УДК 517.9

К. В. Маринець, Я. В. Варга (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

We get some results concerning the investigation of solutions of the non–linear systems of differential equations subjected to the integral boundary restrictions. We show that it is useful to reduce the original problem into the parametrized one with linear two–point separated conditions. For investigation the solutions of the parametrized boundary–value problem we use the numerical–analytic technique.

Отримано результати щодо дослідження розв'язків нелінійних систем диференціальних рівнянь, підпорядкованих інтегральним крайовим умовам. Показано ефективність зведення вихідної задачі до параметризованої задачі з лінійними двоточковими розділеними крайовими умовами. Для дослідження розв'язків останньої обґрунтовано відповідну чисельно-аналітичну техніку.

Вступ. Робота присвячена дослідженню розв'язків нелінійної крайової задачі з інтегральними крайовими умовами. Показується доцільність зведення вихідної задачі до задачі з лінійними двоточковими параметризованими крайовими умовами. Для дослідження розв'язків останньої будується відповідна модифікація чисельно–аналітичного алгоритму [1,2] з покращеними характеристиками збіжності. Встановлюються умови збіжності побудованої послідовності функцій до деякої граничної функції, а також її зв'язок з розв'язком вихідної крайової задачі. Отримані теоретичні результати демонструються ілюстративним прикладом.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь, підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$\int_0^T B(s)x(s)ds = d, \tag{2}$$

де $t \in [0,T]$, функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ — неперервна, $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область, $B : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — задана неперервна матрична функція, d – заданий n – вимірний вектор, а $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$— алгебра n–вимірних квадратних матриць з дійсними компонентами.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), який задовольняє інтегральні крайові умови (2), у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0,T] \to D$.

Крайові умови (2) перепишемо наступним чином:

$$Ax(0) + \int_0^T B(s)x(s)ds + Cx(T) = d + Ax(0) + Cx(T), \tag{3}$$

де $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — довільна задана матриця, $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & I_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$— деяка невироджена матриця, $C_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $\det C_{11} \neq 0$, C_{12}, C_{21} — матриці розмірності $p \times (n-p)$ та $(n-p) \times p$ відповідно, а $I_{n-p} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p})$ — одинична матриця.

Покажемо, що замість нелінійної задачі (1), (2) з інтегральними крайовими умовами доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (1) при певних параметризованих лінійних двоточкових крайових умовах, до яких потрібно приєднати певну систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь.

2. Перехід до задачі з лінійними крайовими умовами. Для переходу до задачі з лінійними двоточковими крайовими умовами введемо наступні параметри:

$$z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0), ..., x_n(0)) = col(z_1, z_2, ..., z_n),$$

$$\lambda := \int_0^T B(s)x(s)ds = col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \tag{4}$$

$$\eta := x(T) = col(x_1(T), x_2(T), ..., x_n(T)) = col(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n).$$

З використанням параметризації (4) інтегральні крайові умови (3) запишуться у вигляді лінійних двоточкових параметризованих умов:

$$Ax(0) + Cx(T) = d + Az - \lambda + C\eta. \tag{5}$$

Розглянемо спеціальний випадок крайових умов (5), поклавши $A \equiv O_n$, $C \equiv I_n$, де $O_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — нульова матриця.

Таким чином, замість задачі (1), (2) з інтегральними крайовими умовами розглядаємо еквівалентну їй параметризовану задачу (1), (6) з лінійними розділеними двоточковими крайовими умовами:

$$\begin{cases} x(0) = z, \\ x(T) = d(\lambda, \eta), \end{cases} \tag{6}$$

де $d(\lambda, \eta) := d - \lambda + \eta$,
до якої потрібно приєднати певну систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь.

Зауваження 1. *Множина розв'язків нелінійної крайової задачі (1), (2) збігається з множиною тих розв'язків задачі (1), (6), які задовольняють додатковим умовам (4).*

Для дослідження розв'язків модифікованої крайової задачі (1), (6) обґрунтуємо відповідну чисельно-аналітичну схему.

3. Збіжність послідовних наближень. На основі заданої функції f визначимо вектор:

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right], \tag{7}$$

і покладемо

$$D_0 := \left\{ \int\limits_0^T B(s)x(s)ds : x \in C\left([0,T], D\right) \right\}.$$

Припустимо, що параметризована крайова задача така, що:

A) Підмножина

$$D_\beta := \left\{ z \in D : B\left(z + \frac{t}{T}\left[d(\lambda,\eta) - z\right], \frac{T}{2}\delta_D(f) \right) \subset D \right\} \neq \varnothing,$$

для всіх $\lambda \in D_0$, $\eta \in D$, $t \in [0,T]$.

