УДК 519.21

Курченко О.О. (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ

In this article the strong consistent estimate of the covariance function parameter of the Gaussian random field with zero mean and covariance function

$$r_\beta(t,s) = \frac{1}{2}\left(\|t\|^\beta + \|s\|^\beta - \|t-s\|^\beta\right),\ \beta \in (0,2)$$

by using the Baxter sums is constructed. Also the confidence intervals are founded.

У цій статті за допомогою бакстерівських сум побудована сильно конзистентна оцінка параметра коваріаційної функції гауссового випадкового поля з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r_\beta(t,s) = \frac{1}{2}\left(\|t\|^\beta + \|s\|^\beta - \|t-s\|^\beta\right),\ \beta \in (0,2).$$

Також знайдені довірчі інтервали.

Вступ. Однією з найбільш вживаних моделей випадкового процесу з неперервним часом і довгостроковою залежністю є дробовий броунівський рух — гауссовий випадковий процес з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ t,s \in \mathbb{R},$$

де параметр $H \in (0,1)$ називається параметром Хюрста.

Узагальнення дробового броунівського руху на багатопараметричний випадок можна робити по–різному. Так, у монографії А. С. Моніна та Я. М. Яглома [1] дробовим броунівським полем називається гауссове випадкове поле з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною функцією

$$r_\beta(t,s) = \frac{1}{2}\left(\|t\|^\beta + \|s\|^\beta - \|t-s\|^\beta\right),\ t,s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де параметр $\beta \in (0,2)$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Інше узагальнення можна знайти в роботі А. Камонт [2].

Дробовий броунівський рух та дробове броунівське поле задовольняють умови теорем бакстерівського типу [3], [4], [5], [6]. Бакстерівські суми застосовують для оцінювання параметрів коваріаційних функцій. Так, в роботах [7], [8], [9] був застосований бакстерівський підхід для оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху. У статті [10] бакстерівські суми були використані для побудови оцінки параметра β коваріаційної функції дробового броунівського поля.

У цій статті за допомогою методу бакстерівських сум запропонована ще одна сильно конзистентна оцінка параметра β коваріаційної функції (1), визначені

довірчі інтервали та оцінена швидкість збіжності оцінки до істинного значення параметра.

1. Збіжність бакстерівських сум дробового броунівського поля. Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір. Нехай, далі, $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $h = (h_1, \ldots, h_d) \in (0, +\infty)^d$, $\Pi(t, h) = [t, t + h] = [t_1, t_1 + h_1] \times \ldots \times [t_d, t_d + h_d]$ — d–вимірний паралелепіпед, $f : \Pi \to \mathbb{R}$ — дійсна функція d змінних. Приріст $f_{\Pi(t,h)}$ функції f на d–вимірному паралелепіпеді $\Pi(t, h)$ визначимо рівністю:

$$f_{\Pi(t,h)} = \sum_{i_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{i_1+\ldots+i_d} f\left(t_1 + i_1 h_1, \ldots, t_d + i_d h_d\right).$$

Цей приріст можна зобразити у вигляді суперпозиції приростів наступним чином:

$$f_{\Pi(t,h)} = \Delta_{h_d}^{(d)} \ldots \Delta_{h_2}^{(2)} \Delta_{h_1}^{(1)} f(t),$$

де $\Delta_{h_r}^{(r)} f(t_1, \ldots, t, \ldots, t_d) = f(t_1, \ldots, t_r + h_r, \ldots, t_d) - f(t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_d)$, $1 \le r \le d$.

Для дробового броунівського поля $X_\beta(t)$, $t \in [0, 1]^d$ розглянемо послідовність бакстерівських сум

$$S_n = \sum_{j_1=0}^{n-1} \ldots \sum_{j_d=0}^{n-1} (X_{\beta,j})^2,\ n \ge 1,$$

де $X_{\beta,j}$ — приріст випадкового поля X_β на d–вимірному паралелепіпеді $\left[\frac{j_1}{n}, \frac{j_1+1}{n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{j_d}{n}, \frac{j_d+1}{n}\right]$.

