць $\overline{A}$ і A випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність $\overline{A}X = XA$ (де матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць A і B):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ -X_{21} & -X_{22} & -X_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} & 0 \\ X_{21} & -X_{22} & 0 \\ X_{31} & -X_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши блоки обох матриць, маємо: $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{23} = 0$, $X_{31} = 0$, $X_{32} = 0$, а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо рівність $\overline{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{B_{31}} & \overline{B_{32}} & \overline{B_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Це означає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{B_{31}}X_{11} & \overline{B_{32}}X_{22} & \overline{B_{33}}X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ X_{33}B_{31} & X_{33}B_{32} & X_{33}B_{33} \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цієї рівності одержуємо, що

$$\overline{B_{31}}X_{11} = X_{33}B_{31}, \quad \overline{B_{32}}X_{22} = X_{33}B_{32}, \quad \overline{B_{33}}X_{33} = X_{33}B_{33},$$

тобто (в еквівалентній формі)

$$\overline{B_{31}} = X_{33}B_{31}X_{11}^{-1} \tag{5}$$

$$\overline{B_{32}} = X_{33}B_{32}X_{22}^{-1} \tag{6}$$

$$\overline{B_{33}} = X_{33}B_{33}X_{33}^{-1} \tag{7}$$

Таким чином, ми показали, що матричні зображення $R = \{A, B\}$ та $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли справедливі рівності (5) – (7). Іншими словами, мовою елементарних перетворень, з цих рівностей і вигляду матриці X випливає, що допустимими перетвореннями для блоків B_{31}, B_{32} і B_{33} зображення R є лише наступні перетворення а) – в) та їх композиції:

а) зі стовпцями матриці B_{31} можна виконувати довільне елементарне перетворення;

б) зі стовпцями матриці B_{32} можна робити довільне елементарне перетворення;

в) зі стовпцями матриці B_{33} можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому з рядками матриць B_{31}, B_{32} і B_{33} необхідно виконати обернене елементарне перетворення.

Аналізуючи вище сказане, маємо, що задача про опис (з точністю до еквівалентності) матричних зображень вигляду (4) напівгрупи S_{32}^0, а отже, і взагалі всіх її матричних зображень, еквівалентна задачі про опис матриць B_{31}, B_{32} і B_{33} з точністю до еквівалентності, яка задається рівностями (5) – (7) або ж перетвореннями а), б) та в).

Далі проведемо дослідження цієї задачі про матриці B_{31}, B_{32} і B_{33}.

Оскільки $B_{33}^2 = B_{33}$ (за рівністю (3)), то перетвореннями а) – в) (еквівалентно використанню рівності (7)) зведемо матрицю B_{33} до наступного (жорданового) вигляду

$$B_{33} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Далі, розбивши, відповідно розбиттю на блоки матриці B_{33}, матриці B_{31} і B_{32} на дві горизонтальні смуги та застосувавши рівності (1), (2), отримуємо:

$$B_{31} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{32} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де C і D — деякі матриці[1].

Розглянемо такі допустимі перетворення матриць B_{31}, B_{32} і B_{33}, які не псують їх загального вигляду, та проаналізуємо перетворення матриць C і D, які при цьому виникають.

По-перше, зі стовпцями матриці C можна виконувати довільне елементарне перетворення (див. допустиме для B_{31}, B_{32} і B_{33} перетворення а)). По-друге, зі стовпцями матриці D можна робити довільне елементарне перетворення (див. допустиме для B_{31}, B_{32} і B_{33} перетворення б)). По-третє, з рядками матриць C і D можна робити одне і теж довільне елементарне перетворення; при цьому таке ж перетворення необхідно зробити з першою горизонтальною смугою матриці B_{33}, і обернене до нього — з першою вертикальною смугою матриці B_{33} (див. допустиме для B_{31}, B_{32} і B_{33} перетворення в)). Нарешті, по-четверте, якщо перетворення вигляду в) зробити з другою вертикальною смугою матриці B_{33}, то загальний вигляд матриць B_{31}, B_{32} і B_{33} не зміниться.

Отже, допустимими для матриць C і D є довільні одночасні елементарні перетворення з їх рядками та незалежні елементарні перетворення з їх стовпцями; звичайно ж, що допустимими є і їх композиції.

Аналогічно випадку матричних зображень R і $\overline{R}$ можна довести, розглядаючи матриці B_{31}, B_{32} ,B_{33} вигляду (8), (9) та матриці $\overline{B_{31}}$, $\overline{B_{32}}$, $\overline{B_{33}}$ такого ж вигляду, разом з перетвореннями (5) – (7), що інших допустимих перетворень для матриць C і D немає.

Скориставшись рівностями (4), (8) і (9) маємо, що наше зображення R зведене до наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & D & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Як добре відомо, матриці C і D, мають (з точністю до вказаних вище допустимих перетворень) наступний вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Формально матриці B_{31}, B_{32} і B_{33} потрібно замінити іншими символами, наприклад $\widetilde{B_{31}}$, $\widetilde{B_{32}}$ і $\widetilde{B_{33}}$, але для зручності і за домовленістю в теорії матричних задач ми зберегли старі позначення.

Після підстановки цих матриць в (10), отримуємо:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & E & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Отже, теорема 1 доведена.

3. Нерозкладні матричні зображення напівгрупи S_{32}^0. Використовуючи теорему 1, опишемо (з точністю до еквівалентності) всі нерозкладні матричні зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K.

Теорема 2. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K характеристики $p \neq 2$ вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 0, \quad b \to 0$;

2) $a \to 0, \quad b \to 1$;

3) $a \to 1, \quad b \to 0$;

4) $a \to -1, \quad b \to 0$;

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Справді, за теоремою 1 маємо, що будь-яке матричне зображення напівгрупи S_{32}^0 над полем K характеристики $p \neq 2$, еквівалентне прямій сумі зображень вигляду 1)–7). Крім цього, зображення 1)–7) попарно нееквівалентні.

Переконаємося, що всі зображення 1)–7) нерозкладні. Нехай існує розкладне зображення R вигляду 1)–7). Тоді, відповідно до вище зазначеного, воно еквівалентне прямій сумі R_0 деяких зображень вигляду 1)–7) меншої розмірності. Оскільки еквівалентні зображення мають подібні матриці, що відповідають елементу a, то можливі лише наступні випадки:

а) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 3) і 1);

б) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 3) і 2);

в) зображення R вигляду 6) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 4) і 1);

г) зображення R вигляду 6) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 4) і 2);

д) зображення R вигляду 7) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 3), 4) і 1);

е) зображення R вигляду 7) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень 3), 4) і 2).

Але всі ці випадки неможливі. Дійсно, легко перевірити, що у кожному з перерахованих випадків матриці $R(b)$ та $R_0(b)$ не є подібними.

Теорема доведена.

Автор щиро вдячна В. М. Бондаренку за постановку задачі та цінні поради.

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. Bondarenko V. M. Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases. – Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine (Mathematics and its Applications), V. 63. – Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2006. – 168 pp.
3. Бондаренко В. М., Костишин Е. М. Модулярні зображення напівгрупи $\boldsymbol{T_2}$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. – 2011. – Вип. 22. – С. 26–34.

Одержано 04.03.2013