З визначення множини D_β випливає, що вона складається з таких точок $z \in D$, для яких сукупність точок $z + \frac{t}{T}\left[d(\lambda,\eta) - z\right]$ належить області D разом зі своїм

$$\beta := \frac{T}{2}\delta_D(f)$$

околом, $\forall \lambda \in D_0, \eta \in D, t \in [0,T]$.

B) Функція f неперервна і, знайдеться така стала матриця $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$ з невід'ємними коефіцієнтами, що при довільних $\{u,v\} \subset D$, справедлива нерівність:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K|u-v|. \tag{8}$$

C) Спектральний радіус матриці K задовольняє умову:

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{9}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1), (6) побудуємо послідовність функцій $\{x_m\}$ згідно рекурентного співвідношення:

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t,z,\lambda,\eta) := z + \int\limits_0^t f(s, x_m(s,z,\lambda,\eta))ds - \\ -\tfrac{t}{T}\int\limits_0^T f\left(s, x_m\left(s,z,\lambda,\eta\right)\right)ds + \tfrac{t}{T}\left[d(\lambda,\eta) - z\right], \end{aligned} \tag{10}$$

де $m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$x_0(t,z,\lambda,\eta) = z + \frac{t}{T}\left[d(\lambda,\eta) - z\right] \in D_\beta, \tag{11}$$

$$x_m(t,z,\lambda,\eta) = col(x_{m,1}(t,z,\lambda,\eta), x_{m,2}(t,z,\lambda,\eta), ..., x_{m,n}(t,z,\lambda,\eta)),$$

а z, λ, η розглядаються як параметри.

Легко перевірити, що всі функції x_m вигляду (10) задовольняють лінійні параметризовані двоточкові крайові умови (6) для всіх $m \geq 1$, z, λ, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (10).

Теорема 1. *Припустимо, що параметризована крайова задача* (1), (6) *задовольняє умови A) — C).*

Тоді для всіх фіксованих $z \in D_\beta$, $\lambda \in D_0$, $\eta \in D$:

1) *Функції послідовності (10) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$\begin{cases} x_m(0,z,\lambda,\eta) = z, \\ x_m(T,z,\lambda,\eta) = d(\lambda,\eta), \end{cases} \tag{12}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

2) *Послідовність функцій* (10) *рівномірно збігається відносно* $t \in [0,T]$ *при* $m \to \infty$ *до граничної функції*

$$x^*(t,z,\lambda,\eta) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda,\eta). \tag{13}$$

3) *Гранична функція* x^* *задовольняє параметризовані двоточкові лінійні крайові умови:*

$$\begin{cases} x^*(0,z,\lambda,\eta) = z, \\ x^*(T,z,\lambda,\eta) = d(\lambda,\eta). \end{cases} \tag{14}$$

4) *Функція (13) для всіх* $t \in [0,T]$ *є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\begin{gathered} x(t) := z + \int\limits_0^t f(s,x(s))ds - \tfrac{t}{T}\int\limits_0^T f(s,x(s))ds + \\ + \tfrac{t}{T}[d(\lambda,\eta) - z], \ t \in [0,T], \end{gathered} \tag{15}$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \Delta(z,\lambda,\eta), \tag{16}$$

$$x(0) = z, \tag{17}$$

де $\Delta : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathbb{R}^n$ *— відображення, визначене формулою:*

$$\Delta(z,\lambda,\eta) := \frac{1}{T}[d(\lambda,\eta) - z] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda,\eta))ds. \tag{18}$$

5) *Справедлива оцінка відхилення функції* x^* *від її* m*-го наближення для всіх* $t \in [0,T]$

$$|x^*(t,z,\lambda,\eta) - x_m(t,z,\lambda,\eta)| \le \frac{20t}{9}\left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^m (I_n - Q)^{-1}\delta_D(f), \tag{19}$$

де

$$Q := \frac{3T}{10}K, \tag{20}$$

а вектор $\delta_D(f)$ *визначений формулою (7).*

Доведення. Доведемо, що послідовність функцій (10) є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t,z,\lambda,\eta)\in D$, для всіх $(t,z,\lambda,\eta)\in[0,T]\times D_\beta\times D_0\times D$, $m\in\mathbb{N}$.

