

УДК 517.9

О.В. Карпенко (Національний технічний університет України "КПІ")

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ КОЛИВНІСТЮ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

It is established the conditions of preservation of oscillation of the solutions of non-linear differential equations and non-linear difference equations provided that the corresponding solutions of linear differential equations and linear difference equations have such property.

Отримано умови збереження коливності розв'язків нелінійних диференціальних та нелінійних різницевих рівнянь, при наявності такої властивості у відповідних розв'язків лінійних диференціальних та лінійних різницевих рівнянь.

Вступ.

Важливим методом дослідження диференціальних рівнянь є перехід до різницевих рівнянь, які отримуються з диференціальних заміною похідної відповідним різницеvim відношенням. Інтенсивне вивчення різницевих рівнянь почалося в другій половині ХХ століття, яке було зумовлено в першу чергу розвитком технічних наук та обчислювальної техніки. На сьогоднішній день дослідження даних рівнянь залишається актуальною задачею, оскільки вони є зручними математичними моделями для багатьох прикладних процесів - біологічних, економічних, фінансових. Це пов'язане з тим, що за реальними моделями ми спостерігаємо неперервно, а в конкретні дискретні моменти часу.

Якісні властивості розв'язків (стійкість, обмеженість, періодичність тощо) диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь, а також зв'язок між ними вивчалися в роботах багатьох авторів [1, 3, 6, 7, 9, 10].

Питання збереження коливності розв'язків при переході від диференціальних до відповідних різницевих рівнянь розглядалося у роботах [2], [5].

Щодо нелінійних різницевих рівнянь та коливності їх розв'язків, відмітимо праці [11], [8].

Ця праця присвячена дослідженню зв'язку між коливними властивостями розв'язків нелінійних диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь. А саме, отримано умови, при яких із коливності розв'язку лінійної системи різницевих рівнянь впливає коливність відповідного розв'язку нелінійного диференціального рівняння. Вивчена також обернена задача.

Дана робота складається зі вступу та двох частин. В першій частині приводиться постановка задачі та необхідні означення. Основні результати викладені в другій частині.

1. Постановка задачі. Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння:

$$\ddot{x} + p(t)x + \varepsilon f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (1)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $t \in [0, a]$.

Відносно функцій $f(t, x, y)$ та $p(t)$ будемо вважати, що при $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, a]$:

- 1) $f(t, x, y)$ неперервна за сукупністю змінних;
- 2) $f(t, x, y)$ має лінійний ріст за x і y , тобто $\exists N > 0$ така, що виконується нерівність

$$|f(t, x, y)| \leq N(1 + |x| + |y|);$$

3) $p(t) \geq 0$;

4) $p(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[0, a]$.

Рівняння (1) будемо розглядати при початкових даних $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, які належать компактному $(x_0, y_0) \in K$, що не містить точку $(0, 0)$.

При $\varepsilon = 0$ рівняння (1) перетворюється до вигляду

$$\ddot{x} + p(t)x = 0. \quad (2)$$

Відповідне для (2) різницеве рівняння має вигляд

$$\Delta_k^2 x + h^2 p(kh)x(kh) = 0, \quad (3)$$

де $\Delta_k x = x((k+1)h) - x(kh)$, $\Delta_k^2 x = \Delta_k(\Delta_k x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $h > 0$ – крок різницевого рівняння.

Відповідні до рівнянь (2) і (3) системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -p(t)x; \end{cases} \quad (4)$$

та

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + hy_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hp(kh)x_k^h, \end{cases} \quad (5)$$

де $x_0^h = x_0$, $y_0^h = y_0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Поряд із системою (5) розглянемо і нелінійну систему

$$\begin{cases} x_{k+1}^h = x_k^h + hy_k^h, \\ y_{k+1}^h = y_k^h - hp(kh)x_k^h - \varepsilon hf(kh, x_k^h, y_k^h). \end{cases} \quad (6)$$

Приведемо необхідні в подальшому означення.

Означення 1. Розв'язки систем (4) та (5) назвемо відповідними, якщо $x(0) = x_0^h = x_0$, $y(0) = y_0^h = y_0$.

Означення 2. [5] Скажемо, що розв'язок x_k^h рівняння (3) має в точці t_k зміну знаку, якщо виконується одна з умов:

- 1) $x_k^h x_{k+1}^h < 0$;
- 2) $x_k^h = 0$, $x_{k-1}^h x_{k+1}^h < 0$.

Означення 3. [5] Якщо на деякому інтервалі розв'язок x_k^h рівняння (3) має не менше двох змін знаку, то його будемо називати коливним на цьому інтервалі.

Означення 4. [4] Розв'язок $x(t)$ рівняння (2) назвемо коливним на даному проміжку, якщо він перетворюється в нуль не менше, ніж у двох точках.

