$$C_n(t^*) = \int_{-\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n,\xi\} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi = \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(\xi+\tau)} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi + \int_{0}^{\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[1+D_n\frac{\xi}{1!}\right]F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi + \dots$$
$$\dots + \int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n{}^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\dots+D_n{}^{k-1}\frac{(\xi-(k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right]F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi \quad .$$

Подставив значения L_n и D_n, и используя теорему о среднем, можем показать, что существуют моменты времени $-\tau \le s_1 \le 0$, $0 \le s_2 \le \tau$, $(k-2)\tau \le s_k \le t^*-\tau$, такие, что

$$C_n(t^*) \le \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_1)} F_n(t^*-\tau-s_1) + \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_2)} \left[1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_2}{1!}\right] F_n(t^*-\tau-s_2) + \dots$$
$$\dots + \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_k)} \left[1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right] e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_k}{1!}+\dots\right.$$
$$\left.\dots + \tau\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\tau\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]} \frac{\left[s_k-(k-2)\tau\right]^{k-1}}{(k-1)!}\right] F_n(t^*-\tau-s_k) \ .$$

И при достаточно большом n, справедливо неравенство

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому найдется непрерывная, ограниченная при $-\tau \le s \le t^*$ функция $N_3(t^*,s)$, при которой справедливо неравенство

$$\left|C_n(t^*)\right| \le \tau \max_{-\tau\le s\le t^*}\left|F_n(s)\right| N_3(t^*,s)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2(k-1)} e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right](t^*+\tau)} .$$

Пусть функции $F_n(s)$ "не очень сильно растут" на промежутке $-\tau \le s \le t^*$, т.е. выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k-1+\alpha}\left|F_n(s)\right| e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\left(t^*+\tau\right)} = 0 .$$

Тогда ряд $S_3(x,t)$ также сходиться абсолютно и равномерно.

Таким образом показано, что для абсолютной и равномерной сходимости рядов $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$ требуется лишь "не очень сильный рост" по индексу n коэффициентов Фурье $F_n(t)$, $-\tau \le s \le t^*$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi_n'(t)$, $-\tau \le t \le 0$. Сходимость производных функции $u(x,t)$ следует из свойств дифференцируемости запаздывающего экспоненциала.

1.Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с. 2. Жуков А.Б. Пространственная и временная изменчивость процесса прироста леса. //Доклады АН СССР, Т.239, №1, 1978. – С.245–248. 3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М.: Наука, 1971. – 296 с. 4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., Мир, 1984. – 421 с. 5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1991. – 277 с. 6. Ткач Б.П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных из запаздывающим аргументом. //Дифференциальные уравнения. Т.III. – 1967 – № 10 – С.1796–1801. 7. Хусаінов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 2004. – С.362–368. 8. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Про зображення розв'язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2006. – С.51–59. 9. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Розв'язок рівняння коливання із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2006. – С.243–248. 10. Коварж І.В., Іванов А.Ф., Хусаінов Д.Я. Постановка крайових задач і задач Коші для рівнянь параболічного типу з чистим запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2007. – С.37–41.

Надійшла до редколегії 15.10.12

УДК 519.816

О. Ф. Волошин, д-р техн. наук, проф.,
В. О. Лавер, студент

НЕЧІТКІ МЕТОДИ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ

У роботі наведено деякі алгоритми для розподілу витрат при нечітких умовах .Запропоновано нечіткі узагальнення подушного та рівневого податків на випадок нечіткого виконання обмежень на частки витрат агентів та на випадок нечіткого задання величини витрат. Запропоновано нечітке узагальнення N-ядра. Наведені алгоритми проілюстровано числовими прикладами, дано аксіоматичну характеризацію.

The paper presents some algorithms of cost sharing under fuzzy conditions. Fuzzy generalizations of uniform gains, uniform losses and Talmudic rationing methods are proposed. These algorithms are illustrated by numerical examples. Also, the axiomatic characterization of generalized methods is given.