Дійсно, з використанням оцінок Леми 2.3 [3] (див. також Лема 3 [4] та Лема 2 [5]) для всіх $y\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\int_0^t\left[y(\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T y(s)ds\right]d\tau\right|\le\frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]}y(t)-\min_{t\in[0,T]}y(t)\right],\qquad(21)$$

де

$$\alpha_1(t):=2t\left(1-\frac{t}{T}\right),t\in[0,T],\qquad(22)$$

із співвідношення (10) при $m=0$ отримаємо:

$$\begin{gathered}|x_1(t,z,\lambda,\eta)-x_0(t,z,\lambda,\eta)|\le\\ \le\left|\int_0^t\left[f(t,x_0(s,z,\lambda,\eta))ds-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_0(s,z,\lambda,\eta)ds\right]\right|dt\le\\ \le\alpha_1(t)\delta_D(f)\le\frac{T}{2}\delta_D(f).\end{gathered}\qquad(23)$$

В силу нерівності (23) приходимо до висновку, що $x_1(t,z,\lambda,\eta)\in D$ при $(t,z,\lambda,\eta)\in[0,T]\times D_\beta\times D_0\times D$.

За індукцією легко встановити, що всі функції послідовності (10) також містяться в області D для всіх $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$, $z\in D_\beta$, $\lambda\in D_0$, $\eta\in D$.

Розглянемо різницю:

$$\begin{gathered}x_{m+1}(t,z,\lambda,\eta)-x_m(t,z,\lambda,\eta)=\\ =\int_0^t\left[f(s,x_m(s,z,\lambda,\eta))-f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda,\eta))\right]ds-\\ -\frac{t}{T}\int_0^T\left[f(s,x_m(s,z,\lambda,\eta))-f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda,\eta))\right]ds,\end{gathered}\qquad(24)$$

та позначимо:

$$r_m(t,z,\lambda,\eta):=\left|x_m(t,z,\lambda,\eta)-x_{m-1}(t,z,\lambda,\eta)\right|,$$

для всіх $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$, $z\in D_\beta$, $\lambda\in D_0$ і $\eta\in D$.

В силу рівності (24), оцінки (21) та умови Ліпшиця (8), маємо:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda,\eta)\le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s,z,\lambda,\eta)ds+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(s,z,\lambda,\eta)ds\right],\qquad(25)$$

для будь–якого $m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$.

Згідно з (23),

$$r_1(t,z,\lambda,\eta)=|x_1(t,z,\lambda,\eta)-x_0(t,z,\lambda,\eta)|\le\alpha_1(t)\delta_D(f).$$

При $m=1$ з нерівності (25) випливає, що

$$r_2(t,z,\lambda,\eta)\le K\delta_D(f)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\alpha_1(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\alpha_1(s)ds\right]\le K\alpha_2(t)\delta_D(f),$$

де вектор $\delta_D(f)$ має вигляд (7), а $\alpha_m(\cdot), m \in \mathbb{N}$ визначається рекурентною формулою:

$$\alpha_{m+1}(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int\limits_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \alpha_m(s)ds, \tag{26}$$

де $\alpha_0(t) := 0$, для всіх $t \in [0, T]$, а $\alpha_1(t)$ задана співвідношенням (22).

Використовуючи (26), легко отримати, що має місце оцінка:

$$r_{m+1}(t, z, \lambda, \eta) \leq K^m \alpha_{m+1}(t) \delta_D(f), \tag{27}$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Послідовність функцій $\{\alpha_m\}$ така, що задовольняє нерівність:

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \frac{10}{9} \left(\frac{3T}{10}\right)^m \alpha_1(t), t \in [0.T], m = 0, 1, 2, \dots. \tag{28}$$

В силу оцінки (28), з (27) отримуємо, що

$$r_{m+1}(t, z, \lambda, \eta) \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t) \delta_D(f), \tag{29}$$

для всіх $t \in [0, T]$, $m \in \mathbb{N}$, де матриця Q має вигляд (20).