У даній роботі вивчаються умови, при яких із коливності першої компоненти розв'язку системи (5) впливає коливність відповідного розв'язку (1) та умови, при яких із коливності розв'язку рівняння (2) впливає коливність першої компоненти відповідного розв'язку (6).

2. Основні результати. Приведемо результат про зв'язок між коливністю розв'язку нелінійного диференціального рівняння та відповідного розв'язку лінійного різницевого рівняння.

Має місце теорема.

Теорема 1. *При виконанні умов 1) - 4) існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливе твердження:*

якщо перша компонента розв'язку системи (5) має на інтервалі $[0, a]$ принаймні чотири зміни знаку, то відповідний розв'язок рівняння (1) коливний на $[0, a]$.

Доведення. Оскільки початкові дані (x_0, y_0) рівняння (2) лежать на компактній K , то з леми 2 [2] випливає, що існує $\Delta > 0$ таке, що амплітуда коливань будь-якого розв'язку з початковими даними $(x_0, y_0) \in K$ обмежена знизу:

$$M_k^x \geq \Delta.$$

Покажемо близькість розв'язків (1) і (2).

Запишемо рівняння (1) у вигляді системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -p(t)x - \varepsilon f(t, x, y). \end{cases}$$

Позначимо $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $z(0) = z_0$.

Тоді

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t)z - \varepsilon f(t, z). \quad (7)$$

Рівняння (2) перепишемо у вигляді

$$\dot{z}_1 = A(t)z_1, \quad (8)$$

де $z_1(0) = z_0$.

Позначимо $X(t, s)$ – матрицант системи (8). Отже

$$z_1(t) = X(t, 0)z_0. \quad (9)$$

Переписавши (7) в інтегральній формі отримаємо

$$z(t) = X(t, 0)z_0 + \varepsilon \int_0^t X(t, s)f(s, z(s))ds. \quad (10)$$

З умови лінійного росту $f(t, x, y)$ маємо також

$$|f(t, z)| \leq N(1 + |z|).$$

Тоді для відповідних розв'язків рівнянь (7) і (8) із (9) та (10) отримуємо:

$$|z(t) - z_1(t)| \leq \varepsilon \int_0^t CN(1 + |z(s)|)ds, \quad (11)$$

де $\|X(t, s)\| \leq C$, $t, s \in [0, a]$, C – деяка стала.

Оцінимо тепер $z(s)$. Із (10) маємо

$$|z(t)| \leq C |z_0| + \varepsilon N C a + \varepsilon N C \int_0^t |z(s)| ds,$$

що, з урахуванням леми Гронуола-Беллмана приводить при $t \in [0, a]$ до оцінки:

$$|z(t)| \leq (C |z_0| + \varepsilon N C a) e^{\varepsilon N C a}.$$

Оскільки $z_0 \in K$, то $\exists R > 0$ така, що $|z_0| \leq R$. Тоді

$$|z(t)| \leq (C R + \varepsilon N C a) e^{\varepsilon N C a} \equiv B,$$

де B – деяка стала.

Із (11) тоді випливає нерівність

$$|z(t) - z_1(t)| \leq \varepsilon \int_0^t C N (1 + B) ds \leq \varepsilon a N C (1 + B), \quad (12)$$

що оцінює близькість відповідних розв'язків рівнянь (1) і (2).

Можна показати, що якщо розв'язок системи (5) має три зміни знаку, то відповідний розв'язок рівняння (2) коливний на $[0, a]$.

Тоді якщо розв'язок системи (5) має чотири зміни знаку на $[0, a]$, то розв'язок (2) має принаймі три нулі на цьому інтервалі. Звідси із оцінки (12), леми 2 [2] та відповідності розв'язків рівнянь (1) та (3) випливає, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що розв'язок нелінійного диференціального рівняння (1) має принаймі два нулі на $[0, a]$, тобто є коливним.

Наступний результат показує зв'язок між коливністю розв'язку лінійного диференціального рівняння та відповідного розв'язку системи нелінійних різницевих рівнянь.

Теорема 2. При виконанні умов 1) - 4) існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливе твердження:

якщо лінійне диференціальне рівняння (2) має принаймі чотири нулі на $[0, a]$, то відповідний розв'язок системи нелінійних різницевих рівнянь (6) має коливну на $[0, a]$ першу компоненту.

Доведення.

Встановимо оцінку різниці між відповідними розв'язками систем (5) і (6).

З позначенням $\varphi_k^h = \begin{pmatrix} x_k^h \\ y_k^h \end{pmatrix}$ система (6) переписується у вигляді

$$\varphi_{k+1}^h = \varphi_k^h + h A(kh) \varphi_k^h - h \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon f(kh, \varphi_k^h) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де $A(kh) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(kh) & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_0^h = \varphi_0$.

