

А.Г. Лавер, Н.Р. Сиденко

Усреднение периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного слабо нелинейного параболического уравнения// Украинский математический журнал, 1983, том 35, №4 с.441-447

ISSN 0041-6053

УКРАИНСКИЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

4

ТОМ 35

НАУКОВА ДУМКА

1983



УДК 517.947

А. Г. Лавер, Н. Р. Сиденко

Усреднение периодической по времени  
краевой задачи для сингулярно возмущенного  
слабо нелинейного параболического уравнения

Исследуем поведение при  $\epsilon \rightarrow +0$  решения краевой задачи с разрывными коэффициентами

$$\epsilon \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \left( x, t, \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \right) + a_0 \left( x, t, \frac{x}{\epsilon} \right) u^\epsilon = f \left( x, t, \frac{x}{\epsilon}, u^\epsilon \right), \quad x \in \Omega, t \in R, \quad (1)$$

$$u^\epsilon(x, t + T) = u^\epsilon(x, t), \quad u^\epsilon(x, t)|_\Gamma = 0,$$

где  $\Omega$  — ограниченная область в  $R^n$  с границей  $\Gamma$ , по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до  $n$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  — вариационные производные,  $T = \text{const} > 0$ , имея в виду, что выполняются неравенства

$$a_{ij}(x, t, y) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2, \quad a_0(x, t, y) \geq 0 \quad \forall \xi, y \in R^n, \quad x \in \Omega, t \in R, \quad (2)$$

$$\alpha_0 = \text{const} > 0.$$

Коэффициенты  $a_{ij}(x, t, y)$ ,  $a_0(x, t, y)$  и функция  $f(x, t, y, u)$ ,  $u \in R$ , периодические по  $y \in R^n$  с параллелепипедом периодичности  $Y = \prod_{i=1}^n (0, y_i^0)$  и по  $t$  — с периодом  $T$  (обозначение:  $a_{ij}(x, t, \cdot) \in \mathcal{T}(Y)$ ,  $a_{ij}(x, \cdot, y) \in \mathcal{T}(0, T)$  и т. д.).

1. Будем предполагать, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям: 1)  $\Omega$  — липшицева область; 2) коэффициенты  $a_{ij}(x, t, y)$ ,  $a_0(x, t, y)$  определены, измеримы и ограничены на  $\Omega \times R \times R^n$ , причем равномерно периодичны по  $t$  с периодом  $T$  и по  $y$  с параллелепипедом периодичности  $Y$ , и удовлетворяют условиям (2); 3) функция  $f(x, t, y, u)$   $\forall u \in R$  измерима по  $(x, t, y) \in \Omega \times R \times R^n$ ; 4)  $\forall (x, u) \in \Omega \times R$  равномерно периодична по  $t$  с периодом  $T$  и по  $y$  с параллелепипедом  $Y$ ; 5) равномерно непрерывна по  $(x, u)$  на каждом ограниченном множестве  $\{x \in \Omega, |u| < M\}$ , причем равномерно относительно почти всех (п. в.)  $(t, y) \in (0, T) \times Y$ ; 6) всюду в  $\Omega \times (0, T) \times Y \times R$  удовлетворяет неравенству  $|f(x, t, y, u)| \leq f_0(x, t) + c|u|$ ,  $f_0 \in L_2(Q_T)$ ,  $c = \text{const}$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ; (3) не возрастает по  $u \forall (x, t, y) \in \Omega \times (0, T) \times Y$ .

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) — 7). Тогда при  $\epsilon > 0$  задача (1) будет иметь единственное решение

$$u^\epsilon \in L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap H^{1/2}(0, T; L_2(\Omega)).$$

Доказательство. Положив  $f^\epsilon(u)(x, t) = f(x, t, x/\epsilon, u(x, t))$ , определим оператор суперпозиции, действующий в силу условий 3), 5), 6) [1] в пространстве  $L_2(Q_T) \cap \mathcal{T}(0, T)$ . Определим линейный оператор  $A_\epsilon$  с областью  $D(A_\epsilon) = \{u \in L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T) \mid \partial u / \partial t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$ , совпадающий с левой частью уравнения (1) и действующий в пространство  $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T)$ . Ввиду (2)  $\forall u \in L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T)$  имеем неравенство

$$(A_\epsilon u, u) = \int_{Q_T} \left( a_{ij}^\epsilon(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0^\epsilon(x, t) u^2 \right) dx dt \geq \alpha_0 \|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2, \quad (4)$$



