УДК 512.64+512.56

Черв'яков І. В. (Інститут математики НАН України)

ЧИСЛО ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН, (MIN, MAX)-ЕКВІВАЛЕНТНИХ МНОЖИНІ $(1,3,5)$

We describe the number of posets which are (min, max)-equivalent to the primitive poset $(1,3,5)$.

Описано число частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних примітивній частково впорядкованій множині $(1,3,5)$.

За теоремою М. М. Клейнера [1] частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5)$ і $(И,4)$, які називають критичними ч. в. множинами. В. М. Бондаренко та М. В. Стьопочкіна [2] довели, що ч. в. множина є P-критичною (критичною відносно додатності квадратичної форми Тітса) тоді і тільки тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій критичній множині ((min, max)-еквівалентність введена В. М. Бондаренком в роботі [3]); в роботі [2] також повністю описані всі P-критичні множини.

Аналогічна ситуація має місце і для ручних ч. в. множин. У роботі [4] доведено, що ч. в. множина є ручною тоді і тільки тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ і $(И,5)$, які називають суперкритичними. В. М. Бондаренко та М. В. Стьопочкіна [5] довели, що ч. в. множина є критичною відносно невід'ємності квадратичної форми Тітса тоді і тільки тоді, коли вона (min, max)-еквівалентна деякій суперкритичній множині; всі такі критичні множини описані ними в роботі [6].

У роботі [7] введено поняття 1-надсуперкритичних ч. в. множин, які "відрізняються" від суперкритичних множин в такій же мірі, як суперкритичні множини відрізняються від критичних. Це такі ч. в. множини:

1) $(1,1,1,1,1,1)$,	2) $(1,1,1,1,2)$,
3) $(1,1,2,2)$,	4) $(1,1,1,3)$,
5) $(2,3,3)$,	6) $(2,2,4)$,
7) $(1,4,4)$,	8) $(1,3,5)$,
9) $(1,2,7)$,	10) $(6,И)$.

Легко бачити, що група автоморфізмів 1-надсуперкритичної множини дорівнює S_6 у випадку 1), S_4 у випадку 2), $S_2 \times S_2$ у випадку 3), S_3 у випадку 4), S_2 у випадках 5), 6), 7) є одиничною в решті випадків – 8), 9), 10), де S_m позначає симетричну групу ступеня m.

У цій роботі обчислено число всіх ч. в. множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній ч. в. множині з тривіальною групою автоморфізмів $(1,3,5)$. При цьому використовуються основні результати робіт [7, 8].

1. Формулювання основного результату. Протягом статті всі ч. в. множини вважаються скінченними. Ч. в. множина $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ — це неперетинне об'єднання ланцюгів довжини $l_1, l_2, \ldots, l_s$.

Нагадаємо деякі означення та твердження, пов'язані з (min, max)-еквівалентністю ч. в. множин, введеною В. М. Бондаренком у роботі [3].

Нехай S — ч. в. множина. Зіставимо мінімальному елементу $a \in S$ ч. в. множину $S_a^{\uparrow}$ наступним чином: вона є об'єднанням підмножин $\{a\}$ і $S \setminus a$ з найменшим частковим порядком, який містить заданий на $S \setminus a$ порядок і $a > b$ в $S_a^{\uparrow}$, якщо a і b непорівняльні в S (елемент a стає вже максимальним). Дуальним чином вводиться ч. в. множина $S_a^{\downarrow}$ для максимального елемента $a \in S$. Надалі будемо писати $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ замість $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ і т. д.

Ч. в. множина T називається (min, max)-еквівалентною ч. в. множині S, якщо T має наступний вигляд:

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \ (p \geq 0),$$

де $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ (не вимагається, щоб елементи $x_1 x_2 \ldots x_p$ були різними).

Поняття (min, max)-еквівалентності природним чином продовжується до понятття (min, max)-ізоморфізма: ч. в. множини S і S' (min, max)-ізоморфні, якщо існує ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна S і ізоморфна S'.