Таким чином, з урахуванням нерівності (29), розглянемо різницю:

$$\begin{gathered} |x_{m+j}(t, z, \lambda, \eta) - x_m(t, z, \lambda, \eta)| \leq \\ \leq |x_{m+j}(t, z, \lambda, \eta) - x_{m+j-1}(t, z, \lambda, \eta)| + \\ + |x_{m+j-1}(t, z, \lambda, \eta) - x_{m+j-2}(t, z, \lambda, \eta)| + \dots + \\ + |x_{m+1}(t, z, \lambda, \eta) - x_m(t, z, \lambda, \eta)| = \\ = \sum_{i=0}^{j} r_{m+1}(t, z, \lambda, \eta) \leq \tfrac{10}{9} \alpha_1(t) \sum_{i=0}^{j} Q^{m+i} \delta_D(f) = \\ = \tfrac{10}{9} \alpha_1(t) Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \delta_D(f). \end{gathered} \tag{30}$$

Так як максимальне власне значення матриці Q вигляду (20) не перевищує 1, то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (I_n - Q)^{-1}$$

і

$$\lim_{m \to \infty} Q^m = O_n.$$

Таким чином, згідно критерію Коші, з нерівності (30) випливає що, послідовність функцій $\{x_m\}$ вигляду (10) рівномірно збігається в області $[0, T] \times D_\beta \times D_0 \times D$ до граничної функції x^*. Так як всі функції x_m послідовності (10) задовольняють крайові умови (6) для всіх значень введених параметрів, можна зробити висновок, що гранична функція x^* також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (10) до границі при $m \to \infty$, отримаємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (15), або що те ж саме є розв'язком задачі Коші (16), (17), де $\Delta(z, \lambda, \eta)$ задається формулою (18). При переході до границі при $m \to \infty$ у (30) отримаємо оцінку (19), що і завершує доведення.

Встановимо зв'язок граничної функції x^* послідовності функцій (10) з розв'язком вихідної крайової задачі (1), (2).

З цією метою розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині:

$$x'(t) = f(t, x) + \mu, \quad t \in [0, T], \tag{31}$$

$$x(0) = z, \tag{32}$$

де $\mu = col(\mu_1, ..., \mu_n)$ є керуючим параметром.

Теорема 2. *Нехай $z \in D_\beta, \lambda \in D_0, \eta \in D$ і $\mu \in \mathbb{R}^n$ — задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1) мають місце умови Теореми 1.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (31), (32), задовольняв також і параметризовані крайові умови (6), необхідно і достатньо, щоб параметр $\mu = \mu_{z,\lambda,\eta}$ був заданий рівністю:

$$\mu_{z,\lambda,\eta} := \frac{1}{T}\left[[d(\lambda, \eta) - z] - \int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda, \eta))\right] ds. \tag{33}$$

У цьому випадку,

$$x(t, z, \lambda, \eta, \mu) = x^*(t, z, \lambda, \eta), \quad t \in [0, T], \tag{34}$$

де x^* функція вигляду (13).

Доведення. *Достатність.* Нехай параметр

$$\mu = \mu_{z,\lambda,\eta} \tag{35}$$

у правій частині системи диференціальних рівнянь (31) має вигляд (35) .

З Теореми 1 випливає, що при заданих значеннях параметрів z, η, λ, гранична функція (13) послідовності (10) є єдиним розв'язком крайової задачі (31), (6). Крім того, функція x^* задовольняє початкові умови (32), тобто є розв'язком задачі Коші (31), (32). Таким чином, знайдено значення параметра μ вигляду (35), для якого має місце співвідношення (34).

Необхідність. Покажемо, що контрольний параметр μ вигляду (33) визначається єдиним чином, тому що для будь–яких інших $\mu = \bar{\mu} \neq \mu_{z,\lambda,\eta}$ розв'язок $x(t, z, \lambda, \eta, \bar{\mu})$ задачі Коші (31), (32) не задовольняє параметризовані крайові умови (6).

Дійсно, припустимо супротивне. Тоді існує щонайменше два значення $\mu_{z,\lambda,\eta}$ та $\bar{\mu}$ ($\mu_{z,\lambda,\eta} \neq \bar{\mu}$), для яких розв'язки $x = x(t, z, \lambda, \eta, \mu_{z,\lambda,\eta}) = x_{z,\lambda,\eta}(t)$ і $x = x(t, z, \lambda, \eta, \bar{\mu}) = \bar{x}(t)$ задач Коші (31), (32), (35) та (36), (32):

$$x'(t) = f(t, x) + \bar{\mu}, \quad t \in [0, T], \tag{36}$$

відповідно також задовольняють двоточкові параметризовані крайові умови (6).

