НЕЧЕТКИЕ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТРАТ

Алексей Ф. Волошин, Василий А. Лавер

Abstract: *Рассматривается классическая задача распределения затрат, её интерпретация для случая распределения квот на выброс парниковых газов. Предлагаются нечеткие обобщения данной задачи, алгоритм её решения. Приводится иллюстративный пример.*

Keywords: *задача распределения затрат, задача распределения квот на выбросы парниковых газов, нечеткие модели и методы.*

ACM Classification Keywords: *I. Computing Methodologies – I.6. Simulation and modelling – I.6.5. Model Development –Modeling Methodologies.*

Введение

Классическая модель распределения затрат [Волошин, Мащенко, 2006] позволяет адекватно описать большое количество реальных процессов. Так, в [Волошин, Горицына, 2009] предлагается использовать её для распределения квот на выбросы парниковых газов (ПГ). Модель распределения затрат формулируется следующим образом:

Найти вектор $x=(x_1,...,x_n)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c \tag{1}$$

где $n, n \geq 2$, - количество агентов, $c, c \geq 0$,– общие затраты (общий лимит выброса ПГ), b_i – «потенциальный доход» *i*-го агента; x_i – доля затрат *i*-го агента (квота на выброс ПГ).

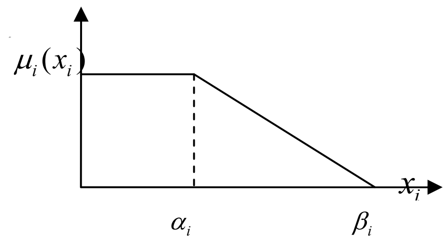
В связи с этим возникают две проблемы: 1. Как формировать «потенциальные доходы» каждого агента? 2. Какие механизмы распределения затрат использовать? При формировании «потенциального дохода» в [Волошин, Горицына, 2009] предлагается учитывать два эффекта влияния на загрязнение окружающей среды величину валового внутреннего продукта (ВВП) на душу населения и выбросы ПГ на 1 кв. км с учетом плотности населения; приводятся методики расчета величин b_i. Что касается механизмов распределения затрат, то предлагается априори задавать один из трех принципов распределения: выравнивание доходов, выравнивание затрат и пропорциональное распределение затрат. Основным недостатком «классической» модели является то, что в реальности исходные данные задаются неточно, нечетко, приближенно. Поэтому целесообразно рассмотреть нечеткие обобщения задачи распределения, в частности, задачи распределения квот на выбросы ПГ. В данной работе предлагаются три варианта нечетких обобщений рассматриваемой модели. Не уменьшая общности, рассмотрим принцип выравнивания затрат.

Задача распределения квот при нечетких долях агентов

Имеется n агентов, которые упорядочены по возрастанию «потенциальных доходов»: $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$. Рассматривается задача распределения затрат в интерпретации распределения квот на выбросы ПГ. Общий лимит выброса равен с тонн CO_2 - эквивалента (c>0). Квоты агентов x_i – нечеткие числа с функциями принадлежности $\mu_i(x_i), i=\overline{1,n}$.

Для всех i функция принадлежности агента i определяется по следующей формуле и имеет усеченно-трапецеидальный вид:

$$\mu_i(x_i)=\begin{cases}1, x_i\le\alpha_i;\\ \dfrac{\beta_i-x_i}{\beta_i-\alpha_i}, \alpha_i<x_i\le\beta_i;\\ 0, \beta_i<x_i,\end{cases}$$



α_i и β_i определяются в зависимости от величины b_i. Данный вид функций принадлежности можно интерпретировать следующим образом: пока агент i не превышает некоторый уровень выбросов α_i, к нему не применяется никаких санкций и он обладает правом продавать свои квоты; промежуток между α_i и β_i представляет значения выбросов, которые превышают квоту, но уровень превышения является приемлемым и задается значением $r_i=1-\mu_i(x_i)$. Если же значение выбросов ПГ превышает значение β_i, к агенту применяются санкции и штрафы.