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай S — 1-надсуперкритична ч. в. множина з тривіальною групою автоморфізмов $S = (1, 3, 5)$. Число ч. в. множин (з точністю до ізоморфізму), (min, max)-еквівалентних S, дорівнює 60.*

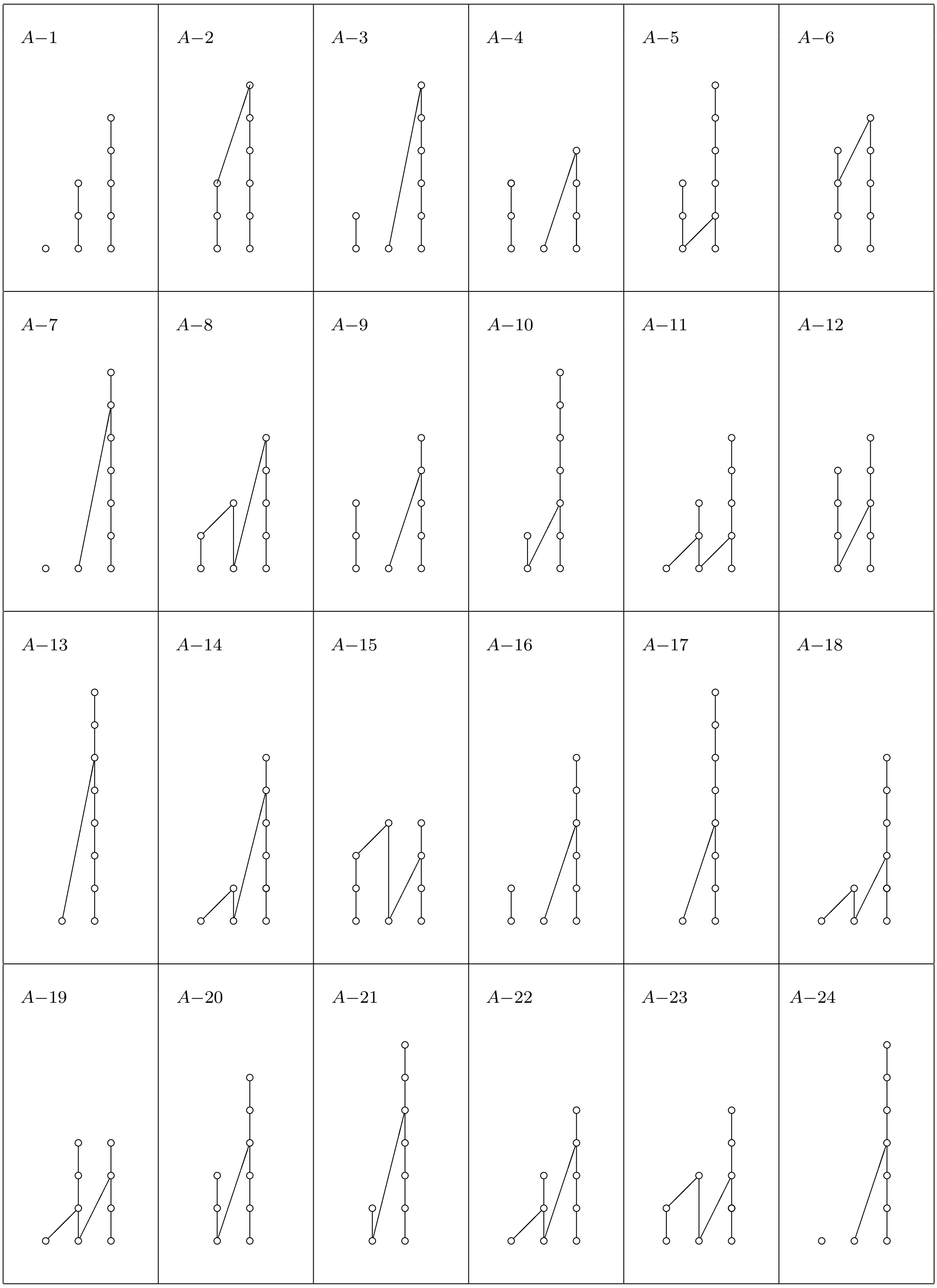
Зауважимо, що в умові теореми (min, max)-еквівалентність можна замінити (min, max)-ізоморфізмом.

2. Min-еквівалентність. У випадку, коли в означенні (min, max)-еквівалентності всі стрілки ε_i направлені вгору, ч. в. множина T називається min-еквівалентною ч. в. множині S (ці обидва відношення еквівалентності є рівнозначними). Нагадаємо ще деякі означення та твердження роботи [2].