где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(Q_T)$ ,  $a_{ij}^\varepsilon(x, t) = a_{ij}(x, t, x/\varepsilon)$ ,  $a_0^\varepsilon(x, t) = a_0(x, t, x/\varepsilon)$ . Следовательно, справедлива оценка

$$\|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|A_\varepsilon u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}, \quad (5)$$

а значит, в силу уравнения (1)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))} &\leq C_\varepsilon (\|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} + \|A_\varepsilon u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}) \leq \\ &\leq C_\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\alpha_0}\right) \|A_\varepsilon u\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из оценок (5), (6) вытекает существование ограниченного обратного оператора  $A_\varepsilon^{-1}: L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap \mathcal{S}(0, T) \rightarrow D(A_\varepsilon)$ , где  $D(A_\varepsilon)$  рассматривается как гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|_{A_\varepsilon} = \left[ \|u\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))}^2 \right]^{1/2}.$$

Так что, задаче (1) эквивалентно функциональное уравнение в  $L_2(Q_T) \cap \mathcal{S}(0, T)$ :

$$u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon). \quad (7)$$

Разрешимость последнего докажем с помощью принципа Лере—Шаудера [2]. С этой целью рассмотрим уравнение с параметром  $\alpha \in [0, 1]$

$$u_\alpha^\varepsilon = \alpha A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon). \quad (8)$$

1. Непрерывность оператора в правой части по параметру  $\alpha$ , равномерная на каждом ограниченном множестве в  $[0, 1] \times (L_2(Q_T) \cap \mathcal{S}(0, T))$ , имеет место в силу непрерывности  $A_\varepsilon^{-1}$  и ограниченности оператора суперпозиции в  $L_2(Q_T)$ .

2. При каждом фиксированном  $\alpha \in [0, 1]$  правая часть (8) вполне непрерывна как преобразование  $L_2(Q_T) \cap \mathcal{S}(0, T) \rightarrow L_2(Q_T) \cap \mathcal{S}(0, T)$ .

Действительно, непрерывность оператора — следствие непрерывности оператора суперпозиции [1] как преобразования  $L_2(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$ , ограниченности  $A_\varepsilon^{-1}$  и вложений  $L_2(Q_T) \subset L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ,  $D(A_\varepsilon) \subset L_2(Q_T)$ . Далее, на основании вложения [3]  $D(A_\varepsilon) \subset C(0, T; L_2(\Omega))$  имеем непрерывное отображение

$$A_\varepsilon^{-1}: L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \rightarrow \dot{V}_2^{1,0}(Q_T) = L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap C(0, T; L_2(\Omega)). \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $A_\varepsilon^{-1} f \in \dot{W}_2^{1,1/2}(Q_T) \forall f \in L_2(Q_T)$  (см. [4], гл. III, теор. 4.3). При этом справедлива оценка

$$\|A_\varepsilon^{-1} f\|_{\dot{W}_2^{1,1/2}(Q_T)} \leq C_\varepsilon \|A_\varepsilon^{-1} f\|_{\dot{V}_2^{1,0}(Q_T)} \quad (10)$$

с постоянной  $C_\varepsilon$ , не зависящей от  $f$  (см. там же, лемма 4.2). Из (9), (10)  $\forall f \in L_2(Q_T)$  получаем оценку

$$\|A_\varepsilon^{-1} f\|_{\dot{W}_2^{1,1/2}(Q_T)} \leq C_\varepsilon \|f\|_{L_2(Q_T)}, \quad (11)$$

и не зависящей от  $f$  константой  $C_\varepsilon$ . Ввиду вложений

$$\dot{W}_2^{1,1/2}(Q_T) \subset H^{1/2}(Q_T) \subset L_2(Q_T), \quad (12)$$

где последнее вложение компактно, заключаем, что  $A_\varepsilon^{-1}$  — компактное преобразование  $L_2(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$ . Это доказывает компактность оператора  $A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u)$  в  $L_2(Q_T) \cap \mathcal{S}(0, T)$ , поскольку преобразование  $f^\varepsilon(u)$  ограничено.