Вступ. Справедливий розподіл спільних витрат (або спільного прибутку) серед агентів є центральною темою теорії кооперативних ігор із трансферабельною корисністю. Зокрема, простіша проблема розподілу одного виду благ за певним профілем заявок (що відображає індивідуальні потреби чи вимоги) теж була популярною для аксіоматичного аналізу. Ця модель розподілу в літературі часто називається проблемою банкрутства [1].

Постановка задачі. Проблемою розподілу називається трійка (N,c,b), де N – скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів, яку необхідно розподілити, вектор $b=(b_i)_{i\in N}$ визначає для кожного агента i його заявку , причому ці числа такі, що

$$0\le b_i,\ \forall i\in N: 0\le c\le \sum_{i\in N} b_i. \quad (1)$$

Розв'язком проблеми розподілу є вектор $x=\left(x_i\right)_{i\in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i, причому

$$0\le x_i\le b_i,\ \forall i\in N: \sum_{i\in N} x_i = c. \quad (2)$$

Можливо декілька інтерпретацій проблеми розподілу. В даній статті, без зменшення загальності, розглядається задача розподілу витрат на виробництво неподільного суспільного продукту a вартістю c, величини b_i для кожного i інтерпретуються як запас грошей i-го агента (або, альтернативно, як очікувана вигода від користування суспільним продуктом).

Подушний та рівневий податки. Розглянемо два принципи розподілу витрат:

Вирівнювання витрат ($x_i=\dfrac{c}{n},\ \forall i\in N$);

Вирівнювання прибутків ($x_i=b_i-\left(\sum_{i\in N} b_i - c\right)/n,\ \forall i\in N$).

Якщо порушується умова (2), то при вирівнюванні прибутків може виникнути ситуація, коли деякий агент повинен буде заплатити більше свого запасу грошей. Тоді він може відмовитись від кооперації. При вирівнюванні прибутків можливий випадок, що деякий агент буде субсидуватися іншими. В цьому випадку всі інші агенти можуть відмовитись його субсидувати, і вийдуть з коаліції.

У випадку чіткого виконання умов (2), принцип вирівнювання витрат узагальнюється на подушний податок, а принцип вирівнювання прибутків – на рівневий [2].

При подушному податку може виникнути ситуація, при якій агент повинен буде віддати весь свій запас грошей. В цьому разі він також може не погодитись на кооперацію. Але якщо він згоден віддати деяку частину грошей, а інші агенти згодні покрити нестачу, максимальна коаліція не розпадеться.

Чіткі узагальнення подушного та рівневого податків. Нехай потрібно розподілити витрати величиною c, серед множини агентів $N=\overline{1,n}$.

Розглянемо подушний податок. Припустимо, що існують агенти, які за подушним податком повинні заплатити весь свій запас грошей. Позначимо множину цих агентів через N_1 .

Встановимо два порогові значення: α_i – кількість відсотків грошей агента i ($i\in N_1$), в якого подушний податок (ПП) забирає всю суму, яку він може віддати; β_j – на скільки відсотків агент j ($j\in N_2=N\setminus N_1$), в якого після розподілу за ПП ще залишаються гроші, згідний заплатити більше за ПП. В загальному випадку ці величини визначаються із урахуванням грошових запасів агентів ("прогресивне оподаткування").

Нехай $\hat{x}_i=b_i$ – величина ПП агента i ($i\in N_1$); $\underline{x_i}=b_i\left(1-\alpha_i\right)$ – максимальна кількість грошей, яку i-й агент згоден віддати "без заперечень". Кінцевий розподіл витрат для i-го агента буде належати проміжку $[\hat{x}_i,\underline{x_i}]$.

Позначимо $\Delta_i=\hat{x}_i-\underline{x_i}$ "дефіцит", що виникає при поступках агенту i. Сумарний дефіцит позначимо $\Delta=\sum_{i\in N_1}\Delta_i$. Даний дефіцит покривається за рахунок агентів, для яких величина подушного податку є меншою від їх запасу грошей.