Аналогічно з позначенням $\tau_k^h = \begin{pmatrix} x_k^h \\ y_k^h \end{pmatrix}$ система (5) набере вигляду

$$\tau_{k+1}^h = \tau_k^h + hA(kh)\tau_k^h, \quad (14)$$

де $\tau_0^h = \varphi_0 = \tau_0$.

Позначимо $X(n, k)$ – матрицант системи (14). Отже

$$\tau_k^h = X(k, 0)\tau_0. \quad (15)$$

Неважко бачити, що розв'язок системи (13) представляється у вигляді

$$\varphi_k^h = X(k, 0)\varphi_0 + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} X(k-1, n)f(nh, \varphi_n^h). \quad (16)$$

Із (15) та (16) маємо

$$|\varphi_k^h - \tau_k^h| \leq h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} X(k-1, n)f(nh, \varphi_n^h). \quad (17)$$

З умови лінійного росту $f(kh, x_k^h, y_k^h)$ отримуємо :

$$|f(kh, \varphi_k^h)| \leq N(1 + |\varphi_k^h|),$$

звідки маємо

$$\begin{aligned} |\varphi_k^h| &\leq C_1 |\varphi_0| + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N(1 + |\varphi_n^h|) \leq \\ &\leq C_1 |\varphi_0| + h\varepsilon C_1 N a + h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N |\varphi_n^h|, \end{aligned}$$

де $\|X(n, k)\| \leq C_1$ при $kh \in [0, a]$.

За дискретним аналогом леми Гронуола-Беллмана [3, стр.41] при $kh \in [0, a]$:

$$|\varphi_k^h| \leq (C_1 |\varphi_0| + h\varepsilon C_1 N a) e^{\varepsilon C_1 N a}.$$

Оскільки $\varphi_0 \in K$, то $\exists M > 0$ така, що $|\varphi_0| \leq M$. Тоді

$$|\varphi_k^h| \leq (C_1 M + h\varepsilon C_1 N a) e^{h\varepsilon C_1 N a} \equiv Q,$$

де Q – деяка стала.

Отже оцінка (17) набирає вигляду

$$|\varphi_k^h - \tau_k^h| \leq h\varepsilon \sum_{n=0}^{k-1} C_1 N(1 + Q) \leq h\varepsilon C_1 N(1 + Q)a. \quad (18)$$

З теореми 1 [2] випливає, що якщо розв'язок диференціального рівняння (2) має на інтервалі $[0, a]$ принаймі три нулі, то існує $h_0 > 0$ таке, що відповідний

розв'язок рівняння (3) коливний на цьому інтервалі, тобто має не менше двох змін знаку.

Аналогічно лемі 2 [2] можна показати, що існує $\Delta_1(h) > 0$ таке, що амплітуда коливань будь-якого розв'язку (3) обмежена знизу

$$M_p^x(h) \geq \Delta_1, \quad (19)$$

де $M_p^x(h) = \max_{k \in [p+1, m]} |x_k^h|$, t_p і t_m – дві послідовні точки змін знаку.

Тоді із (18), (19) випливає, що існують $\varepsilon_0 > 0$, $h_0 > 0$ такі, що якщо розв'язок лінійного диференціального рівняння (2) має чотири нулі на $[0, a]$, то відповідний розв'язок системи нелінійних різницевих рівнянь (6) має на цьому інтервалі принаймні дві зміни знаку, тобто є коливним.

1. Карпенко О. В. Про зв'язок між існуванням періодичних розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь: Вісник ОНУ(Мат. і мех.). – №4. – 2012.
2. Карпенко О. В., Кравець В. І., Станжицький О. М. Коливність розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку. Укр.мат.журн. – 2013. – Т.65(2). – с.226-235.
3. Мартинюк Д.І. Лекции по качественной теории разностных уравнений: К.:Наукова думка, 1972, –247с.
4. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник.- К.: Либідь, –2003.–600с.
5. Скалкина М.А. О колебаниях решений уравнений в конечных разностях. Изв. высших учебн.завед. Матем. –1959, –с.138-144.
6. Скалкина М.А. О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным: ДАН – 1955. – Т. 104. – № 4. – с. 505–508.
7. Станжицький О.М., Ткачук А.М. Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь. Укр.мат.журн.–2005.–№7, с.989-996.
8. Aragwal R. P. Asymptotic behavior of positive solutions if fourth-order non-linear difference equations. Ukrainian Math J.–2008–no.60(1).–с.8-27. (Ukraine)
9. Ravi. P. Agarwal, Bohner M., Said R. Grace, Donal O'Regan. Discrete Oscillation Theory. Hindawi Publishing Corporation. –2005. – 961 p.
10. L. Grüne. Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization. Springer-Verlag, Berlin. – 2002. – 231 p.
11. Ö. Öcalan. Linearized oscillation of nonlinear difference equations with advanced arguments. Archivum math. Brno. –45.– 2009.– 203-212.

Одержано 23.01.2013