Очевидно, що функції $x_{z,\lambda,\eta}(\cdot)$ і $\overline{x}(\cdot)$ задовольняють інтегральні рівняння

$$x_{z,\lambda,\eta}(t) := z + \int\limits_0^t f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds + \mu_{z,\lambda,\eta}t \tag{37}$$

і

$$\overline{x}(t) := z + \int\limits_0^t f(s, \overline{x}(s))ds + \overline{\mu}t. \tag{38}$$

За припущенням, функції $x_{z,\lambda,\eta}$ і $\overline{x}$ задовольняють параметризовані крайові умови (6) і початковим умовам (32). Тобто мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} x_{z,\lambda,\eta}(0) = z, \\ x_{z,\lambda,\eta}(T) = d(\lambda, \eta), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x}(0) = z, \\ \overline{x}(T) = d(\lambda, \eta). \end{cases}$$

З інтегральних рівнянь (37), (38) при $t = T$ одержимо:

$$\mu_{z,\lambda,\eta} = \frac{1}{T}[d(\lambda, \eta) - z] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds, \tag{39}$$

$$\overline{\mu} = \frac{1}{T}[d(\lambda, \eta) - z] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, \overline{x}(s))ds. \tag{40}$$

Підставивши останні дві рівності (39), (40) в інтегральні рівняння (37), (38), отримуємо, що для всіх $t \in [0, T]$:

$$\begin{gathered} x_{z,\lambda,\eta}(t) = z + \int\limits_0^t f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds + \\ + \tfrac{t}{T}\left[[d(\lambda, \eta) - z] - \int\limits_0^T f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds\right]. \end{gathered} \tag{41}$$

і

$$\begin{gathered} \overline{x}(t) := z + \int\limits_0^t f(s, \overline{x}(s))ds + \\ + \tfrac{t}{T}\left[[d(\lambda, \eta) - z] - \int\limits_0^T f(s, \overline{x}(s))ds\right]. \end{gathered} \tag{42}$$

Оскільки $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D_0$, то аналогічно доведенню Теореми 1, виходячи з вигляду рівнянь (41), (42), та визначення множини D_β можна встановити, що всі значення функцій $x_{z,\lambda,\eta}(t)$, $\overline{x}(t)$ містяться в області D при $t \in [0, T]$.

Із співвідношень (41), (42) одержимо:

$$\begin{gathered} x_{z,\lambda,\eta}(t) - \overline{x}(t) = \int\limits_0^t [f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s)) - f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))]ds - \\ - \tfrac{t}{T}\int\limits_0^T [f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s)) - f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))]ds, \qquad t \in [0, T], \end{gathered} \tag{43}$$

Із (43) з урахуванням умови Ліпшиця (8) маємо, що функція

$$\omega(t) := |x_{z,\lambda,\eta}(t) - \overline{x}(t)|, \quad t \in [0,T], \tag{44}$$

задовольняє інтегральні нерівності

$$\omega(t) \leq K \left(\int\limits_0^t \omega(s)ds + \frac{t}{T} \int\limits_t^T \omega(s)ds \right) \leq K\alpha_1(t) \underset{s\in[0,T]}{max}\, \omega(s), \quad t \in [0,T],$$

де $\alpha_1(\cdot)$ визначається формулою (22).

Використовуючи останню нерівність рекурентно, приходимо до наступної оцінки:

$$\omega(t) \leq K^m \alpha_m(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \quad t \in [0,T], \tag{45}$$

де $m = 1, 2, \ldots$, а функції $\alpha_m, m \geq 1$, задаються формулою (26).

Беручи до уваги (28), з (45) отримуємо, що

$$\omega(t) \leq K\alpha_1(t) \frac{10}{9} \left(\frac{3T}{10} K \right)^{m-1} \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \qquad t \in [0,T].$$

Перейшовши в останній нерівності до границі при $m \to \infty$ та врахувавши (9), приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s\in[0,T]} \omega(s) \to 0.$$

Згідно з (44), це означає, що функція $x_{z,\lambda,\eta}(\cdot)$ співпадає з $\overline{x}(\cdot)$. Використовуючи (39) і (40), одержуємо, що $\mu_{z,\lambda,\eta} = \overline{\mu}$. Це протиріччя доводить теорему.