Предположим, что агенты разделены на три группы в зависимости от уровня доходов - на «бедных» ($i=\overline{1,n_1}$), «середняков» ($i=\overline{n_1+1,n_2}$) и «богатых» ($i=\overline{n_2+1,n}$), где $1\le n_1\le n_2\le n$.

Тогда

$$\alpha_i=\begin{cases}\gamma_1 b_i, i=\overline{1,n_1}\\ \gamma_2 b_i, i=\overline{n_1+1,n_2}\\ \gamma_3 b_i, i=\overline{n_2+1,n}\end{cases},\qquad \beta_i=\begin{cases}\delta_1 b_i, i=\overline{1,n_1}\\ \delta_2 b_i, i=\overline{n_1+1,n_2}\\ \delta_3 b_i, i=\overline{n_2+1,n}\end{cases},$$

где $0\le\gamma_i\le 1(i=\overline{1,3})$, $\gamma_1\le\gamma_2\le\gamma_3$, $0\le\delta_j\le 1(j=\overline{1,3})$, $\delta_1\le\delta_2\le\delta_3$ - некоторые коэффициенты.

Возникает вопрос, каким образом распределить квоты на выброс ПГ, учитывая при этом нечеткий вид x_i. Решением задачи предлагается считать вектор ($x_1,x_2,\ldots,x_n$), который удовлетворяет следующим двум условиям: 1) $\sum_{i=1}^{n}x_i=c$; 2) $\min\{\mu_1(x_1),\mu_2(x_2),\ldots,\mu_n(x_n)\}\to\max$.

Введем «индикатор» выполнения баланса – функцию $\nu(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\nu=1,\sum_{i=1}^{n}x_i=c;\nu=0,\sum_{i=1}^{n}x_i\ne c..$$

Функция принадлежности искомого вектора ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) будет определяться как: $\mu_c(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\min\{\mu_1(x_1),\mu_2(x_2),\ldots,\mu_n(x_n),\nu(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$.

Решением задачи будем считать вектор, максимизирующий $\mu_c(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

То есть для нахождения $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ нужно решить следующую задачу оптимизации:

$\lambda\to\max$, $\mu_c(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ge\lambda$.

Учитывая вид $\mu_c(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, получаем:

$$\lambda\to\max,\sum_{i=1}^{n}x_i=c,\mu_i(x_i)\ge\lambda,i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Так как $\mu_1(x_1),\mu_2(x_2),...,\mu_n(x_n)$ линейны, задача (2) является задачей линейного программирования и может быть решена известными методами [Банди, 1988].

Рассмотрим числовой пример. Имеется два агента (*n*=2, для определенности - «Африка» и «Европа», см. [Волошин, Горицына, Мащенко, 2010], табл.3), между которыми необходимо распределить квоты на выброс ПГ величиной *c*=7. Функции принадлежности квот агентов задаются следующим образом (учитывая, что удельный вес выбросов «Европы» приблизительно в четыре раза выше аналогичного показателя для «Африки»):

$$\mu_1(x_1)=\begin{cases}1, x_1\le 1;\\ \dfrac{4-x_1}{3}, 1<x_1\le 4;\\ 0, x_1>4.\end{cases}\qquad \mu_2(x_2)=\begin{cases}1, x_2\le 4;\\ \dfrac{7-x_2}{3}, 4<x_2\le 7;\\ 0, x_2>7.\end{cases}$$

$$\nu(x_1,x_2)=\begin{cases}1, x_1+x_2=7;\\ 0, x_1+x_2\ne 7.\end{cases}$$

Задача (2) примет следующий вид: $\lambda\to\max, x_1+x_2=7, \mu_1(x_1)\ge\lambda, \mu_2(x_2)\ge\lambda.$

Рассмотрим возможные варианты изменений x_1 и x_2.