$$t) = a_{ij}(x, t, x/\varepsilon),$$

(5)

3. Получим равномерную относительно  $\alpha$  априорную оценку в  $L_2(Q_T) \cap \mathcal{T}(0, T)$  решений уравнения (8). Поскольку  $u_\alpha^\varepsilon \in D(A_\varepsilon)$ , то, домножив в  $L_2(Q_T)$  скалярно уравнение  $A_\varepsilon u_\alpha^\varepsilon = \alpha f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon)$  на  $u_\alpha^\varepsilon$ , в силу (4) и условия 7 теоремы получаем

$$\alpha_0 \|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq \alpha (f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon), u_\alpha^\varepsilon) = \alpha (f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon) - f^\varepsilon(0), u_\alpha^\varepsilon) + \alpha (f^\varepsilon(0), u_\alpha^\varepsilon) \leq \\ \leq C \|f^\varepsilon(0)\|_{L_2(Q_T)} \|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))},$$

т. е.  $\|u_\alpha^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq C_1 \|f^\varepsilon(0)\|_{L_2(Q_T)} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Таким образом, для уравнения (8) выполнены все условия принципа Лере — Шаудера, из которого следует разрешимость уравнения (7). При этом в действительности его решение  $u^\varepsilon \in D(A_\varepsilon) \cap \dot{W}_2^{1,1/2}(Q_T)$ , что и утверждалось в теореме.

Вследствие неравенства (4) и условия 7 решение задачи (1) единственно в  $D(A_\varepsilon)$ . Действительно,

$$\alpha_0 \|u^\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq (A_\varepsilon(u^\varepsilon - u_1^\varepsilon), u^\varepsilon - u_1^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(u_1^\varepsilon), u^\varepsilon - u_1^\varepsilon) \leq 0.$$

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Утверждение теоремы 1 справедливо и при меньших ограничениях на коэффициенты и правую часть уравнения (1). Однако указанные условия 1)–7) существенны для исследования асимптотического поведения решения.

2. Исследуем поведение решения при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . С этой целью определим функцию  $\hat{u}(x, t)$  как решение гомогенизированной задачи [5]

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left( q_{ij}(x, t) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_j} \right) + \bar{a}_0(x, t) \hat{u} = \bar{f}(x, t, \hat{u}), \quad \hat{u}|_\Gamma = 0, \quad (13)$$

где

$$\bar{a}_0(x, t) = [a_0(x, t, \cdot)], \quad \bar{f}(x, t, u) = [f(x, t, \cdot, u)] \equiv \bar{f}(u)(x, t), \quad (14)$$

$$q_{ij} = \left[ a_{ij}(x, t, \cdot) - a_{hj}(x, t, \cdot) \frac{\partial \chi^i}{\partial y_h}(x, t, \cdot) \right], \quad [u(x, t, \cdot)] = \frac{1}{|Y|} \int_Y u(x, t, y) dy.$$

Функция  $\chi^k(x, t, y)$ ,  $k = \bar{1}, \bar{n}$ ,  $(x, t) \in \Omega \times R$ , определяется как решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial}{\partial y_j} (\chi^k - y_k) \right) = 0, \quad \chi^k(x, t, \cdot) \in V^\perp(Y), \quad (15)$$

$$V(Y) = H^1(Y) \cap \mathcal{T}(Y), \quad V^\perp(Y) = \{v \in V(Y) \mid [v] = 0\}.$$

Нетрудно видеть, что задача (15) имеет единственное решение, которое является ограниченной периодической по  $t$  с периодом  $T$  абстрактной функцией от  $(x, t)$  со значениями в  $V^\perp(Y)$ . Задача (13) имеет единственное решение в  $L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))$ . Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим случай кусочно-гладких коэффициентов  $a_{ij}$ . Пусть  $\bar{Y} = \bigcup_{i=1}^s \bar{Y}_i$ , где  $s \in N$ ,  $\partial Y_i \setminus \partial Y \in C^2$  (границы областей, в которых  $a_{ij}(x, t, \cdot)$

