

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 25 № 2

Ужгород 2014

ББК 22.1+72.4 (4УКР)

У-33

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. /
Редкол.: В.В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ
"Говерла", 2014. – Вип. 25, № 2. – 183 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В.В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Король І.І., доктор фізико-математичних наук, професор.
Відповідальний секретар — Погоріляк О.О., кандидат фізико-математичних наук,
доцент.

Члени редакційної колегії:

Бабич М. Д., доктор фізико-математичних наук, професор;
Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор;
Бондаренко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор;
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор;
Гече Ф. Е., доктор технічних наук, професор;
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор;
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор;
Задирака В.К., член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор;
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Моца А. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор;
Ронто А.М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М.Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Шапочка І.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного
університету, протокол № 5-2013/2014 від 11.12.2014 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення
і радіомовлення України

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський
національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14,
математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

© В.В. Маринець,
О.О. Погоріляк, упорядкування, 2014

© Ужгородський національний університет,
2014

УДК 519.21

О. О. Синявська (ДВНЗ “Ужгородський національний університет”)

БАКСТЕРІВСЬКА ОЦІНКА ПАРАМЕТРА КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО НЕГАУССОВОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

In this paper the strong consistent estimate for the unknown parameter of the covariance function of one non-Gaussian stochastic processes by using Baxter statistics is obtained and the non-asymptotic confidence intervals are found.

В даній роботі за допомогою бакстерівських статистик отримано сильно конзистентну оцінку невідомого параметра коваріаційної функції одного негауссового випадкового процесу та знайдено неасимптотичні довірчі інтервали.

Вступ. Бакстерівськими сумами називають послідовності сум нелінійних функцій від приростів випадкових процесів або полів. За певних умов послідовності бакстерівських сум збігаються у тому чи іншому сенсі до не випадкової сталої. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються теоремами Леві-Бакстера або теоремами бакстерівського типу.

Для гауссових випадкових процесів та випадкових процесів з гауссовими приростами такі теореми розглядалися в роботах П. Леві [1], Г. Бакстера [2], Є. Г. Гладішева [3], І. А. Ібрагімова і Ю. А. Розанова [4] та інших. Збіжність послідовностей бакстерівських сум для гауссових випадкових полів вивчали С. М. Берман [5], С. М. Краснитський [6], Т. В. Арак [7], О. О. Курченко [8] та інші.

В останні десятиліття поряд з класичними методами оцінювання невідомих параметрів застосовують метод бакстерівських сум. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримати сильно конзистентні оцінки та побудувати неасимптотичні довірчі області.

Оцінки для невідомих параметрів випадкових функцій за допомогою бакстерівських сум досліджувались, наприклад, у роботах О. В. Бесклінської та Р. Є. Майбороди [9], Ж.-М. Барде [10], Ю. В. Козаченка та О. О. Курченка [11]. О. О. Курченко [12] застосував бакстерівський підхід до побудови сильно конзистентної оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху. Ж.-К. Бретон, І. Нурден та Дж. Пеккаті [13] за допомогою нерівностей концентрацій побудували довірчі інтервали для параметра Хюрста одновимірного дробового броунівського руху.

У 2011 році Ю. В. Козаченко та О. О. Курченко [14] отримали теореми бакстерівського типу для певного класу негауссових випадкових процесів, — випадкових процесів з приростами класу K . Це створило можливість застосування бакстерівських сум до оцінювання параметрів у моделях без припущення гауссовості.

Постановка задачі. Нехай (Ω, Σ, P) - стандартний ймовірнісний простір.

Означення 1. [14] *Випадковий вектор $(\xi, \eta) \in L_4(\Omega) \times L_4(\Omega)$ має властивість K , якщо*

- 1) $E\xi = E\eta = 0$,
- 2) $E(\xi \pm \eta)^4 \leq 3(E(\xi \pm \eta)^2)^2$.

Клас усіх двовимірних векторів з властивістю K позначимо K . Підклас K_1 класу K визначимо як набір усіх векторів класу K , для яких $E(\xi \pm \eta)^4 = 3(E(\xi \pm \eta)^2)^2$.