Розглянемо множину агентів N_2 . Позначимо $\hat{x}_j$ – величину подушного податку для агента j ($j\in N_2$), $\overline{x_j}=\hat{x}_j\left(1+\beta_j\right)$ – максимальну кількість грошей, яку агент згоден віддати. Повинна виконуватись нерівність $\sum_{j\in N_2}\left(\overline{x_j}-\hat{x}_j\right)\ge\Delta$. В разі невиконання даної нерівності потрібно змінити величини α_i,β_j так, щоб дана нерівність виконувалась.

Аналогічно для рівневого податку позначимо через множину агентів, для яких частка витрат за рівневим податком (РП) рівна нулю. Можливо, для інших агентів з певних міркувань є прийнятним субсидування цих агентів (наприклад з метою збереження максимальної коаліції). Тоді α_i – кількість відсотків грошей агента i ($i\in N_1$), на яку даний агент субсидується; β_j – на скільки відсотків агент j ($j\in N_2=N\setminus N_1$), в якого після розподілу за РП ще залишаються гроші, згідний витратити на субсидування "бідних" агентів.

Нехай $\hat{x}_i$ – величина субсидії i ($i\in N_1$), $\hat{x}_i=\alpha_i b_i$. Тоді $\Delta=\sum_{i\in N_1}\hat{x}_i$ – сумарна величина субсидій, що покривається агентами з $N_2=N\setminus N_1$. Позначимо $\hat{x}_j=b_j$ – величину рівневого податку для агента j ($j\in N_2$), $\overline{x_j}=b_j\left(1+\beta_j\right)$ – максимальну кількість грошей, яку агент згоден віддати. Повинна виконуватись нерівність $\sum_{j\in N_2}\overline{x_j}\ge\Delta+c$. В разі невиконання даної нерівності потрібно змінити величини α_i,β_j так, щоб дана нерівність виконувалась.

Для подушного податку пропонується розподіляти витрати в такому порядку:

Для агентів $i\ (i \in N_1)$ встановлюємо їхню частку витрат як $x_i = \underline{x_i}$.

Для агентів $j\ (j \in N_2)$ встановлюємо $x_j = \hat{x}_j + x_j^{\Delta}$, де x_j^{Δ} визначається як частка витрат при розподілі дефіциту Д, причому вона може обчислюватись як за правилом знаходження подушного податку, так і за правилом знаходження рівневого податку.

Якщо в результаті отримуємо допустимий розподіл, процес зупиняється. Якщо ні – коректуємо величини поступок.

Аналогічно для рівневого податку:

Для агентів $i\ (i \in N_1)$ встановлюємо їхню частку витрат як $x_i = -\hat{x}_i$.

Для агентів $j\ (j \in N_2)$ встановлюємо $x_j = \hat{x}_j + x_j^{\Delta}$, де x_j^{Δ} визначається як частка витрат при розподілі дефіциту Д, причому вона може обчислюватись як за правилом знаходження подушного податку, так і за правилом знаходження рівневого податку.

Якщо в результаті отримуємо допустимий розподіл, процес зупиняється. Якщо ні – коректуємо величини поступок.

Отже, можливі чотири варіанти розподілу: ПП+ПП(перший і другий етапи обчислюються за ПП), ПП+РП(на першому етапі обчислюємо ПП, дефіцити ділимо за РП); та РП+ПП, РП+РП. Вибір конкретного механізму розподілу залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР).

Нечіткі узагальнення подушного та рівневого податків. Можливий і інший варіант розподілу – із застосуванням апарату нечітких множин [2, 3].

Припустимо, що розглядається розподіл витрат згідно подушного податку. Нехай частка витрат агента $i\left(i \in N_1\right)$ є нечітким числом, функція належності якого, використовуючи попередні позначення, має вигляд:

$$\mu_i\left(x_i\right) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x_i \le \underline{x}_i; \\ \dfrac{x_i - \hat{x}_i}{\underline{x}_i - \hat{x}_i},\ \underline{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i; \\ 0,\ \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Тобто $\mu_i\left(x_i\right)$ є правосторонніми нечіткими числами трапецеїдального вигляду. Позначимо $x_i = \left(\underline{x}_i, \hat{x}_i\right)$.