Для обчислення математичного сподівання ES_n знайдемо $E(X_{\beta,j})^2$:

$$E(X_{\beta,j})^2 = E\left(\sum_{i_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{|i|} X_\beta\left(\frac{j_1 + i_1}{n}, \ldots, \frac{j_d + i_d}{n}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i_1,k_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d,k_d=0}^{1} (-1)^{|i|+|k|} E\Bigg(X_\beta\left(\frac{j_1 + i_1}{n}, \ldots, \frac{j_d + i_d}{n}\right) \times$$

$$X_\beta\left(\frac{j_1 + k_1}{n}, \ldots, \frac{j_d + k_d}{n}\right)\Bigg) = \frac{1}{2} \sum_{i_1,k_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d,k_d=0}^{1} (-1)^{|i|+|k|} \Bigg(\left\|\frac{j+i}{n}\right\|^\beta +$$

$$+ \left\|\frac{j+k}{n}\right\|^\beta - \left\|\frac{k-i}{n}\right\|^\beta\Bigg) = -\frac{1}{2} \sum_{i_1,k_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d,k_d=0}^{1} (-1)^{|i|+|k|} \|k - j\|^\beta \frac{1}{n^\beta},$$

де $i = (i_1, \ldots, i_d)$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $|i| = i_1 + \ldots + i_d$.

Неважко переконатися, що

$$-\frac{1}{2} \sum_{i_1,k_1=0}^{1} \ldots \sum_{i_d,k_d=0}^{1} (-1)^{|i|+|k|} \|k - j\|^\beta \frac{1}{n^\beta} = 2^{d-1} \sum_{l=1}^{d} (-1)^{l-1} C_d^l l^{\beta/2} =: c(d).$$

Таким чином,

$$E(X_{\beta,j})^2 := c(d) \frac{1}{n_\beta} \tag{2}$$

Теорема 1. *Для* $d \geq 2$

$$\widehat{S}_n := n^{\beta-d} S_n \to c(d)$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$

Доведення. Із рівності (2) випливає, що $E\widehat{S}_n = c(d)$. Для обчислення дисперсії $\mathrm{Var}\widehat{S}_n$ застосуємо формулу Іссерліса

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E\eta_1\eta_2 E\eta_3\eta_4 + E\eta_1\eta_3 E\eta_2\eta_4 + E\eta_1\eta_4 E\eta_2\eta_3, \tag{3}$$

де випадкові величини $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ мають сумісний гауссовий розподіл, з нульовим математичним сподіванням.

За допомогою формули Іссерліса (3) отримуємо, що:

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n = n^{2\beta-2d} E\left(S_n - ES_n\right)^2 = n^{2\beta-2d}\left(ES_n^2 - (ES_n)^2\right) =$$

$$2n^{2\beta-2d} \sum_{i_1,\ldots,i_d,j_1,\ldots,j_d=0}^{1} \left(EX_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)^2.$$

Покладемо $A = \left\{(i,j) \in \{0,1,\ldots,n-1\}^{2d} \middle| \|i-j\| \leq 3\sqrt{d}\right\}$, $B = \left\{(i,j) \in \{0,1,\ldots,n-1\}^{2d} \middle| \|i-j\| > 3\sqrt{d}\right\}$.

Сума $\sum_{(i,j)\in A}\left(EX_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)^2$ має $O(n^d)$, $n \to \infty$ доданків. Кожний доданок цієї суми оцінимо за допомогою нерівності Коші-Буняковського:

$$2n^{2\beta-2d} \sum_{(i,j)\in A} \left(EX_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)^2 \leq 2n^{2\beta-2d} \sum_{(i,j)\in A} EX_{\beta,i}^2 EX_{\beta,j}^2 = O(n^{-d}),\ n \to \infty. \tag{4}$$

Перейдемо до оцінки суми $\sum_{(i,j)\in B}\left(EX_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)^2$. Зауважимо,

$$EX_{\beta,i}X_{\beta,j} = \int_{\Pi(i)\times\Pi(j)} \frac{\partial^{2d} r_\beta(t,s)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d \partial s_1 \ldots \partial s_d} dt_1 \ldots dt_d ds_1 \ldots ds_d,$$

де $\Pi(i) = \left[\frac{i_1}{n}, \frac{i_1+1}{n}\right] \times \left[\frac{i_d}{n}, \frac{i_d+1}{n}\right]$, $\Pi(j) = \left[\frac{j_1}{n}, \frac{j_1+1}{n}\right] \times \left[\frac{j_d}{n}, \frac{j_d+1}{n}\right]$.

