

УДК 517.9

С.М. Чуйко, П.В. Кулиш, А.В. Белущенко (Слав'янський пед. ун-т)

**СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ НЕТЕРОВА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА**

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of nonlinear Noetherian boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

**1. Постановка задачі.** Исследуем задачу о построении решения  $z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b]$ ,  $z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$  нетеровой ( $m \neq n$ ) краевой задачи [1]

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \quad (1)$$

в малой окрестности решения порождающей задачи

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Здесь  $A(t)$  –  $(n \times n)$ - мерная матрица и  $f(t)$  –  $n$ - мерный вектор-столбец, элементы которых – непрерывные на отрезке  $[a, b]$  действительные функции,  $\ell z(\cdot)$  – линейный ограниченный функционал  $\ell z(\cdot) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Предположим нелинейную вектор-функцию

$$Z(z, t, \varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{M}(z, t, \varepsilon) + \mathcal{N}(z, t, \varepsilon)$$

и нелинейный векторный функционал

$$J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{H}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \mathcal{L}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$$

линейными однородными функциями неизвестной  $\mu(\varepsilon)$ ; здесь  $\mathcal{M}(z, t, \varepsilon)$  и  $\mathcal{N}(z, t, \varepsilon)$  – нелинейные вектор-функции, непрерывно дифференцируемые по  $z$  в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывные по  $t$  на отрезке  $[a, b]$  и непрерывные по малому параметру  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ ;

$$\mathcal{H}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \mathcal{L}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

– нелинейные функционалы, непрерывно дифференцируемые по  $z$  в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывные по малому параметру  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ . Предположим неизвестную  $\mu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1$  непрерывной функцией малого параметра  $\varepsilon$ . Исследуем критический случай ( $P_{Q^*} \neq 0$ ); при условии

$$P_{Q^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[ f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0$$

порождающая задача (2) имеет ( $r = n - n_1$ ) – параметрическое семейство решений

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G \left[ f(s); \alpha \right] (t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь  $X(t)$  – нормальная ( $X(a) = I_n$ ) фундаментальная матрица однородной части системы (2),  $Q := \ell X(\cdot)$  –  $(m \times n)$  – матрица,  $\text{rank } Q = n_1$ ,  $X_r(t) := X(t)P_{Q_r}$ ,  $P_{Q_r}$  –  $(n \times r)$  – матрица, составленная из  $r$  – линейно-независимых столбцов  $(n \times n)$  – матрицы-ортопроектора  $P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow N(Q)$  и  $P_{Q^*}$  –  $(m \times m)$  – матрица-ортопроектор  $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$ ,

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t) + X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f](\cdot) \right\}$$

– обобщенный оператор Грина краевой задачи (2),

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

– оператор Грина задачи Коши для системы (2),  $Q^+$  – псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу [1]. Поставленная задача обобщает традиционные периодические краевые задачи в случае параметрического резонанса, исследованные в монографиях [3–5].

**2. Условия существования решения.** Зафиксируем вектор  $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ , определяющий порождающее решение  $z_0(t, c_0^*)$ . Предположим, что задача (1) имеет решение, обращающееся при  $\varepsilon = 0$  в порождающее  $z_0(t, c_0^*)$  и существует непрерывная функция  $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$ . Тогда выполняется условие [1]

$$P_{Q^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ Z(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0.$$

Оставляя  $\rho$  линейно независимых строк последнего условия

$$P_{Q_\rho^*} \left\{ J(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ Z(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0,$$

приходим к уравнению

$$\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) := D_0 \cdot \mu_0 + P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0, \quad (3)$$

где

$$D_0 := P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{M}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] \right\} \in \mathbb{R}^{\rho \times 1}.$$