гладкие, — дифференцируемые многообразия класса  $C^2$ ). Обозначим  $\bar{W}_p^l(Y) = \bigoplus_{i=1, s} W_p^l(Y_i)$ ,  $\bar{C}^1(Y) = \bigoplus_{i=1, s} C^1(Y_i)$ ,  $C_1^l(Y) = \bar{C}^1(Y) \cap C(Y)$ . Справедлива теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и следующие: 1) коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $a_0$  равномерно непрерывны по  $x$  и для п. в.  $(t, y) \in (0, T) \times Y$ ,  $\forall x \in \Omega$  имеют измеримую ограниченную производную по  $t$ ;



2)  $a_{ij}(x, t, \cdot) \in C(Q_T; \bar{W}_\infty^1(Y))$ ,  $\partial a_{ij}/\partial x_l \in C(Q_T; \bar{W}_{p_0}^1(Y))$ ,  $p_0 > n$ ; 3) для п. в.  $(t, y)$ ,  $\forall (x, u) \in \Omega \times R$  существует измеримая производная  $\dot{f}_t$ , удовлетворяющая оценке (3); 4) для п. в.  $(t, y)$  и  $\forall x \in \Omega$  функция  $f$  абсолютно непрерывна по  $u$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  решение  $u^\varepsilon \rightarrow \hat{u}$  слабо в  $\dot{H}_T^1 = \{u \in H^1(Q_T) \cap \mathcal{F}(0, T) | u|_\Gamma = 0\}$ .

Доказательству теоремы предположим лемму.

Лемма. Пусть заданная на  $\Omega \times (0, T) \times R^n$  измеримая функция  $f(x, t, y)$  равномерно периодична по  $y$  с параллелепипедом периодичности  $Y$ , равномерно непрерывна по  $x$ , причем равномерно относительно п. в.  $(t, y) \in (0, T) \times Y$ , и имеет мажоранту  $f_0(x, t) \in L_p(Q_T)$ ,  $p \geq 1$ . Тогда при  $\varepsilon \rightarrow +0$   $f(x, t, x/\varepsilon) \rightarrow \bar{f}(x, t) = [f(x, t, \cdot)]$  слабо в  $L_p(Q_T)$ .

Доказательство леммы. Нужно показать, что

$$F^\varepsilon \varphi \equiv \int_{Q_T} f\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \bar{f}(x, t) \varphi(x, t) dx dt \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L_q(Q_T), \quad q = p/(p-1). \quad (16)$$

Выбрав  $\delta > 0$ , аппроксимируем фиксированную  $\varphi \in L_q(Q_T)$  функцией  $\tilde{\varphi} \in C(Q_T)$  так, чтобы  $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L_q(Q_T)} < \delta$ . Тогда

$$|F^\varepsilon(\varphi - \tilde{\varphi})| \leq \left\| f\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \bar{f}(x, t) \right\|_{L_p(Q_T)} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L_q(Q_T)} \leq 2 \|f_0\|_{L_p(Q_T)} \delta. \quad (17)$$

Рассмотрим в  $R^n$  периодическую структуру с образующим параллелепипедом  $Y$ . Гомететией  $\{x = \varepsilon y, y \in R^n\}$  в  $R^n$  задана соответствующая мелкая периодическая структура с узлами  $x_k^\varepsilon, k \in N$ . Обозначим  $\Pi_\varepsilon$  объединение параллелепипедов мелкой структуры, целиком содержащихся в  $\Omega$ . Пусть  $\Omega_\delta$  — множество точек в  $\Omega$ , расстояние от которых до  $\Gamma$  меньше  $\delta$ . Очевидно, что  $\Omega \setminus \Pi_\varepsilon \subset \Omega_{\varepsilon d}$ , где  $d$  — диаметр  $Y$ . Представив  $F^\varepsilon \tilde{\varphi}$  в виде

$$F^\varepsilon \tilde{\varphi} = \left( \int_{\Pi_\varepsilon \times (0, T)} + \int_{(\Omega \setminus \Pi_\varepsilon) \times (0, T)} \right) \left[ f\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \bar{f}(x, t) \right] \tilde{\varphi}(x, t) dx dt \equiv I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon, \quad (18)$$

имеем

$$|I_2^\varepsilon| \leq 2 \sup_{Q_T} |\tilde{\varphi}| \int_{(0, T) \times \Omega_{\varepsilon d}} f_0(x, t) dx dt \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0), \quad (19)$$