Аналогічно, для агентів $j\ (j \in N_2)$ маємо $x_i = \left(\hat{x}_i, \overline{x}_i\right)$. Тобто

$$\mu_j\left(x_j\right) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x_j \le \hat{x}_j; \\ \dfrac{x_j - \overline{x}_j}{\hat{x}_j - \overline{x}_j},\ \hat{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j; \\ 0,\ \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Тоді для знаходження вектору розподілу витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ потрібно розв'язати таку задачу лінійного (зважаючи на вигляд функцій належності) програмування:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_k\left(x_k\right) \ge \lambda,\ \forall k \in N, \\ &\sum_{i \in N} x_i = c, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо вектор витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і степінь задоволеності агентів цим розподілом – λ. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, потрібно встановити інші значення для величин поступок α_i, β_j.

Для рівневого податку спершу потрібно встановити величини субсидій. Потім розподілити між агентами, що залишились величину $\Delta + c$ (звісно, повинно виконуватись обмеження $\sum\limits_{j \in N_2} \overline{x_j} \ge \Delta + c$).

Отримуємо задачу:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_j\left(x_j\right) \ge \lambda,\ \forall j \in N_2, \\ &\sum_{j \in N_2} x_i = c + \Delta, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_j \ge 0, j \in N_2. \end{aligned}$$

В результаті також отримаємо вектор витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і степінь задоволеності агентів – λ. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, потрібно встановити інші значення для величин поступок і розв'язати задачу розподілу для нових даних.

Випадок нечіткої величини витрат. Нехай величина витрат $c = \left(\underline{c}, \hat{c}, \overline{c}\right)$ є нечітким числом трикутного вигляду. В цьому випадку потрібно розглянути дві задачі – задачу оптиміста ($c \in \left[\underline{c}, \hat{c}\right]$) і задачу песиміста ($c \in \left[\hat{c}, \overline{c}\right]$).

Перша задача (для ПП) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
&\lambda \to \max,\\
&\mu_k\left(x_k\right) \ge \lambda,\ \forall k \in N,\\
&\mu_c(c) \ge \lambda,\\
&\sum_{i\in N} x_i = c,\\
&0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in \left[\underline{c}, \hat{c}\right].
\end{aligned}$$

$\mu_c(c)$ – функція належності спільних витрат, а функції належності витрат агентів знаходяться із розрахунку, що ПП обчислюється для $\hat{c}$.

Для задачі песиміста потрібно перерахувати ПП для випадку $\overline{c}$. Сама ж задача матиме аналогічний вигляд:

$$\begin{aligned}
&\lambda \to \max,\\
&\overline{\mu}_k\left(x_k\right) \ge \lambda,\ \forall k \in N,\\
&\mu_c(c) \ge \lambda,\\
&\sum_{i\in N} x_i = c,\\
&0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in \left[\hat{c}, \overline{c}\right].
\end{aligned}$$

$\overline{\mu}_k\left(x_k\right)$ – нові функції належності агентів.

Розв'язавши обидві задачі, за кінцевий розподіл вибираємо той, для якого λ є більшим. Якщо ж λ є однаковим у обох випадках, вибір розподілу залишається на розсуд ОПР.

Числовий приклад. Розглядається n=5 агентів, величина витрат, яку потрібно розподілити, c=30. Запаси грошей агентів відповідно рівні 4, 12, 20, 24, 30 [2]. Нехай б=25%, в=20%.