Означення 2. Випадковий процес $\{X(t), t \in [0, 1]\}$ з нульовим середнім значенням називається випадковим процесом з приростами p -го порядку класу K (відповідно K_1), якщо для довільних $[t, t + p\Delta t], [s, s + p\Delta t] \subset [0, 1], \Delta t, \Delta s > 0$ випадковий вектор $(\xi^{(p)}, \eta^{(p)})$, де

$$\xi^{(p)} = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i X(t + (p - i)\Delta t),$$

$$\eta^{(p)} = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i X(s + (p - i)\Delta s), p = 2, 3,$$

має властивість K (відповідно K_1).

Нехай $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ — випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією:

$$r(t, s) = \frac{1}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), t, s \in [0, 1], H \in (0, 1), \quad (1)$$

і приростами другого та третього порядків класу K_1 .

У роботі [15] наведений приклад негауссового випадкового процесу з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами першого порядку класу K_1 , який ґрунтується на розкладі в ряд дробового броунівського руху [16]. Аналогічно, обґрунтовується існування негауссового випадкового процесу з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1 .

За спостереженнями випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ в точках

$$\left\{ \frac{k}{a_n}, \frac{k + 1/3}{a_n}, \frac{k + 1/2}{a_n}, \frac{k + 2/3}{a_n}, \frac{k + 1}{a_n} \mid 0 \leq k \leq a_n - 1, n \geq 1 \right\},$$

де $(a_n) \subset \mathbf{N}, a_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, потрібно побудувати сильно конзистентну оцінку параметра H та знайти неасимптотичні довірчі інтервали для параметра, що оцінюється. Припустимо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ збіжний.

Сильно конзистентна оцінка параметра H . Для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ введемо такі позначення:

$$\xi_{k,n}^{(2)} = \xi\left(\frac{k + 1}{a_n}\right) - 2\xi\left(\frac{k + 1/2}{a_n}\right) + \xi\left(\frac{k}{a_n}\right),$$

$$\xi_{k,n}^{(3)} = \xi\left(\frac{k + 1}{a_n}\right) - 3\xi\left(\frac{k + 2/3}{a_n}\right) + 3\xi\left(\frac{k + 1/3}{a_n}\right) - \xi\left(\frac{k}{a_n}\right), 0 \leq k \leq a_n - 1.$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум:

$$S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(p)}\right)^2, \hat{S}_n^{(p)} = a_n^{2H-1} S_n^{(p)}, p = 2, 3, n \geq 1.$$

Лема 1. [14] Нехай випадковий вектор (ξ, η) належить класу K . Тоді виконується наступна нерівність:

$$E(\xi^2 \eta^2) \leq 2(E\xi\eta)^2 + E\xi^2 E\eta^2 + \frac{1}{2} \left((E\xi^2)^2 - \frac{1}{3} E\xi^4 \right) + \frac{1}{2} \left((E\eta^2)^2 - \frac{1}{3} E\eta^4 \right).$$

Із цієї леми випливає, що для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ з приростами другого та третього порядків класу K_1 випадкові вектори $(\xi^{(p)}, \eta^{(p)})$, $p = 2, 3$ із означення 2, задовольняють таку нерівність:

$$E \left((\xi^{(p)})^2 (\eta^{(p)})^2 \right) \leq 2 \left(E(\xi^{(p)} \eta^{(p)}) \right)^2 + E(\xi^{(p)})^2 E(\eta^{(p)})^2, \quad p = 2, 3. \quad (2)$$

Лема 2. Нехай $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ – випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами p -го порядку класу K_1 , $p = 2, 3$. Тоді виконується нерівність:

$$\sup_{H \in (0,1)} \text{Var} \hat{S}_n^{(p)} \leq \frac{N_p}{a_n},$$

де

$$\begin{aligned} N_p &= 2(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \zeta(4p - 4)), \\ V_p(m, H) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^p (-1)^{i+j+1} C_p^i C_p^j \left| m + \frac{i-j}{p} \right|^{2H}, \quad 0 \leq m \leq a_n - 1, \\ R_p &= \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(0, H), \quad L_p = \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(1, H), \\ M_p &= \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1) \cdots (2H-(2p-1))}{p^{2p}} \right|, \quad p = 2, 3, \end{aligned}$$

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана.