Здесь  $P_{D_0^*}$  –  $(\rho \times \rho)$  – мерная матрица-ортопроектор:  $\mathbb{R}^\rho \rightarrow N(D_0^*)$ , аналогично  $P_{D_0}$  – ортопроектор:  $\mathbb{R}^1 \rightarrow N(D_0)$ ; кроме того,  $P_{Q_\rho^*} \in \mathbb{R}^{\rho \times m}$  – матрица, составленная из  $\rho$  линейно независимых строк ортопроектора  $P_{Q^*}$ . В случае  $P_{D_0^*}P_{Q_\rho^*} = 0$ ,  $P_{D_0} = 0$  уравнение (3) имеет единственное решение

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\}.$$

Необходимые условия существования решения нетеровой краевой задачи (1) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующего утверждения [7].

**Лема 1.** Пусть нетерова ( $m \neq n$ ) краевая задача (1) представляет критический ( $P_{Q^*} \neq 0$ ) случай и выполнено условие разрешимости порождающей задачи (2). Предположим также, что задача (1) имеет решение, обращающееся при  $\varepsilon = 0$  в порождающее  $z_0(t, c_0^*)$  и существует непрерывная функция  $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$ ; тогда  $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0^*) = 0$ . При условии

$$P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0$$

имеет место равенство

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\}.$$

В случае  $P_{D_0^*} P_{Q_\rho^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0$  для любого фиксированного вектора  $c_0^* \in \mathbb{R}^r$  константа  $\mu_0^*$  определяет порождающее решение  $z_0(t, c_0^*)$ , в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной задачи (1). При условии

$$P_{D_0^*} \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} \neq 0$$

исходная задача (1) не имеет искомым решений. Если же

$$P_{D_0^*} \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} = 0, \quad P_{D_0} \neq 0,$$

то константа  $\mu_0^*$  находится неоднозначно

$$\mu_0^* = -D_0^+ \cdot P_{Q_\rho^*} \left\{ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) - \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} + P_{D_0} \cdot \tilde{\mu}_0, \quad \tilde{\mu}_0 \in \mathbb{R}^1.$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае первого или второго порядка [1], а также периодическими краевыми задачами [2], уравнение  $\mathcal{F}(c_0^*, \mu_0) = 0$  будем называть уравнением для порождающих констант задачи (1) в случае параметрического резонанса.

Предположим, что уравнение (3) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений  $c_0^* \in \mathbb{R}^r, \quad \mu_0^* \in \mathbb{R}^1$  уравнения (3), приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) \equiv 0$$

задачи (1) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_0^*) = X_r(t)c_0^* + G[f(s); \alpha](t),$$

а также функции

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0^* + \gamma(\varepsilon), \quad \gamma(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0], \quad \gamma(0) = 0$$

в окрестности точки  $\mu_0^*$ . Отклонение

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

от порождающего решения определяет краевая задача

$$dx(t, \varepsilon)/dt = A(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad (5)$$

разрешимая тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_p^*} \left\{ \mu(\varepsilon) \mathcal{H}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) + \mathcal{L}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell K \left[ \mu(\varepsilon) \mathcal{M}(z, s, \varepsilon) + \mathcal{N}(z, s, \varepsilon) \right] (\cdot) \right\} = 0.$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость по первому аргументу функций  $\mathcal{M}(z, t, \varepsilon)$  и  $\mathcal{N}(z, t, \varepsilon)$  в окрестности порождающего решения и непрерывную дифференцируемость по третьему аргументу, разлагаем эти функции в окрестности точек  $x = 0$  и  $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \mathcal{M}(z_0(t, c_0^*), t, 0) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \\ \mathcal{N}(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \mathcal{N}(z_0(t, c_0^*), t, 0) + B_1(t)x(t, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon); \end{aligned}$$

здесь

$$A_1(t) = \left. \frac{\partial \mathcal{M}(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}}, \quad A_2(t) = \left. \frac{\partial \mathcal{M}(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}},$$

и

$$B_1(t) = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}}, \quad B_2(t) = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(z, t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}}.$$