Для випадку чітких узагальнень подушного та рівневого податків отримаємо такі дані:

Номер агента	1	2	3	4	5	*c*
Запас грошей	4	12	20	24	30	
ПП	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30
ПП+ПП	3	6.75	6.75	6.75	6.75	30
ПП+РП	3	6.5	6.5	6.5	7.5	30
РП	0	0	16/3	28/3	46/3	30
РП+ПП	-1	-3	20/3	32/3	50/3	30
РП+РП	-1	-3	16/3	28/3	58/3	30

Для нечітких узагальнень (зокрема і для нечіткого c=(29,30,31)), будемо мати:

Номер агента	1	2	3	4	5	*C*	*л*
Запас грошей	4	12	20	24	30		
ПП	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30	-
Нечіткий ПП	98/31	208/31	208/31	208/31	208/31	30	26/31
НПП+Нечітка *c*	113/36	481/72	481/72	481/72	481/72	1075/36	31/36
РП	0	0	16/3	28/3	46/3	30	
Нечіткий РП	-1	-3	272/45	476/45	782/45	30	1/3
НРП+Нечітке *c*	-1	-3	578/93	986/93	1598/93	30	16/31

Як для випадку вирівнювання витрат, так і для випадку вирівнювання прибутків, вищі значення λ досягаються, якщо величина, яку потрібно розподілити є нечіткою. Це інтуїтивно пояснюється тим, що чим більша нечіткість, тим більше у агентів є можливості варіювати свої частки розподілу, і тим більшою є ймовірність знайти розподіл, який би максимально всіх влаштовував.

Аксіоматична характеризація. Нехай r – деякий метод розподілу, тобто $r(N,c,b)$ є деякою функцією, котра залежить від множини агентів, сукупних витрат і вектора початкових запасів грошей агентів. При цьому для кожного набору параметрів (N,c,b) метод розподілу r визначає вектор витрат $x = r(N,c,b)$.

Наведемо деякі базові аксіоми, характерні для методів розподілу [1].

Монотонність за ресурсами: $\{c \le c'\} \Rightarrow \{r(N,c,b) \le r(N,c',b)\}, \forall N,c,c',b.$

Дана властивість гарантує, що при зростанні сукупних витрат, частка витрат кожного агента не зменшиться.

Наступні дві властивості забезпечують відсутність дискримінації між агентами.

Рівне ставлення до рівних: $b_i = b_j \Rightarrow x_i = x_j, \forall N,b,c; \forall i,j \in N,$ (при однаковому запасі грошей, частки витрат агентів також збігаються).

Симетричність: $x = r(N,c,b)$ є симетричною функцією відносно змінних $b_i, \forall i \in N$.

Зазначимо, що з властивості симетричності випливає рівне ставлення до рівних.

Наведені вище методи, як подушний і рівневий податок, так і їх розширення (як чіткі, так і нечіткі) задовольняють наведеним трьом аксіомам, так як вони є загальними для багатьох методів розподілу.

Приведемо деякі аксіоми, характерні суто для подушного та рівневого податків.

Нехай $|N| = n$ потужність множини агентів N. Одними з основних аксіом, що характеризують подушний та рівневий податки є аксіоми Верхньої та Нижньої межі.

Нижня межа: $\forall N,c,b,i : x_i = r_i(N,c,b) \geq \min\left\{b_i, \frac{c}{n}\right\}$.

Верхня межа: $\forall N,c,b,i : x_i = r_i(N,c,b) \leq \left\{\frac{c}{n} + \left(b_i - \frac{b_N}{n}\right)\right\}_+$.

Легко бачити, що подушний податок задовольняє Нижню Межу, а рівневий – Верхню. Нижня Межа гарантує, що агент не віддасть більше грошей, ніж в нього є в наявності. Двоїсто, верхня межа гарантує, що прибуток *i*-го агента не більше середнього прибутку всіх агентів. У випадку, якщо прибуток *i*-го агента виходить менше середнього, він не платить рівневий податок.

При малих *c*, властивість нижньої межі гарантує рівномірний розподіл витрат: $x_i = \frac{c}{n}, \forall i$. Аналогічно, якщо *c* достатньо близьки до b_N, верхня межа гарантує вирівнювання прибутків ($b_i - x_i = b_j - x_j, \forall i,j$).