Доведення. Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_n^{(p)}$, $p = 2, 3$, за допомогою нерівності 2:

$$\begin{aligned} \text{Var} S_n^{(p)} &= E(S_n^{(p)} - ES_n^{(p)})^2 = E \left(\sum_{k=0}^{a_n-1} (\xi_{k,n}^{(p)})^2 - \sum_{k=0}^{a_n-1} E(\xi_{k,n}^{(p)})^2 \right)^2 \leq \\ &= \sum_{k,l=0}^{a_n-1} \left(E \left((\xi_{k,n}^{(p)})^2 (\xi_{l,n}^{(p)})^2 \right) - E(\xi_{k,n}^{(p)})^2 E(\xi_{l,n}^{(p)})^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{k,l=0}^{a_n-1} \left(E(\xi_{k,n}^{(p)} \xi_{l,n}^{(p)}) \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді, обчислюючи математичне сподівання добутку приростів p -го порядку класу K_1 випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією (1), одержимо:

$$E(\xi_{k,n}^{(p)} \xi_{l,n}^{(p)}) = E \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i \xi \left(\frac{k}{a_n} + (p-i) \frac{1}{a_n} \right) \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\sum_{j=0}^p (-1)^j C_p^j \xi \left(\frac{l}{a_n} + (p-j) \frac{1}{a_n} \right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} a_n^{-2H} \sum_{i,j=0}^p (-1)^{i+j+1} C_p^i C_p^j \left| (k-l) + \frac{i-j}{p} \right|^{2H}, \quad 0 \leq l \leq k \leq a_n - 1, \end{aligned} \quad (3)$$

де $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, $p = 2, 3$.
Позначимо

$$V_p(k-l, H) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^p (-1)^{i+j+1} C_p^i C_p^j \left| (k-l) + \frac{i-j}{p} \right|^{2H}, \quad H \in (0, 1). \quad (4)$$

При $k = l$ маємо

$$E \left(\xi_{k,n}^{(p)} \right) = a_n^{-2H} V_p(0, H).$$

Покладемо $k-l = m$, $0 \leq m \leq a_n - 1$. Тоді із формул (3)–(4) випливає наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \text{Var} S_n^{(p)} & \leq 2 \left(a_n^{1-4H} V_p^2(0, H) + 2a_n^{-4H} \sum_{\substack{k,l=0, \\ l < k}}^{a_n-1} V_p^2(k-l, H) \right) = \\ & = 2 \left(a_n^{1-4H} V_p^2(0, H) + 2a_n^{-4H} \sum_{m=1}^{a_n-1} (a_n - m) V_p^2(m, H) \right) \leq \\ & \leq 2a_n^{1-4H} \left(V_p^2(0, H) + 2V_p^2(1, H) + 2 \sum_{m=2}^{a_n-1} V_p^2(m, H) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Зауважимо, що при $p = 2$ та $p = 3$ із співвідношень (3)–(4) отримаємо, що:

$$V_2(m, H) = 6m^{2H} - 4 \left| m + \frac{1}{2} \right|^{2H} + |m+1|^{2H} - 4 \left| m - \frac{1}{2} \right|^{2H} + |m-1|^{2H},$$

$$\begin{aligned} V_3(m, H) & = 20m^{2H} - 15 \left| m + \frac{1}{3} \right|^{2H} + 6 \left| m + \frac{2}{3} \right|^{2H} - |m+1|^{2H} - \\ & - 15 \left| m - \frac{1}{3} \right|^{2H} + 6 \left| m - \frac{2}{3} \right|^{2H} - |m-1|^{2H}, \quad 0 \leq m \leq a_n - 1, \quad H \in (0, 1). \end{aligned}$$