Остатки  $R_M(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  и  $R_N(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  разложения функций  $Z(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  более высокого порядка малости по  $x$  и  $\varepsilon$  в окрестности точек  $x = 0$  и  $\varepsilon = 0$ , чем первые три члена разложений, поэтому

$$R_M(z, t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_M(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0,$$

и

$$R_N(z, t, \varepsilon) \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0, \quad \frac{\partial R_N(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} \equiv 0.$$

Аналогично используя непрерывную дифференцируемость (в смысле Фреше) по первому аргументу векторных функционалов  $\mathcal{H}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  и  $\mathcal{L}(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  и непрерывность по второму аргументу, выделяем линейные по  $x$  и по  $\varepsilon$  части  $h_1x(\cdot, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0)$ ,  $\ell_1x(\cdot, \varepsilon)$  и  $\varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0)$ , этих функционалов и члены

$$\mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) := \mathcal{H}(z(\cdot, 0), 0), \quad \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) := \mathcal{L}(z(\cdot, 0), 0)$$

нулевого порядка по  $\varepsilon$  в окрестности точек  $x = 0$  и  $\varepsilon = 0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) &= \mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + h_1x(\cdot, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \\ \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) &= \mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + \ell_1x(\cdot, \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Остатки  $J_H(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  и  $J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  разложения функционалов  $\mathcal{H}(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  и  $\mathcal{L}(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$  более высокого порядка малости по  $x$  и  $\varepsilon$  в окрестности точек  $x = 0$  и  $\varepsilon = 0$ , чем первые два члена разложения, поэтому

$$\begin{aligned} J_H(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0, \quad \frac{\partial J_H(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial z} \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0, \\ \frac{\partial J_H(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_0^*), \\ \varepsilon = 0}} = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения функции  $\gamma(\varepsilon)$  приходим к уравнению

$$\begin{aligned} D_0 \cdot \gamma(\varepsilon) &= -P_{Q_p^*} \left\{ (\mu_0^* + \gamma(\varepsilon)) \left[ h_1x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] + \right. \\ &+ \ell_1x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ &- \ell K \left\{ (\mu_0^* + \gamma(\varepsilon)) \left[ A_1(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] + \right. \\ &\left. \left. + B_1(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, при условии

$$P_{D_0^*} P_{Q_p^*} = 0, \quad P_{D_0} = 0$$

задача (4), (5) разрешима, причем однозначно; ее решение определяет операторная система

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[ Z(z_0(s, c_0^*) + x(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon) = & -D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ (\mu_0^* + \gamma(\varepsilon)) \left[ h_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] + \right. \\ & + \ell_1 x(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K \left\{ (\mu_0^* + \gamma(\varepsilon)) \left[ A_1(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] + \right. \\ & \left. \left. + B_1(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} (\cdot) \right\}. \end{aligned}$$

Для построения приближенного решения операторной системы (6) в случае  $P_{D_0^*} P_{Q_p^*} = 0$ ,  $P_{D_0} = 0$  применим метод простых итераций [1, 2]. Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть для краевой задачи (1) имеет место критический случай  $P_{Q^*} \neq 0$  и выполнено условие разрешимости порождающей задачи (2). Тогда для каждого корня  $c_0^* \in \mathbb{R}^r$ ,  $\mu_0^* \in \mathbb{R}^1$  уравнения (3) при условиях  $P_{D_0^*} P_{Q_p^*} = 0$  и  $P_{D_0} = 0$  задача (4), (5) имеет единственное решение

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], x(t, 0) \equiv 0,$$

определяемое операторной системой (6), и существует непрерывная функция  $\mu(\varepsilon) : \mu(0) := \mu_0^*$ . При этом нетривиальная ( $m \neq n$ ) задача (1) имеет единственное решение

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], z(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], z(t, 0) = z_0(t, c_0^*).$$

Для построения решения операторной системы (6) для  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$  применима итерационная схема