При $|N| = 2$, Нижня Межа характеризує подушний податок, і (двоїсто) Верхня Межа характеризує рівневий податок. Але це не поширюється на випадок $|N| \geq 3$.

Розглянемо наступну властивість.

Узгодженість з нулем (Zero-Consistency): $\forall N,c,b,i : \{b_i = 0\} \Rightarrow \left\{r(N,c,b)_{[N\setminus i]} = r(N \setminus i, c, b_{[N\setminus i]})\right\}$.

Дана властивість означає, що агент, котрий не має грошей (і відповідно нічого не платить), жодним чином не впливає на розподіл витрат серед інших агентів.

Наступні дві аксіоми відносяться до структурної інваріантності. Ці аксіоми дозволяють декомпозицію обчислення часток агентів, якщо наявні ресурси можна оцінити зверху або знизу.

Верхня композиція: $\forall N,b,c,c' : \{0 \leq c \leq c' \leq b_N\} \Rightarrow \{r(N,c,b) = r(N,c,r(N,c',b))\}$.

Нижня композиція: $\forall N,b,c,c' : \{0 \leq c' \leq c \leq b_N\} \Rightarrow \{r(N,c,b) = r(N,c',b) + r(N,c-c',b-r(N,c',b))\}$.

Якщо ми спершу розподілимо витрати c', а потім виявиться, що наявні витрати насправді менші, і рівні *c*, Верхня Композиція дозволяє нам взяти за початкові запаси грошей $r(N,c',b)$, і з врахуванням їх, розподіляти далі витрати *c*. Тобто ми можемо, не враховувати початкові запаси грошей *b*, якщо ми знаємо верхню межу наявних витрат. Зазначимо, що з властивості Верхньої Композиції випливає Монотонність за ресурсами. Якщо ми знаємо нижню межу c' наявних ресурсів *c*, Нижня Композиція дозволяє розподілити витрати $r(N,c',b)$, відняти їх від початкових запасів грошей і розподілити залишок $c - c'$ згідно із зменшених запасів $b - r(N,c',b)$.

Твердження 1 [1]: Подушний податок характеризується такими трьома аксіомами: Нижня Межа, Нижня Композиція і Узгодженість з нулем. Рівневий податок характеризується такими трьома аксіомами: Верхня Межа, Верхня Композиція, Узгодженість з нулем.

Очевидно, що наведені вище узагальнення подушного та рівневого податків (як чіткі, так і нечіткі) порушують дану характеризацію. Зокрема для узагальнень подушного податку не виконуватиметься аксіома Нижньої Межі (так як частка витрат агента може бути менше тої частки, що визначається йому подушним податком), аналогічно для узагальнень рівневого податку не буде виконуватись аксіома Верхньої Межі.

Що стосується третьої аксіоми, Узгодженості з нулем, то вона буде виконуватись як для узагальнень подушного, так і для узагальнень рівневого податків. Припустимо, що для деякого агента $b_i = 0$. Подушний та рівневий податок для цього агента рівні нулю. Функція належності для нечіткого узагальнення подушного податку залежить від добутку подушного податку (чіткого) на величину поступки, тому (при ПП=0) частка витрат *i*-го агента теж буде рівною нулю. Для рівневого податку величина субсидії рівна початковому запасу грошей, множеному на величину поступки. Тому при $b_i = 0$, частка витрат *i*-го агента буде рівна нулю.

***N*-ядро.** Розглянемо нечіткі узагальнення *N*-ядра, які базуються на тому самому принципі, що і нечіткі узагальнення подушного і рівневого податків.

В чітких умовах *N*-ядро може бути знайдено за алгоритмом, запропонованим у такій теоремі.

Теорема [1]: *N*-ядро відповідає таким часткам витрат:

$$c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = c \Rightarrow x_i = \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

$$c \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

Тобто, існують два крайні випадки – коли частки витрат (або прибутки) агентів розраховуються як подушний (при $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$) або ж рівневий (при $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$ податок від вектору початкових запасів $\frac{1}{2}b = \left(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \ldots, \frac{1}{2}b_n\right)$.