При $x_1\le 1, x_2\le 4$ не выполняется равенство $x_1+x_2=7$; при $x_1\le 1, 4\le x_2\le 7$ и $1<x_1\le 4, x_2\le 4$ получим соответственно $x_1=1, x_2=6$ и $x_1=3, x_2=4$ при уровне $\lambda=\frac{1}{3}$.

Оставшийся вариант, $1\le x_1\le 4, 4\le x_2\le 7$ порождает следующую задачу:

$$\lambda\to\max, x_1+x_2=7; 1\le x_1\le 4;\ 4\le x_2\le 7; \frac{4-x_1}{3}\ge\lambda; \frac{7-x_2}{3}\ge\lambda. \qquad (3)$$

Решением (3) будет тройка $x_1=2, x_2=5, \lambda=\frac{2}{3}$. Так как λ в этом случае достигает максимального значения, то это будет и решением всей задачи.

Алгоритм решения задачи распределения затрат при нечетких долях агентов

Пользователь задает количество игроков – *n*, их доходы ($b_1,b_2,...,b_n$.), общий лимит выброса ***c***, а также необходимые коэффициенты для всех трех групп доходности.

На основе полученных данных вычисляются функции принадлежности квот агентов.

Для каждой $\mu_i(x_i), i=\overline{1,n}$, возможны два существенных варианта: когда $x_i\in[0,\alpha_i]$ или же когда $x_i\in[\alpha_i,\beta_i]$. Далее мы должны перебрать все возможные комбинации.

Для этого введем *n* – мерный булевый массив М. Изменяя значения массива с (0,0,…,0) до (1,1,…,1), на каждом шаге будем решать следующую задачу:

$$\lambda\to\max,$$

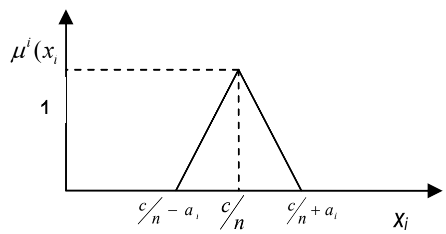
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=c, \mu_i(x_i)\ge\lambda, x_i\in[d_i,e_i], \forall i=\overline{1,n}, \text{где } d_i=\begin{cases}0, M_i=1\\ \alpha_i, M_i=0\end{cases}, e_i=\begin{cases}\alpha_i, M_i=1\\ \beta_i, M_i=0\end{cases}..$$

За решение первоначальной задачи принимаем то из полученных решений, для которого *λ* будет максимальным.

Задача распределения квот при нечетких долях агентов и заданном принципе распределения

Рассматривается принцип выравнивания квот. Каждому агенту соответствует доля в c/n тонн CO_2 эквивалента. Пусть a_i $(i=\overline{1,n})$ – величина, на которую i-й агент имеет право отклониться от установленного распределения. Эта величина задается извне, она может зависеть от «достатка» агента. Тогда для i-го агента получаем следующий вид функции принадлежности допустимых отклонений от заданного распределения:

$$\mu^i(x_i)=\begin{cases} x_i/a_i-\dfrac{c/n-a_i}{a_i}, x_i\in\left[c/n-a_i, c/n\right]; \\ 1-\dfrac{x_i-c/n}{a_i}, x_i\in(c/n, c/n+a_i]; \\ 0, \textit{в других случаях.} \end{cases}$$



Формируется следующая функцию принадлежности распределения x нечеткой цели:

$$\mu_G(x_1,x_2,...,x_n)=\min\left\{\mu^1(x_1),\mu^2(x_2),...,\mu^n(x_n)\right\}.$$

Эта функция является функцией принадлежности декартового произведения нечетких множеств допустимых отклонений от заданного распределения.