Послідовність $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\ 0 \leq p < \infty$, довжини $d(\alpha) = p$ елементів $x_i \in S$ називається min-допустимо, якщо вираз $T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ має сенс. У цьому випадку також пишуть $T = S_{\alpha}^{\uparrow}$. Множина всіх таких послідовностей позначається $\mathcal{P}(S)$. Покладемо $[\alpha]_S = \{x \in S \mid x = x_i$ для деякого $i\}$. Кратність входження $a \in S$ в α позначається через $m_{\alpha}(a)$. Множина всіх послідовностей $\alpha \in \mathcal{P}(S)$ таких, що $m_{\alpha}(x) \leq k$ для довільного $x \in S$, позначається через $\mathcal{P}_k(S)$. Зокрема, $\mathcal{P}_1(S)$ — це множина всіх min-допустимих послідовностей без повторень.

У роботі [2] доведено, що будь-яка ч. в. множина T, яка (min, max)-еквівалентна ч. в. множині S, має вигляд $S_{\alpha}^{\uparrow}$, де $\alpha \in \mathcal{P}_2(S)$. Більш детально, ч. в. множина T має вигляд або $S_{\alpha}^{\uparrow}$, або $(S_{\alpha}^{\uparrow})_{\beta}^{\uparrow}$, де $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$. Причому у другому випадку є одна достатньо сильна умова, що пов'язує множини $[\alpha]_S$ та $[\beta]_S$.

3. Доведення теореми 1. Ч. в. множини вигляду $S_{\alpha}^{\uparrow}$ для $S = (1, 3, 5)$ описані в роботі [7]. Вони приведені (з точністю до дуальності) в наступній таблиці (також вказаній в [7]):


$A-1$
$A-2$
$A-3$
$A-4$
$A-5$
$A-6$
$A-7$
$A-8$
$A-9$
$A-10$
$A-11$
$A-12$
$A-13$
$A-14$
$A-15$
$A-16$
$A-17$
$A-18$
$A-19$
$A-20$
$A-21$
$A-22$
$A-23$
$A-24$

Легко порахувати, що число таких ч. в. множин дорівнює 47, якщо їх розглядати з точністю до ізоморфізму (а не з точністю до дуальності, як виписано в таблиці); про це говорить і одне з тверджень роботи [7].

Скористаємося тепер основним результатом роботи [8], із якого випливає, що якщо ч. в. множина T (min, max)-еквівалентна примітивній ч. в. множині S, але не може бути представлена у вигляді $S_\alpha^\uparrow$, де $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, то T отримується із деякої ч. в. множин $S_\beta^\uparrow$, де $\beta \in \mathcal{P}_1(S)$, перерозподілом вузлових точок його зв'язних компонент (точка називається вузловою, якщо вона порівняльна з усіма іншими точками). Більш точно, будь-яку зв'язну компоненту $P = P_0 \cup P_1$, де P_0 — множина вузлових точок P, дозволяється замінити компонентою такого ж вигляду $P' = P_0' \cup P_1'$, де $P_1' = P_1$ (як ч. в. множини) та $|P_0'| = |P_0|$. Оскільки вузлові точки ланцюгів не дають нових ч. в. множин, а також не дають нових ч. в. множин компоненти з однією вузловою точкою, то потрібно розглянути лише ч. в. множини $A-7$, $A-9$, $A-13$, $A-16$, $A-17$, $A-24$ (див. таблицю). Легко бачити, що в цих випадках число нових ч. в. множин буде відповідно $1, 1, 2, 2, 4, 3$. Отже, число нових ч. в. множин дорівнює 13 і, додаючи 47 ч. в. множин, що мають відношення до таблиці (з врахуванням дуальних множин), маємо загальне число 60.

Теорема доведена.

Автор щиро вдячний В. М. Бондаренку за увагу до роботи та цінні поради.

1. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
2. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18-58.
3. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – С. 24-25.
4. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, N5. – С. 963–991.
5. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журнал. – 2008, **60**, №9. – С. 1157-1167.
6. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, №5. – С. 734–746.
7. *Бондаренко В.В., Бондаренко В.М., Степочкина М.В., Червяков И.В.* 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. I // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 17-25.
8. *Bondarenko V. M.* Minimax isomorphism algorithm and primitive posets // Algebra Discrete Math. – 2011. – **12**, N2. – P. 31–37.

Одержано 12.03.2013