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t, \varepsilon) = & \varepsilon G \left[ Z(z_0(s, c_0^*) + x_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon); J(z_0(\cdot, c_0^*) + x_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \\ \gamma_{k+1}(\varepsilon) = & -D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \left\{ (\mu_0^* + \gamma_k(\varepsilon)) \left[ h_1 x_{k+1}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon h_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_H(z_{k+1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] + \right. \\ & + \ell_1 x_{k+1}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon \ell_2(z_0(\cdot, c_0^*), 0) + J_L(z_0(\cdot, c_0^*) + x_{k+1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ & - \ell K \left\{ (\mu_0^* + \gamma_k(\varepsilon)) \left[ A_1(t)x_{k+1}(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] + \right. \\ & \left. \left. + B_1(t)x_{k+1}(t, \varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} (\cdot) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Длина отрезка  $[0, \varepsilon_*]$ , на котором применим метод простых итераций, может быть оценена, как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 2], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (6) аналогично [6].

**3. Уравнение колебаний маятника с параметрическим возбуждением.** Условия доказанной теоремы выполняются в случае  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения

$$u'' + (1 + \varepsilon\lambda(\varepsilon)) \sin u - \varepsilon^2 \cos t = 0. \tag{7}$$

Решение

$$u(t, \varepsilon) : u(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \quad u(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad u(t, 0) \equiv 0$$

$2\pi$ -периодической задачи для уравнения (7) ищем в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon \cos t + \varepsilon^2 y(t, \varepsilon).$$

Неизвестная

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$$

является решением  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения

$$y'' + y = \varepsilon Y(y, t, \lambda(\varepsilon), \varepsilon).$$

Нелинейная функция

$$Y(y, t, \lambda(\varepsilon), \varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon^3} \left[ u - (1 + \varepsilon\lambda(\varepsilon)) \sin u + \varepsilon^2 \cos t \right]$$

при условии  $\lambda_0^* := \lambda(0) = 1$  непрерывно дифференцируема по  $y$  в малой окрестности решения порождающей задачи и по малому параметру  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ , а также непрерывна по  $t$  на отрезке  $[a, b]$ . Согласно принятым обозначениям, в случае периодической задачи для уравнения (7), приходим к задаче о нахождении  $2\pi$ -периодического решения

$$z(t, \varepsilon) = \text{col} \left( z^{(a)}(t, \varepsilon), z^{(b)}(t, \varepsilon) \right), \quad z^{(a)}(t, \varepsilon), z^{(b)}(t, \varepsilon) \in C^1[0, 2\pi], C[0, \varepsilon_0]$$

системы

$$dz/dt = A(t)z + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon) \tag{8}$$

и функции

$$\mu(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot [\lambda(\varepsilon) - \lambda_0^*] \in C[0, \varepsilon_0],$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z(z, t, \varepsilon) = \mu(\varepsilon)\mathcal{M}(z, t, \varepsilon) + \mathcal{N}(z, t, \varepsilon), \quad J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0.$$

Нелинейные вектор-функции

$$\mathcal{M}(z, t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos t - \varepsilon \cdot z^{(a)}(t, \varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \cos^3 t + \frac{1}{2}\varepsilon^3 \cos^2 t \cdot z^{(a)}(t, \varepsilon) + \dots \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z, t, \varepsilon) = & \left[ \frac{1}{6} \cos^3 t - z^{(a)}(t, \varepsilon) + \frac{1}{6} \varepsilon \left( \cos^3 t + 3 \cos^2 t z^{(a)}(t, \varepsilon) \right) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{120} \left[ -\cos^5 t + 60 \cos^2 t z^{(a)}(t, \varepsilon) + 60 \cos t \left( z^{(a)}(t, \varepsilon) \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^3}{120} \left[ -\cos^5 t - 5 \cos^4 t z^{(a)}(t, \varepsilon) + 60 \cos t \left( z^{(a)}(t, \varepsilon) \right)^2 + 20 \left( z^{(a)}(t, \varepsilon) \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