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови A) — C). Тоді пара $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (6), тоді і тільки тоді, коли*

$$z^* = col(z_1^*, z_2^*, ..., z_n^*),$$

$$\eta^* = col(\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*),$$

$$\lambda^* = col(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_n^*)$$

задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:

$$\Delta(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{46}$$

$$V(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{47}$$

$$x^*(T, z, \lambda, \eta) - \eta = 0, \tag{48}$$

де

$$\Delta(z, \lambda, \eta) := [d(\lambda, \eta) - z] - \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda, \eta))ds,$$

$$V(z, \lambda, \eta) := \int\limits_0^T B(s)x^*(s, z, \lambda, \eta)ds - \lambda.$$

Доведення. Для доведення достатньо застосувати Теорему 2 і зауважити, що диференціальне рівняння (16) співпадає з (1), тоді і тільки тоді коли (z^*, λ^*, η^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(z^*, \lambda^*, \eta^*) = 0.$$

Враховуючи параметризацію (4), та еквівалентність задач (1), (2) та (1), (6) очевидно, що $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ збігається з розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (6), тоді і тільки тоді, коли $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ задовольняє рівняння:

$$\int_0^T B(s)x^*(s, z, \lambda, \eta)ds = \lambda,$$

$$x^*(s, z, \lambda, \eta) = \eta.$$

Це означає, що $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ є розв'язком інтегральної крайової задачі (1), (2), тоді і тільки тоді, коли виконується (46) — (48). Останнє твердження і доводить теорему.

Доведемо, що система визначальних рівнянь (46) — (48) виявляє всі можливі розв'язки вихідної нелінійної крайової задачі (1), (2) з інтегральними крайовими умовами.

Лема 1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 3. Крім того, існують вектори $z \in D_\beta$, $\lambda \in D_0$, $\eta \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (46) — (48).*

Тоді:

1) Нелінійна крайова задача (1), (2) має розв'язок $x(\cdot)$ такий, що

$$x(0) = z,$$

$$\int_0^T B(s)x(s)ds = \lambda,$$

$$x(T) = \eta.$$

Крім того, він задається формулою:

$$x(t) = x^*(t, z, \lambda, \eta), \quad t \in [0, T], \tag{49}$$

де x^* є граничною функцією послідовності (10).

2) Якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок $x(\cdot)$, то він задається формулою (49), і система визначальних рівнянь (46) — (48) задовольняється при

$$z = x(0),$$

$$\lambda = \int_0^T B(s)x(s)ds, \tag{50}$$

$$\eta = x(T).$$

Доведення. Будемо застосовувати Теореми 1 та 2. Якщо існують деякі вектори $z \in D_\beta$, $\lambda \in D_0$, $\eta \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (46) — (48), то на основі Теореми 3 функція (49) є розв'язком вихідної крайової задачі (1), (2). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2), то ця функція є розв'язком задачі Коші (31), (32) при

$$\mu = 0,$$

$$z = x(0).$$

Так як $x(\cdot)$ задовольняє інтегральні крайові умови (2), а отже і параметризовані умови (6), тоді з Теореми 2 випливає, що має місце рівність (49). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda,\eta} = 0,$$

де вектори λ, η визначаються співвідношенням (50). Окрім того, $\mu_{z,\lambda,\eta}$ дається формулою (33), отже, перше рівняння (46) визначальної системи виконується, якщо z, λ, η визначаються згідно з (50). З використанням крайових умов (2), отримуємо, що два інших рівняння (47), (48) визначальної системи також мають місце. Таким чином, ми визначили такі (z, λ, η), які задовольняють систему визначальних рівнянь (46) — (49), що і доводить лему.

Зауваження 2. *При деякому $m \geq 1$ введемо у розгляд функції $\triangle_m : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathbb{R}^n$, $V_m : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathbb{R}^n$ згідно формул:*

$$\triangle_m(z, \lambda, \eta) := \frac{1}{T}[d(\lambda, \eta) - z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda, \eta))ds, \tag{51}$$

$$V_m(z, \lambda, \eta) := \int_0^T B(s)x_m(s, z, \lambda, \eta)ds - \lambda, \tag{52}$$

де z, λ, η визначені співвідношенням (4), а множина D_β має вигляд (8).

Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1), (6) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} \triangle_m(z, \lambda, \eta) &= 0, \\ V_m(z, \lambda, \eta) &= 0, \\ x_m(T, z, \lambda, \eta) - \eta &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Відмітимо, що на відміну від системи (46) — (48), наближена система конструктивно будуєтьтя на основі функції x_m та не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція $\overline{X}_m(t) = x_m(t, \overline{z}, \overline{\lambda}, \overline{\eta})$, де $\overline{z}, \overline{\lambda}, \overline{\eta}$ є розв'язками (53) може бути принята за m–ве наближення до точного розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2) з інтегральними крайовими умовами.

Зі зростанням m системи (46) — (48) та (53) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься необхідна точність відшукання наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).

6. Ілюстративний приклад.