Оскільки, функція $V_p(m, H)$ є приростом $2p$ -го порядку функції $f(x) = x^{2H}$, $x \geq 1, H \in (0, 1)$, на відрізку $[m-1, m+1]$, то з формули [17, с. 244] для приросту n -го порядку функції $f(x)$:

$$\Delta^{(n)} f(x) = f^{(n)}(\theta_m) \Delta x^n,$$

де $f(x)$ така, що має $n - 1$ неперервних похідних $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ на відрізку $[m-1, m+1]$ і скінченну n -ту похідну $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(m-1, m+1)$,

$\Delta^{(n)}f(x)$ — приріст n -го порядку $f(x)$, $\theta_m \in (m-1, m+1)$; одержимо для $n = 2p$, $p = 2, 3$, що:

$$V_p(m, H) = f^{(2p)}(\theta_m) \left(\frac{1}{p}\right)^{2p} = \frac{2H(2H-1) \cdots (2H-(2p-1))}{p^{2p}} \theta_m^{2H-2p}.$$

Для $m-1 < \theta_m$, $m \geq 2$ маємо:

$$V_p^2(0, H) \leq \frac{M_p^2}{(m-1)^{2(2p-2H)}},$$

де

$$M_p = \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1) \cdots (2H-(2p-1))}{p^{2p}} \right|, \quad p = 2, 3. \quad (6)$$

При $H \in (0, 1)$ маємо

$$\sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{2^{2(2p-2H)}} = \zeta(2(2p-2H)) \leq \zeta(4p-4),$$

де $\zeta(\cdot)$ — дзета-функція Рімана. З останньої нерівності та нерівності (5) випливає, що:

$$\begin{aligned} \text{Var}S_n^{(p)} &\leq 2a_n^{1-4H} \left(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{2(2p-2H)}} \right) \leq \\ &\leq 2a_n^{1-4H} (R_p + 2L_p + 2M_p^2 \zeta(4p-4)), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$R_p = \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(0, H), \quad L_p = \sup_{H \in (0,1)} V_p^2(1, H). \quad (8)$$

Покладемо

$$N_p = 2(R_p + 2L_p + 2M_p^2 \zeta(4p-4)), \quad p = 2, 3. \quad (9)$$

Тоді з нерівності (7) та формул (8)–(9) отримуємо:

$$\sup_{H \in (0,1)} \text{Var}S_n^{(p)} \leq a_n^{1-4H} N_p,$$

а для випадкової величини $\hat{S}_n^{(p)} = a_n^{2H-1} S_n^{(p)}$, $p = 2, 3$ маємо

$$\sup_{H \in (0,1)} \text{Var}\hat{S}_n^{(p)} \leq \frac{N_p}{a_n},$$

де N_p , $p = 2, 3$ визначено в (9). Лема доведена.

З леми 2 та рівностей (3)–(4) для випадкового процесу $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1 одержимо:

$$V_2(0, H) = 2^{2-2H} - 1, \quad V_3(0, H) = 1 + \frac{15}{32H} - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^{2H},$$

та

$$V_2(1, H) = \frac{6 \cdot 2^{2H} - 4 - 4 \cdot 3^{2H} + 2^{4H}}{2^{2H}},$$

$$V_3(1, H) = \frac{20 \cdot 3^{2H} - 15 \cdot 4^{2H} + 6 \cdot 5^{2H} - 6^{2H} - 15 \cdot 2^{2H} + 6}{3^{2H}}, H \in (0, 1).$$

За допомогою програми Wolfram Mathematica 7.0 з формул (6) та (8) при $p = 2$ та $p = 3$ знайдено, що:

$$R_2 = \sup_{H \in (0,1)} V_2^2(0, H) = 9, L_2 = \sup_{H \in (0,1)} V_2^2(1, H) = 1, \quad (10)$$

$$M_2 = \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)}{2^4} \right| \approx \frac{9}{256}, \quad (11)$$

та

$$R_3 = \sup_{H \in (0,1)} V_3^2(0, H) = 100, L_3 = \sup_{H \in (0,1)} V_3^2(1, H) = 1, \quad (12)$$

$$M_3 = \sup_{H \in (0,1)} \left| \frac{2H(2H-1)(2H-2)(2H-3)(2H-4)(2H-5)}{3^6} \right| \approx 0.007, \quad (13)$$