непрерывно дифференцируемы по  $z$  в малой окрестности решения порождающей задачи, непрерывны по  $t$  на отрезке  $[a, b]$  и непрерывно дифференцируемы по малому параметру  $\varepsilon$  на отрезке  $[0, \varepsilon_0]$ . Нормальная фундаментальная матрица линейной части дифференциального уравнения (8) суть функция

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $Q = X(0) - X(2\pi) = 0$ , постольку имеет место критический случай; при этом  $r = 2$ ,  $P_{Q^*} = P_{Q_r} = I_2$ . Вычисляем далее оператор Грина задачи Коши

$$K \left[ f(s) \right] (t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

для линейной части дифференциального уравнения (8) с произвольной неоднородностью  $f(t)$  :

$$dz/dt = A(t)z + f(t).$$

При этом

$$\ell K \left[ f(s) \right] (\cdot) = K \left[ f(s) \right] (0) - K \left[ f(s) \right] (2\pi) = - \int_0^{2\pi} X^{-1}(s) f(s) ds,$$

следовательно

$$P_{Q_r^*} \ell K \left[ f(s) \right] (\cdot) = - \int_0^{2\pi} X^{-1}(s) f(s) ds.$$

Заметим также, что в силу равенства  $Q = Q^+ = 0$  оператор Грина задачи Коши линейной части дифференциального уравнения (8) с произвольной неоднородностью  $f(t)$  совпадает с оператором Грина  $2\pi$ - периодической задачи

$$G \left[ f(s); 0 \right] (t) \equiv K \left[ f(s) \right] (t).$$

Фиксируя вектор

$$c_0^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$



приходим к задаче об отыскании решения

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), \quad x(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) = 0$$

$2\pi$ -периодической задачи для уравнения (8) в окрестности порождающего решения

$$z_0(t, c_0^*) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}.$$

Неравенство

$$D_0 := -P_{Q_p^*} \ell K \left[ \mathcal{M}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) = -\pi \neq 0$$

гарантирует выполнение условий  $P_{D_0^*} P_{Q_p^*} = 0$  и  $P_{D_0} = 0$  и следовательно, однозначную разрешимость  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (8), при этом согласно доказанной лемме

$$\mu_0^* = D_0^{-1} \cdot P_{Q_p^*} \left\{ \ell K \left[ \mathcal{N}(z_0(s, c_0^*), s, 0) \right] (\cdot) \right\} = -\frac{7}{8}.$$

Первое приближение к решению задачи (4), (5) в случае  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (8)

$$x_1(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[ Z(z_0(s, c_0^*), s, 0); J(z_0(\cdot, c_0^*), 0) \right] (t) = \frac{1}{192} \begin{bmatrix} \cos t - \cos 3t \\ -\sin t + \sin 3t \end{bmatrix}$$

определяет первое приближение

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varepsilon) = D_0^+ \cdot P_{Q_p^*} \ell K \left\{ \mu_0^* \left[ A_1(t)x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R_M(z_0(t, c_0^*) + x_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right] + \right. \\ \left. + B_1(t)x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon B_2(t) + R_N(z_0(t, c_0^*) + x_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\} (\cdot) = \frac{263\varepsilon}{192} + \frac{985\varepsilon^2}{1536} + \frac{37\varepsilon^3}{256} + \dots \end{aligned}$$

к функции  $\gamma(\varepsilon)$ . Таким образом, на первом шаге итерационной схемы найдено первое приближение к решению  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (7)

$$y_1(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{\varepsilon}{192} (\cos t - \cos 3t), \quad \mu_1(\varepsilon) = -\frac{7}{8} + \frac{263\varepsilon}{192} + \frac{985\varepsilon^2}{1536} + \frac{37\varepsilon^3}{256} + \dots$$