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^2(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{25} = f_1(t, x_1, x_2), \\ x_2'(t) = \frac{t^2}{10}x_2(t) + \frac{1}{5} - \frac{t^3}{50} = f_2(t, x_1, x_2), \end{cases} \tag{54}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\int\limits_0^T B(s)x(s)ds = d, \tag{55}$$

де $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $B(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 & t/2 \\ t - 1/2 & t \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -39/6400 \\ 271/3840 \end{pmatrix}$.

Зауважимо, що точним розв'язком задачі (54), (55) є система функцій:

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2}, \\ x_2^*(t) = \frac{t}{5}. \end{cases} \tag{56}$$

Крайова задача (54), (55) визначена на множині:

$$(t, x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times D, \tag{57}$$

$$D = \left\{(x_1, x_2) : \mid x_1 \mid \leq \frac{1}{2}, \mid x_2 \mid \leq \frac{1}{2}\right\}. \tag{58}$$

Інтегральні крайові умови (55) запишемо у вигляді:

$$Ax(0) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} B(s)x(s)ds + Cx\left(\frac{1}{2}\right) = d + Ax(0) + Cx\left(\frac{1}{2}\right). \tag{59}$$

Для переходу до лінійних двоточкових крайових умов введемо наступні параметри:

$$z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0)) = col(z_1, z_2),$$

$$\lambda := \int\limits_0^T B(s)x(s)ds = col(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$\eta := x(T) = col\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = col\left(\eta_1, \eta_2\right). \tag{60}$$

З використанням параметризації (60), крайові умови (59) запишуться у вигляді:

$$Ax(0) + Cx\left(\frac{1}{2}\right) = d(z, \lambda, \eta), \tag{61}$$

$$d(z, \lambda, \eta) := d + Az - \lambda + C\eta.$$

Покладаючи $A \equiv O_2$, $C \equiv I_2$, крайові умови (61) виглядатимуть так:

$$\begin{cases} x(0) = z, \\ x(T) = d(\lambda, \eta), \end{cases} \tag{62}$$

де $d(\lambda, \eta) := d - \lambda + \eta$.

За матрицю, яка фігурує в умові Ліпшиця (8), можна взяти таку:

$$K = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix},$$

причому

$$r(K) = 0.2 < \frac{10}{3T},$$

де $T = \frac{1}{2}$, тобто умова (9) виконується.

Вектор $\delta_D(f)$ виберемо наступним чином:

$$\delta_D(f) \leq \begin{pmatrix} 0.175 \\ 0.0125 \end{pmatrix}.$$

Множина $D_\beta \neq \varnothing$, оскільки

$$z_1 + 2t(0.0069375 - \lambda_1 + \eta_1 - z_1) \leq 0.043750,$$

$$z_2 + 2t(0.07057291667 - \lambda_2 + \eta_2 - z_2) \leq 0.0031250,$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in D_0, \eta_1, \eta_2 \in D$.

Нехай параметр λ визначений на множині:

$$D_0 := \{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1| \leq 0.007, |\lambda_2| \leq 0.08\}$$

Отже, для параметризованої крайової задачі виконуються умови А)— С) і для неї можна застосувати схему чисельно-аналітичного алгоритму, про яку йдеться у даній роботі.

Послідовні наближення (10) для крайової задачі (54),(62) мають вигляд:

$$x_{m,1}(t, z, \lambda, \eta) := z_1 + \int_0^t f_1(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda, \eta))ds - 2t \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda, \eta))ds +$$
$$+2t(-0.006093750 - \lambda_1 + \eta_1 - z_1),$$

$$x_{m,2}(t, z, \lambda, \eta) := z_2 + \int_0^t f_2(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda, \eta))ds - 2t \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(s, x_{m-1,2}(s, z, \lambda, \eta))ds +$$
$$+2t(0.07057291667 - \lambda_2 + \eta_2 - z2),$$

$m = 1, 2, 3, ...$, а за нульове наближення візьмемо функції:

$$x_{0,1} = z_1 + 2t(-0.006093750 - \lambda_1 + \eta_1 - z_1),$$

$$x_{0,2} = z_2 + 2t(0.07057291667 - \lambda_2 + \eta_2 - z2).$$

Система визначальних рівнянь (53) для знаходження числових значень невідомих параметрів має наступний вигляд:

$$\Delta_{m,1}(z, \lambda, \eta) = -2t \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_{m,1}(s, z, \lambda, \eta), x_{m,2}(s, z, \lambda, \eta))ds +$$
$$+2t(-0.006093750 - \lambda_1 + \eta_1 - z_1) = 0,$$