Неважко переконатися, що мішана похідна порядку $2d$ задовольняє нерівність:

$$\left|\frac{\partial^{2d} r_\beta(t,s)}{\partial t \partial s}\right| \leq \frac{L}{\|t-s\|^{2d-\beta}},\ t \neq s,\ t,s \in [0,1]^d,$$

де L — додатна стала. Далі, для $(i,j) \in B$

$$\rho\left(\Pi(i), \Pi(j)\right) \geq \left(\|i-j\| - 2\sqrt{d}\right)\frac{1}{n},$$

де $\rho\left(\Pi(i), \Pi(j)\right) = \sup_{t\in\Pi(i), s\in\Pi(j)} \|t-s\|$, $t,s \in [0,1]^d$. Отже,

$$|EX_{\beta,i}X_{\beta,j}| \leq L \int_{\Pi(i)\times\Pi(j)} \frac{dtds}{\|t-s\|^{2d-\beta}} \leq$$

$$\leq L\frac{1}{\left(\rho\left(\Pi(i),\Pi(j)\right)\right)^{2d-\beta}}\cdot\frac{1}{n^{2d}}\leq\frac{Ln^{2d-\beta}}{\left(\|i-j\|-2\sqrt{d}\right)^{2d-\beta}}\cdot\frac{1}{n^{2d}}=$$

$$=\frac{Ln^{-\beta}}{\left(\|i-j\|-2\sqrt{d}\right)^{2d-\beta}}.$$

Таким чином,

$$2n^{2\beta-2d}\sum_{(i,j)\in B}\left(E\left(X_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)\right)^2\leq 2n^{2\beta-2d}\sum_{(i,j)\in B}\frac{L^2n^{-2\beta}}{\left(\|i-j\|-2\sqrt{d}\right)^{4d-2\beta}}.$$

При фіксованому мультиіндексі i $\sum_{(i,j)\in B}\frac{1}{\left(\|i-j\|-2\sqrt{d}\right)^{4d-2\beta}}$ оцінюється через збіжний невласний d–кратний інтеграл ($d\geq 2$) для всіх $\beta\in(0,2)$. Тому при $d\geq 2$

$$2n^{2\beta-2d}\sum_{(i,j)\in B}\left(E\left(X_{\beta,i}X_{\beta,j}\right)\right)^2=O(n^{-d}),\ n\to\infty. \tag{5}$$

Із відношень підпорядкованості (4), (5) випливає, що

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n=O(n^{-d}),\ n\to\infty. \tag{6}$$

Із відношення підпорядкованості (6) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}\widehat{S}_n$, звідки слідує твердження теореми.

2. Оцінка параметра β**.** За спостереженнями дробового броунівського поля X_β на дискретній підмножині

$$\left\{\left(\frac{i_1}{n},\ldots,\frac{i_d}{n}\right)\Big|0\leq i_k\leq n-1,\ 1\leq k\leq d\right\}$$

d– вимірного паралелепіпеда $[0,1]^d$ побудуємо сильно конзистентну оцінку параметра β.

Теорема 2. *Статистика*

$$\beta_n=d+\frac{\ln c(d)}{\ln n}-\frac{\ln S_n}{\ln n},\ n\geq 1,$$

$c(d)\ :=\ 2^{d-1}\sum_{l=1}^{d}(-1)^{l-1}C_d^{\beta}l^{\beta/2}$, $S_n\ =\ \sum_{j_1=0}^{n-1}\ldots\sum_{j_d=0}^{n-1}\left(X_{\beta,j}\right)^2$, *є сильно конзистентною оцінкою параметра* β.

Доведення. Твердження теореми 2 випливає із теореми 1.

3. Довірчі інтервали. Нехай $1-\varepsilon\in(0,1)$ заданий рівень довіри. Знайдемо додатні числа $r_\varepsilon(n)$ та $l_\varepsilon(n)$ такі, що

$$P_\beta\left\{\beta>\beta_n+r_\varepsilon(n)\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2},\ P_\beta\left\{\beta<\beta_n-l_\varepsilon(n)\right\}\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді матимемо нерівність

$$P_\beta\left\{\beta_n-l_\varepsilon(n)<\beta<\beta_n+r_\varepsilon(n)\right\}\geq 1-\varepsilon, \tag{7}$$

яка означає, що інтервал

$$(\beta_n - l_\varepsilon(n), \beta_n + r_\varepsilon(n)) \cap (0,2)$$

є довірчим інтервалом для параметра β з рівнем довіри $1-\varepsilon$. Маємо:

$$P_\beta\left\{\beta_n + r_\varepsilon(n) < \beta\right\} = P_\beta\left\{S_n - ES_n > c(d)n^{d-\beta}\left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} \leq$$

$$\leq P_\beta\left\{|S_n - ES_n| > c(d)n^{d-\beta}\left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\}.$$