Функция принадлежности решения в этом случае будет иметь вид

$$\mu_D(x_1,x_2,...,x_n)=\min\{\mu_C(x_1,x_2,...,x_n),\mu_G(x_1,x_2,...,x_n)\}.$$

Решениями задачи будем считать альтернативы, максимизирующие $\mu_D(x_1,x_2,...,x_n)$. Алгоритм поиска решений аналогичен предыдущему, с той разницей, что необходимо учитывать изменения $\mu^i(x_i)$.

Задача распределения квот при нечетких долях агентов, заданном принципе распределения и нечетком балансе выбросов

Предположим, что равенство $\sum_{i=1}^{n}x_i=c$ выполняется нечетко: $\sum_{i=1}^{n}x_i\cong c$. Степень выполнения этого равенства определяется следующей функцией принадлежности

$$\nu(x_1,x_2,...,x_n):\quad \nu=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-(c-\underline{c})}{\underline{c}},\ c-\underline{c}\le\sum_{i=1}^{n}x_i\le c;\quad \nu=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-(c-\bar{c})}{\bar{c}},\ c<\sum_{i=1}^{n}x_i\le c+\bar{c},$$

$\nu=0$ иначе.

Тут $\underline{c},\bar{c}$ - значения допустимых отклонений $\sum_{i=1}^{n}x_i$ от c.

Функция принадлежности распределения x ограничениям будет иметь вид: $\mu_c(x_1,x_2,...,x_n)=\min\{\mu_1(x_1),\mu_2(x_2),...,\mu_n(x_n),\nu(x_1,x_2,...,x_n)\}$.

Функция принадлежности x цели - $\mu_G(x_1,x_2,...,x_n)=\min\left\{\mu^1(x_1),\mu^2(x_2),...,\mu^n(x_n)\right\}$.

Функция принадлежности x решению - $\mu_D(x_1,x_2,...,x_n)=\min\{\mu_C(x_1,x_2,...,x_n),\mu_G(x_1,x_2,...,x_n)\}$.

Решение задачи находится аналогично предыдущим случаям.

Выводы

Рассмотренные нечеткие модели распределения затрат дают возможность более адекватно описывать реальные процессы, в частности, распределения квот на выброс парниковых газов. В будущем планируется усовершенствовать алгоритмы решения рассматриваемых задач на случай большой размерности, избежав использование процедур полного перебора при рассмотрении интервалов изменений x_i; рассмотреть другие обобщения модели распределения затрат (в частности, распределение затрат при заданных функциях полезности агентов).

Благодарности

Статья частично финансирована из проекта ITHEA XXI Института Информационных теорий и Приложений FOI ITHEA и Консорциума FOI Bulgaria (www.itea.org, www.foibg.com).

Библиография

[Волошин, Мащенко, 2006] Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень - К.: ВТЦ "Київський університет", 2006.-304с.

[Волошин, Горицына, 2009] Волошин А., Горицына И. Механизмы распределения квот на выбросы по Киотскому протоколу; In: International Book Series “Information Science and Computing”, 2009. – V. 3/2009, N10. – P. 175-181

[Банди, 1988] Банди Б. Методы оптимизации.. – М.:. Радио и связь, 1988. -128с.

[Волошин, Горицына, Мащенко, 2009] Волошин А., Горицына И., Мащенко С. Методологические принципы распределения квот на выбросы парниковых газов; In: “Natural and Artificial Intelligence”, ITHEA, Sofia, 2010. - P. 85-93.

Сведения об авторах

***Волошин Алексей** – доктор технических наук, профессор, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, 01017 Киев, ул. Владимирская, 64; e-mail: ovoloshin@unicyb.kiev.ua*

***Сфера научных интересов:** принятие решений, системы поддержки принятия решений, математическая экономика, экспертные системы, е-образование*

***Лавер Василий** – Аспирант, Ужгородский национальный университет, математический факультет, Украина, 88000, Ужгород, ул. Университетская, 14, e-mail: v.laver@gmail.com*

***Сфера научных интересов:** принятие решений, системы поддержки принятия решений, математическая экономика, нечеткие модели и методы*