Более точные приближения  $2\pi$ -периодической задачи для уравнения (7) удобнее искать при помощи метода малого параметра Пуанкаре; так, на девятом шаге находим  $2\pi$ -периодическое приближение к решению уравнения (7)

$$\begin{aligned} y_9(t, \varepsilon) = \cos t + \frac{\varepsilon}{192} (\cos t - \cos 3t) + \frac{11\varepsilon^2}{512} (\cos t - \cos 3t) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{61\,440} (1\,742 \cos t - 1\,745 \cos 3t + 3 \cos 5t) + \\ + \frac{\varepsilon^4}{49152} (665 \cos t - 681 \cos 3t + 16 \cos 5t) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^5}{82\,575\,360} \left( 312\,112 \cos t - 382\,802 \cos 3t + 70\,735 \cos 5t - 45 \cos 7t \right) + \\
& + \frac{\varepsilon^6}{566\,231\,040} \left( 2\,438\,947 \cos t - 3\,081\,462 \cos 3t + 645\,380 \cos 5t - 2\,865 \cos 7t \right) + \\
& \quad + \frac{\varepsilon^7}{190\,253\,629\,440} \left( 520\,915\,783 \cos t - 680\,323\,640 \cos 3t + \right. \\
& \quad \left. + 163\,203\,292 \cos 5t - 3\,796\,695 \cos 7t + 260 \cos 9t \right) + \\
& \quad + \frac{\varepsilon^8}{9\,132\,174\,213\,120} \left( 11\,946\,649\,831 \cos t - 16\,160\,177\,268 \cos 3t + \right. \\
& \quad \left. + 4\,612\,534\,556 \cos 5t - 399\,727\,965 \cos 7t + 720\,846 \cos 9t \right) + \\
& \quad + \frac{\varepsilon^9}{24\,108\,939\,922\,636\,800} \left( 22\,427\,461\,473\,545 \cos t - 30\,903\,787\,349\,028 \cos 3t + \right. \\
& \quad \left. + 9\,898\,090\,977\,940 \cos 5t - 1\,431\,776\,839\,185 \cos 7t + \right. \\
& \quad \left. + 10\,013\,777\,928 \cos 9t - 2\,041\,200 \cos 11t \right),
\end{aligned}$$

а также функцию

$$\begin{aligned}
\lambda_9(\varepsilon) = & 1 - \frac{7\varepsilon}{8} + \frac{263\varepsilon^2}{192} - \frac{3\varepsilon^3}{4} + \frac{97\,177\varepsilon^4}{92\,160} - \frac{1\,326\,277\varepsilon^5}{1\,474\,560} + \\
& + \frac{3\,352\,913\varepsilon^6}{3\,096\,576} - \frac{3\,799\,821\,737\varepsilon^7}{3\,963\,617\,280} + \frac{978\,739\,999\,673\varepsilon^8}{951\,268\,147\,200} - \\
& - \frac{44\,407\,726\,679\,639\varepsilon^9}{45\,660\,871\,065\,600} + \frac{4\,903\,768\,365\,486\,719\varepsilon^{10}}{4\,821\,787\,984\,527\,360}.
\end{aligned}$$

Девятое приближение к  $2\pi$ -периодическому решению уравнения (7) и его собственной функции  $\lambda(\varepsilon)$  характеризует невязка

$$\delta_9(\varepsilon) = \left\| u_9''(t, \varepsilon) + \left( 1 + \varepsilon \lambda_9(\varepsilon) \right) \sin u_9(t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \cos t \right\|_{C[0;2\pi]}.$$

В частности

$$\delta_9(0, 1) \approx 9,62\,182 \times 10^{-14}, \quad \delta_9(0, 01) \approx 5,00\,088 \cdot 10^{-18}.$$

В случае параметрического резонанса определенная теорема является обобщением соответствующего утверждения [7].

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5 — 29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
6. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — 8, № 2. — С. 278 — 288.
7. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — 24. — С. 243 — 252.