Між цими крайніми випадками можливі і інші, "компромісні" розподіли.

Розглянемо дві групи агентів – N_1 і N_2. Припустимо, що в першій групі знаходяться агенти, які хотіли би заплатити менше того, що їм приписує *N*-ядро, а в другій групі – агенти, згодні покрити цей "дефіцит".

Розглянемо агентів першої групи. Позначимо $\underline{x_i}$ бажану частку витрат агента *i*, а $\hat{x}_i$ – його частку витрат при *N*-ядрі. Частки витрат агентів із цієї групи будуть правосторонніми нечіткими числами $(\underline{x_i}, \hat{x}_i)$.

Для другої групи позначимо через $\hat{x}_i$ відповідну величину *N*-ядра, а $\overline{x}_i$ – максимальну величину, яку агент згоден заплатити. Тоді частку затрат окремого агента можна задати правостороннім нечітким числом $(\hat{x}_i, \overline{x}_i)$.

Таким чином, розподіл витрат зводиться до задачі лінійного програмування, що є аналогічно вже розглянутим:

$$\lambda \to \max,$$
$$\mu_k(x_k) \ge \lambda,\ \forall k \in N_1, \mu_j(x_j) \ge \lambda,\ \forall j \in N_2,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = c,$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_i \ge 0, i \in N.$$

Задачу пошуку оптимального розв'язку пропонується вирішувати в декілька етапів. На першому етапі розв'язуємо задачу при початкових даних, отримавши розподіл і відповідний рівень λ. Якщо він не задовольняє ОПР, то ми звужуємо область визначення нечітких чисел, які відповідають часткам витрат агентів. Продовжуємо процес до тих пір, поки не буде досягнуто оптимальний рівень.

Відмітимо, що при $\lambda = 1$ частки витрат агентів будуть рівні часткам, які відводяться їм *N*-ядром.

Розглянемо приклад.

Є три агента, запаси грошей яких рівні відповідно 100, 200, 300. Необхідно розподілити витрати величиною 100 одиниць.

N-ядро приписує кожному агенту частку витрат, рівну $33\frac{1}{3}$. Розглянемо і крайні випадки (подушний і рівневий податки при половинному запасі грошей агентів):

Запаси грошей	100	200	300
ПП($\frac{1}{2}$)	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
РП($\frac{1}{2}$)	0	25	75
N-ядро	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$

Оскільки $c \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$, то N-ядро співпадає з ПП($\frac{1}{2}$).

Для першого і другого агента величина РП($\frac{1}{2}$) є меншою, ніж величина *N*-ядра. Тому для них є більш бажаним ситуація, при якій вони будуть платити РП($\frac{1}{2}$). Віднесемо їх в множину N_1. В множині N_2 буде тільки один агент – номер три. Для нього РП($\frac{1}{2}$) вище величини *N*-ядра. Припустимо, що це і є максимальна сума, яку він згоден заплатити.

Частки витрат агентів будуть нечіткими правосторонніми числами (0, $33\frac{1}{3}$), (25, $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$, 75).

Підставивши дані у вищезгадану задачу лінійного програмування, отримаємо розподіл витрат (14,79; 26,93; 58,28) при рівні л=0,528.

Припустимо, що цей розподіл не задовольняє ОПР. Зробимо наступну ітерацію, при нечітких частках витрат агентів, рівних (14,79; $33\frac{1}{3}$), (26,93; $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$; 58,28). Отримаємо розподіл витрат (24,06; 30,14; 45,8) при рівні л=0,5. Продовжуємо, поки результат не задовольнить ОПР.