$$\Delta_{m,2}(z,\lambda,\eta) = -2t\int_0^{\frac{1}{2}} f_2(s, x_{m,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m,2}(s,z,\lambda,\eta))ds +$$
$$+2t(0.07057291667 - \lambda_2 + \eta_2 - z2) = 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{B(s)x_m(s,z,\lambda,\eta)\}_1\, ds = \lambda_1,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \{B(s)x_m(s,z,\lambda,\eta)\}_2\, ds = \lambda_2, \tag{63}$$

$$x_{m,1}\left(\frac{1}{2}, z, \lambda, \eta\right) = \eta_1,$$

$$x_{m,2}\left(\frac{1}{2}, z, \lambda, \eta\right) = \eta_2, \quad m = 1,2,3,...$$

У першій ітерації отримано такі розв'язки системи визначальних рівнянь (63):

$$z_1 := z_{11} = 0.07057291667,$$

$$z_2 := z_{12} = 0.000001255885871,$$

$$\eta_1 := \eta_{11} = -0.4875055744,$$

$$\eta_2 := \eta_{12} = 0.1000012611,$$

$$\lambda_1 := \lambda_{11} = -0.00609375,$$

$$\lambda_2 := \lambda_{12} = 0.07057291667.$$

Отже, першим наближенням ($m = 1$) до точного розв'язку крайової задачі (54), (55) є:

$$x_{11} = \tfrac{1}{400}t^4 - 0.0016666809t^3 + 0.05000082040t^2 +$$
$$+0.00010399486t - 0.5000056918,$$

$$x_{12} = 2.6070645 \times 10^{-10}t^4 - 4.186286237 \times 10^{-8}t^3 + 0.2t + 0.000001255885871.$$

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першого наближення, при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \leq 8.1 \cdot 10^{-6},$$

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \leq 1.3 \cdot 10^{-6}.$$

На Рис. 1 зображено графіки компонент точного та наближеного розв'язків у першій ітерації.

У другому наближенні при $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ отримано наступне максимальне відхилення компонент точного на наближеного розв'язків:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{21}(t)| \leq 3.06 \cdot 10^{-8},$$

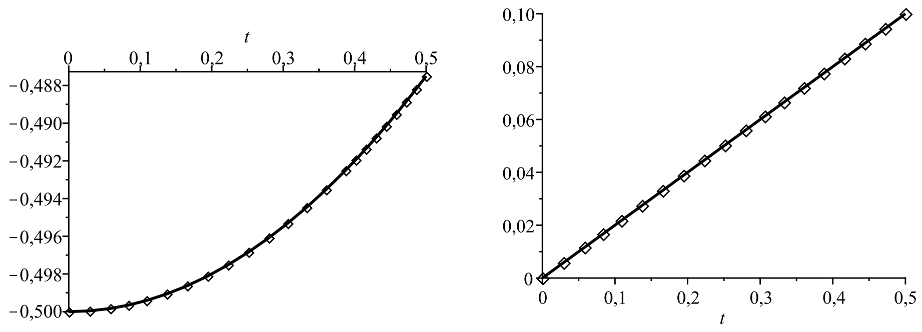

Рис. 1. Перша та друга компоненти точного розв'язку (лінія) та їх перше наближення (пунктир).

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{22}(t)| \le 4.09 \cdot 10^{-9},$$

а у третій ітерації є таким:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \le 1.9 \cdot 10^{-10},$$

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \le 5.3 \cdot 10^{-11}.$$

1. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К.: Наукова думка, 1992. — 279 с.
2. *Ronto M.* Parametrization for non–linear problems with integral boundary conditions / M. Ronto, K. Marynets // Electronic Journal of Quallitative Theory of differential Equations, QTDE. — 2012. — No.99. — pp.1-23, http.//www.math. u-szeged.hu/ejqtde/
3. *Ronto M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems / M. Ronto, A. M. Samoilenko. — River Edge. NS: World Scientific Publishing Co. Inc, 2000. — 455 p.
4. *M. Ronto* Some remarks on the convergence of the numerical–analytical method of successive approximations/ M. Ronto, J. Meszaros // Ukrainian Math. J.— 1996. — Vol. 48, No. 1, pp.101–107.
5. *Ronto A.* On a Cauchy–Nicoletti type three–point boundary value problem for linear differential equations with argument deviations / A. Ronto, M. Ronto // Miskolc Math. Notes. — 2009. — Vol. 10, No. 2,pp. 173–205.

Одержано ..2013