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon^n \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \int_{Y \times (0, T)} [f(x_k^\varepsilon + \varepsilon y, t, y) - \bar{f}(x_k^\varepsilon + \varepsilon y, t)] [\tilde{\varphi}(x_k^\varepsilon + \varepsilon y, t) - \tilde{\varphi}(x_k^\varepsilon, t)] \times \\ \times dy dt + \varepsilon^n \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \int_{Y \times (0, T)} [\dots] \tilde{\varphi}(x_k^\varepsilon, t) dy dt \equiv I_3^\varepsilon + I_4^\varepsilon, \quad (20)$$

где  $N(\varepsilon) \leq |\Omega|/(\varepsilon^n |Y|)$ . Интеграл  $I_3^\varepsilon$  оценивается через модуль непрерывности  $\omega_\varphi(h)$  функции  $\tilde{\varphi}$  в  $Q_T$ :

$$|I_3^\varepsilon| \leq 2 \|f_0\|_{L(Q_T)} \omega_\varphi(\varepsilon d) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0). \quad (21)$$

В силу предположенной равномерной непрерывности  $f(x, t, y)$  по  $x$  при всех достаточно малых  $\varepsilon$  справедливо неравенство

$$\varepsilon^n \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \int_{Y \times (0, T)} |f(x_k^\varepsilon + \varepsilon y, t, y) - f(x_k^\varepsilon, t, y)| |\tilde{\varphi}(x_k^\varepsilon, t)| dy dt \leq \sup_{Q_T} |\tilde{\varphi}| |\Omega| \delta, \quad (22)$$

и аналогичное — для  $\bar{f}(x, t)$ . Так что, для оценки  $I_4^\varepsilon$  осталось рассмотреть сумму

$$\varepsilon^n \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \int_{Y \times (0, T)} [f(x_k^\varepsilon, t, y) - \bar{f}(x_k^\varepsilon, t)] \tilde{\varphi}(x_k^\varepsilon, t) dy dt$$



Но каждый интеграл в ней, по определению  $\bar{f}(x, t)$ , равен нулю. Ввиду (17)—(22) имеет место (16).

Доказательство теоремы. Следуем методу Л. Таргара, изложенному в [5]. Так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем равномерную оценку

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq C \|f_0\|_{L_2(Q_T)} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (23)$$

Обозначая  $p_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon \partial u^\varepsilon / \partial x_j$ , ввиду (23) имеем

$$\|p_i^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)} \leq M_1 = \text{const} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (24)$$

Рассмотрим разностное отношение  $v_h^\varepsilon(x, t) = h^{-1} \Delta_h u^\varepsilon(x, t) = h^{-1} [u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)]$ , удовлетворяющее уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ h^{-1} \Delta_h \left( a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \right] + h^{-1} \Delta_h (a_0^\varepsilon u^\varepsilon) = h^{-1} \Delta_h f^\varepsilon(u^\varepsilon)(x, t). \quad (25)$$

Учитывая условия 2), 3) теоремы 2, представим  $h^{-1} \Delta_h f^\varepsilon$  для п.в.  $(x, t) \in Q_T$  в форме

$$h^{-1} \Delta_h f^\varepsilon(u^\varepsilon)(x, t) = v_h^\varepsilon \int_0^1 f_u \left( x, t + h, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(x, t) + \tau \Delta_h u^\varepsilon(x, t) \right) d\tau + \\ + \int_0^1 f_t \left( x, t + \tau h, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(x, t) \right) d\tau.$$

Аналогично, ввиду условия 1), имеем

$$h^{-1} \Delta_h \left( a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = h^{-1} \Delta_h a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon(x, t+h)}{\partial x_j} + a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial x_j} = \\ = \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}^\varepsilon(x, t + \tau h)}{\partial t} d\tau \frac{\partial u^\varepsilon(x, t+h)}{\partial x_j} + a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial x_j},$$

$$h^{-1} \Delta_h (a_0^\varepsilon u^\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial a_0^\varepsilon(x, t + \tau h)}{\partial t} d\tau u^\varepsilon(x, t+h) + a_0^\varepsilon(x, t) v_h^\varepsilon.$$

Умножая в  $L_2(Q_T)$  равенство (25) на  $v_h^\varepsilon$  и принимая во внимание условие 1) теоремы и что  $f_u \leq 0$ , при помощи неравенства Коши с малым  $\nu > 0$  получаем оценку

$$(\alpha_0 - \nu) \|v_h^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq C_\nu \int_0^1 (\|f_t\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2) d\tau.$$