Внаслідок нерівності Чебишева, $P_\beta\left\{|S_n - ES_n| > \delta\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}S_n}{\delta^2}$, $\delta = c(d)n^{d-\beta} \times \left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)$. Отже,

$$P_\beta\left\{\beta_n + r_\varepsilon(n) < \beta\right\} \leq \frac{\mathrm{Var}S_n}{\delta^2}.$$

Внаслідок (6), існує стала $C > 0$ така, що для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність

$$\mathrm{Var}S_n \leq \frac{C \cdot n^{d-2\beta}}{\delta^2} = \frac{C \cdot n^{d-2\beta}}{c^2(d)n^{2d-2\beta}\left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} =$$

$$= \frac{C}{c^2(d)} \frac{1}{n^d\left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $r_\varepsilon(n)$:

$$\left(n^{r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2 \geq \frac{2C}{c^2(d)n^d\varepsilon},$$

$$n^{r_\varepsilon(n)} \geq 1 + \sqrt{\frac{2C}{c^2(d)n^d\varepsilon}},$$

$$r_\varepsilon(n) \geq \frac{\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2C}{c^2(d)n^d\varepsilon}}\right)}{\ln n}.$$

Аналогічно,

$$l_\varepsilon(n) \geq -\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\frac{2C}{c^2(d)n^d\varepsilon}}\right)}{\ln n}.$$

4. Швидкість збіжності. В наступній теоремі встановлюються швидкість збіжності статистики β_n, $n \geq 1$ до істинного значення параметра β.

Теорема 3. *Існує стала $C_* > 0$ та множина A ймовірності нуль, що для кожного $\omega \in \Omega\backslash A$ існує таке натуральне число $N(\omega)$, що для всіх $n > N(\omega)$ справджується нерівність:*

$$|\beta_n - \beta| < C_*\sqrt{\frac{2C}{c^2(d)n^{d-1}}}$$

Доведення. Розглянемо послідовність $\varepsilon_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$, $n \geq 2$. Для цієї послідовності

$$P_\beta\left\{\beta \notin (\beta_n - l_\varepsilon(n), \beta_n + r_\varepsilon(n))\right\} \leq \varepsilon_n.$$

Ряд із загальним членом $\varepsilon_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, $n \geq 2$ збіжний і тому, за лемою Бореля–Кантеллі, співвідношення $\beta \notin (\beta_n - l_\varepsilon(n), \beta_n + r_\varepsilon(n))$ справджується не більше ніж для скінченного числа номерів. Для доведення твердження теореми залишається помітити, що $\max(l_\varepsilon(n), r_\varepsilon(n)) = O\left(\sqrt{\frac{2C}{c^2(d)n^{d-1}}}\right)$, $n \to \infty$. Теорема доведена.

Висновки. Бакстерівські суми дозволяють отримати сильно конзистентну оцінку параметра β багатопараметричного дробового броунівського руху (дробового броунівського поля). Зазначимо, що цей параметр однозначно визначає дробове броунівське поле. Бакстерівські статистики прості з обчислювальної точки зору, хоча у застосуваннях слід брати до уваги похибки вимірювання. Застосування бакстерівського підходу для оцінювання параметра β дробового броунівського поля дозволило побудувати неасимптотичні довірчі інтервали та оцінити швидкість збіжності до істинного значення параметра.

1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности // – М.: “Наука”, 1965, 1967. – Ч. I–II. – 639, 720 с.
2. *Kamont A.* On the fractional anisotropic Wiener field // Probability and Mathematical Statistics. – 1996. – **16**, Fasc. 1. – P. 85–98.
3. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – **7**. – P. 522–527.
4. *Гладышев Е. Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями // Теория вероятностей и ее приминения – 1961. – **6**, Том 1. – С. 57–66.
5. *Краснитский С. М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m-го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика – 1971. – **5**. – С. 71–80.
6. *Kawada T.* The Levy-Baxter theorem for Gaussian random fields // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – **53**. – P. 463–469.
7. *Bardet J. M.* Un test d'auto–similarite pour les processus gaussiens a accroissements stationnaires // C. R. Acad. Sci. Paris – 1999. – **328**. – P. 521–526.
8. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика – 2002. – **67** – С. 45–54.
9. *Breton J-C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics – 2009. – **3** – P. 416–425.
10. *Kozachenko Y. V., Kurchenko O. O.* An estimate for the multiparameter fBm // Theory of Stoscastic Processes – 1999. – **3–4** – P. 113–119.

Одержано 01.04.2013