Висновки. В роботі наведено алгоритми пошуку оптимальних розподілів, що враховують нечіткість середовища. Наведено результати застосування алгоритмів та порівняно їх із стандартним розподілом за подушним та рівневим податком. Кінцевий вибір алгоритму розподілу здійснюється особою, що приймає рішення. Обраний принцип повинен враховувати той чи інший базовий принцип розподілу (вирівнювання витрат чи прибутків). Наведені узагальнення враховують базові аксіоми для багатьох методів розподілу – монотонність, симетричність, рівне ставлення до рівних. В той же час порушуються базові для характеризації подушного і рівневого податків аксіоми Нижньої та Верхньої межі. Також в роботі наведено нечітке узагальнення *N*-ядра, яке випливає із відповідних узагальнень для подушного та рівневого податків.

1. Moulin, Herve. "Axiomatic Cost and Surplis-Sharing," Working Papers 2001–06, Rice University, Department of Economics, 2001. 2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с. 3. Згуровський М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях. – К.: Наукова думка, 2011. – 275 с.

Надійшла до редколегії 11.06.12

УДК 517.929

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, проф.

METOD OF OPTIMIZATION THE LINEAR SYSTEM STOCHOSTIC DIFFERENTIOL EQUATIONS

В роботі досліджується лінійне стохастичне диференціальне рівняння з марківськими збуреннями. За допомогою рівняння Белмана розв'язується задача оптимального керування з квадратичним критерієм якості.

We consider the linear stochastic differential equation with Markovian perturbations. Using Bellman equation solves the problem of optimal control with a quadratic quality criterion.

STATEMENT OF PROBLEM. We consider the system of linear differential equations with variable coefficients:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\xi(t))X(t) + B(t,\xi(t))U(t), \tag{1}$$

where $\xi(t)$ — random Marcovian process taking finite number of variety $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_q$ with probability

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \Theta_k\} \ (k = 1, \ldots, q),$$

wich satisfied the following system of differential equantions [1]

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{S=1}^{q} \alpha_{ks}(t) p_s(t) \ (k = 1, \ldots, q), \ \ \alpha_{ks}(t) \geq 0 \ \ (k \neq s), \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ks}(t) = 0 \ (k, s = 1, \ldots, q). \tag{2}$$

For describe the densities of discrete continuous random process we use the function

$$f(t, X, \xi) = \sum_{k=1}^{q} f_k(t, X)\delta(\xi - \Theta_k),$$

where function $f_k(t, X)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ called the particular probability. Introduce the particular mathematical expectation of the function $g(t, X(t), \xi(t))$

$$\left\langle g\left(t, X(t), \xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} g(t, X, \Theta_k) f_k(t, X) dX,$$

E_m — the space of variable X,

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^*, \ \ dX = dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m .$$

For mathematical expectation of the function $g(t, X(t), \xi(t))$, we receive

$$\left\langle g\left(t, X(t), \xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t, X, \xi\right) f\left(t, X, \xi\right) d\xi \right) dx = \sum_{k=1}^{q} \int_{E_m} g\left(t, X, \Theta_k\right) f_k\left(t, X\right) dX = \sum_{k=1}^{q} \left\langle g\left(t, X, \xi(t)\right)\right\rangle_k .$$

Introduce denotion for particular moments of second ordinary

$$M_k(t) = \left\langle X(t), X^*(t) \right\rangle_k = \int_{E_m} XX^* f_k(t, X) dX$$

For matrix of second moments we find:

$$M(t) = \left\langle X(t), X^*(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} M_k(t).$$

We introduced for the optimal control

$$U(t) = S(t, \xi(t)) X(t)$$

under which the value of a quadratic functional

$$I(t) = \left\langle \int_0^{\infty} \left(X^*(\tau) C\left(\tau, \xi(\tau)\right) X(\tau) \right) + U^*(\tau) D\left(\tau, \xi(\tau)\right) U(\tau) d\tau \right\rangle .$$

reaches its minimum.

MAIN RESULTS. Introduce for particular value of random matrix:

$$A(t, \Theta_k) A_{k,} \, B(t, \Theta_k) = B_k(t), \ C(t, \Theta_k) = C_k(t), \ D(t, \Theta_k) = D_k(t), \ S(t, \Theta_k) = S_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, g).$$

For particular moments of the second ordinary $M_k(t)$ we have system of linear differential equation [3, 4]