Используя условие 3) теоремы и периодичность  $f$  и  $u^\varepsilon$  по  $t$ , из предыдущего неравенства выводим

$$\|v_h^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \leq C \left( \|f_0\|_{L_2(Q_T)}^2 + c^2 \|u^\varepsilon\|_{L_2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|u^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))}^2 \right).$$

Таким образом, с учетом (23) имеем

$$\|v_h^\varepsilon\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq M_2 = \text{const} \quad \forall \varepsilon, h. \quad (26)$$

В силу слабой компактности пространства  $L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))$  и полунепрерывности снизу его нормы, функции  $v_h^\varepsilon$  при  $h \rightarrow 0$  слабо сходятся в этом пространстве к  $\partial u^\varepsilon / \partial t$ . При этом вследствие (26) справедлива равномерная относительно  $\varepsilon$  оценка

$$\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(0, T; \dot{H}^1(\Omega))} \leq M_2. \quad (27)$$



На основании (3), (23), (24), (27) можно выделить такие подпоследовательности, по-прежнему обозначенные  $u^\varepsilon$ ,  $p_i^\varepsilon$ ,  $f^\varepsilon(u^\varepsilon)$ , что а)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  в  $\dot{H}_T^1$  слабо,  $p_i^\varepsilon \rightarrow p_i$ ,  $f^\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow F$  в  $L_2(Q_T)$  слабо. Поскольку вложение  $\dot{H}_T^1 \subset L_2(Q_T)$  компактно, имеем также б)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  в  $L_2(Q_T)$  сильно.

Переходя в (1) к слабому пределу в  $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , с учетом (27), условий а), б) и леммы имеем

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} p_i + \bar{a}_0 u = F. \quad (28)$$

Покажем, что  $F = \bar{f}(u)$ . В силу условия 7) теоремы 1

$$0 \geq (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(w), u^\varepsilon - w) \quad \forall w \in C(Q_T). \quad (29)$$

Используя б) и условия 5), 6) теоремы 1, на основании леммы переходим в (29) к пределу по  $\varepsilon$ :  $0 \geq (F - \bar{f}(w), u - w)$ . Последнее неравенство справедливо  $\forall w \in L_2(Q_T)$  в силу непрерывности оператора  $\bar{f}(u)$  в  $L_2(Q_T)$ . Положив  $w = u - \lambda v$ ,  $\lambda > 0$ ,  $v \in L_2(Q_T)$ , получаем  $(F - \bar{f}(u - \lambda v), v) \leq 0$ . Следовательно, устремив  $\lambda \rightarrow +0$ , имеем  $(F - \bar{f}(u), v) \leq 0 \quad \forall v \in L_2(Q_T)$ . Отсюда  $F = \bar{f}(u)$ .

Согласно [6]  $\forall p < \infty$  и заданного  $p_0 > n$  имеем

$$\begin{aligned} \chi^k(x, t, y) &\in C(Q_T; \vec{W}_p^2(Y)) \cap C(Q_T \times Y) \subset C(Q_T; C_l^1(Y)), \\ \frac{\partial \chi^k(x, t, y)}{\partial x_l} &\in C(Q_T; \vec{W}_{p_0}^2(Y)) \cap C(Q_T \times Y) \subset C(Q_T; C_l^1(Y)), \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Положим  $W_k(x, t, y) = y_k - \chi^k(x, t, y)$ ,  $W_k^\varepsilon(x, t) = x_k - \varepsilon \chi^k(x, t, x/\varepsilon)$ . Выберем произвольную  $\varphi \in \dot{C}_T^1 = \{\varphi \in C^1(Q_T) \cap \mathcal{T}(0, T) \mid \varphi|_{\Gamma} = 0\}$ . Умножая в  $L_2(Q_T)$  уравнение (1) скалярно на  $\varphi W_k^\varepsilon$ , получаем тождество

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi W_k^\varepsilon \right) + \left( p_i^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_k^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) + \\ + \left( p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial y_i} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon). \end{aligned} \quad (31)$$

Функция  $W_k$  удовлетворяет уравнению (15), а значит,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j} \right) \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = 0. \quad (32)$$

Ввиду (30) справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right) \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \quad (33)$$

вытекающее из (32). Умножив в  $L_2(Q_T)$  равенство (33) на  $\varphi u^\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} \left( a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon \right) + \left( a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \\ = - \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right) \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi u^\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (34)$$

№ (31) и (34) с  
 $\left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi W_k^\varepsilon \right) - \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right) \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi u^\varepsilon \right)$   
 Используя усло  
 слабые сходимость  
 $\left\{ a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j} \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$   
 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j} \right) \right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$   
 Переходя в (35)  
 $\left( p_i^\varepsilon, x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_k^\varepsilon \right) + \left( p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) + \left( p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial y_i} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon)$   
 С другой стороны  
 $(p_k, \varphi) = - \left( a_{ki} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}, \varphi \right)$   
 № (37) и (38) сл  
 $(p_k, \varphi) = - \left( a_{ki} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}, \varphi \right)$   
 т.е.  $p_k = q_{ki}(x, t)$   
 является решение  
 доказана.  
 З а м е ч а н и я  
 $u^\varepsilon \rightarrow u$  слабо в  $H$   
 $\Gamma \in C^2$  из (13) сле  
 $\dot{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{T}(0, T)$   
 1. Красносельский М.  
 гральные операторы  
 496 с.  
 2. Функциональный анализ  
 3. Лионс Ж.—Л., М.  
 М.: Мир, 1971.—3  
 4. Ладыженская О. А.  
 уравнения параболического  
 5. Bensoussan A., Lions  
 кубатурных формул  
 физики.—Новосибирск  
 6. Шефтель З. Г. Энегетические  
 уравнений с разрывными  
 с. 636—669.  
 Институт математики  
 АН УССР



Из (31) и (34) следует

$$\varepsilon \left( \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi W_k^\varepsilon \right) + \left( p_i^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_k^\varepsilon \right) + \varepsilon \left( p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right) - \left( a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon \right) - \left( \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi u^\varepsilon \right\} + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon). \quad (35)$$

Используя условие 2) теоремы и (30), ввиду леммы, получаем в  $L_2(Q_T)$  слабые сходимости

$$\left\{ a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j} \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right\} \rightarrow \left[ a_{ji}(x, t, \cdot) \frac{\partial W_k(x, t, \cdot)}{\partial y_j} \right], \quad (36)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j} \right) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \right\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ji}(x, t, \cdot) \frac{\partial W_k(x, t, \cdot)}{\partial y_j} \right].$$

Переходя в (35) к пределу по  $\varepsilon \rightarrow +0$ , с учетом а), б) и (36) имеем

$$\left( p_i, x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \left( \left[ a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right], \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right], \varphi u \right) + (\bar{a}_0 u, \varphi x_k) = (\bar{f}(u), \varphi x_k). \quad (37)$$

С другой стороны, умножим в  $L_2(Q_T)$  равенство (28) на  $\varphi x_k$ :

$$(p_k, \varphi) + \left( p_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_k \right) + (\bar{a}_0 u, \varphi x_k) = (\bar{f}(u), \varphi x_k). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует

$$(p_k, \varphi) = - \left( \left[ a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right], \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j} \right], \varphi u \right) = \left( q_{ki} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right)$$

$$\forall \varphi \in \dot{C}_T^1,$$

т. е.  $p_k = q_{ki}(x, t) \partial u / \partial x_i$ . Таким образом, предельная функция  $u(x, t) \forall t$  является решением гомогенизированной задачи (13), т. е.  $u = \hat{u}$ . Теорема доказана.

Замечание. Фактически установлено, что при условиях теоремы 2  $u^\varepsilon \rightarrow \hat{u}$  слабо в  $H^1(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{S}(0, T)$ . При дополнительном условии  $\Gamma \in C^2$  из (13) следует, что на самом деле  $\hat{u} \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; \dot{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{S}(0, T)$ .

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М.: Наука, 1966.— 496 с.
2. Функциональный анализ. СМБ.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
3. Лионс Ж.—Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
5. Bensoussan A., Lions J.-L. Homogenisation et perturbations singulieres.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск, 1976, № 1, с. 16—31.
6. Шефтель З. Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Сибирск. мат. журн., 1965, 6, № 3, с. 636—669.

Поступила в редакцию  
19.11.82

Институт математики  
АН УССР