Далі, з нерівностей (5), (7), рівностей (10)–(11) та враховуючи, що $\zeta(8-4H) \leq \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ [18, с. 1086] для $H \in (0, 1)$, отримаємо наступну нерівність при $p = 2$:

$$\begin{aligned} \text{Var}S_n^{(2)} &\leq 2a_n^{1-4H} \left(R_2 + 2L_2 + 2M_2^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{8-4H}} \right) \leq \\ &\leq 2a_n^{1-4H} \left(9 + \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{9}{256} \right)^2 \frac{\pi^4}{90} \right) \leq 22a_n^{1-4H}. \end{aligned}$$

Тоді, з рівності (9) одержимо, що $N_2 \approx 22$ та для $\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} S_n^{(2)}$ маємо:

$$\sup_{H \in (0,1)} \text{Var}\hat{S}_n^{(2)} \leq \frac{N_2}{a_n}.$$

Аналогічно, з нерівностей (5), (7), співвідношень (12)–(13) та беручи до уваги, що $\zeta(12-4H) \leq \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$ [18, с. 1086] для $H \in (0, 1)$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{Var}S_n^{(3)} &\leq 2a_n^{1-4H} \left(R_3 + 2L_3 + 2M_3^2 \sum_{m=2}^{a_n-1} \frac{1}{(m-1)^{12-4H}} \right) \leq \\ &\leq 2a_n^{1-4H} \left(100 + 2 + 2(0,007)^2 \frac{\pi^8}{9450} \right) \leq 204a_n^{1-4H}. \end{aligned}$$

Звідси та формули (9) маємо, що $N_3 \approx 204$. Тоді для $\hat{S}_n^{(3)} = a_n^{2H-1} S_n^{(3)}$ отримаємо

$$\sup_{H \in (0,1)} \text{Var}\hat{S}_n^{(3)} \leq \frac{N_3}{a_n}.$$

Теорема 1. Нехай $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ – випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами p -го порядку класу K_1 , $p = 2, 3$. Тоді

$$\frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}} \rightarrow \frac{2^{2H} (3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H})}{3^{2H} (4 - 2^{2H})}, \quad H \in (0, 1)$$

з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Обчислимо $E\hat{S}_n^{(2)}$ та $E\hat{S}_n^{(3)}$, застосовуючи лему 2:

$$E\hat{S}_n^{(2)} = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(2)} \right)^2 = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} a_n^{-2H} V_2(0, H) = 2^{2-2H} - 1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} E\hat{S}_n^{(3)} &= a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} \left(\xi_{k,n}^{(3)} \right)^2 = a_n^{2H-1} \sum_{k=0}^{a_n-1} a_n^{-2H} V_3(0, H) = \\ &= 1 + \frac{15}{3^{2H}} - 6 \left(\frac{2}{3} \right)^{2H}. \end{aligned} \quad (15)$$

Із лем 2 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ випливає, що для довільного $H \in (0, 1)$ ряди $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} \hat{S}_n^{(p)}$, $p = 2, 3$ збігаються. Тому $\hat{S}_n^{(p)} - E\hat{S}_n^{(p)} \rightarrow 0$, $p = 2, 3$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$ [19, с. 24]. Враховуючи рівності (14)-(15), отримуємо твердження теореми.

Розглянемо функцію

$$\theta(H) = \frac{2^{2H} (3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H})}{3^{2H} (4 - 2^{2H})}, \quad H \in (0, 1). \quad (16)$$

Ця функція є неперервною та спадною на проміжку $(0, 1)$, причому

$$\theta(0+) = \frac{10}{3}, \theta(1-) = \frac{1}{3} \frac{8 \ln 2 - 3 \ln 3}{\ln 2} \approx 1.$$

Нехай $\varphi(\theta)$, $\theta \in (1, \frac{10}{3})$ – функція, обернена до функції $\theta(H)$, $H \in (0, 1)$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді статистика

$$\hat{H}_n = \varphi(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}}, \quad n \geq 1,$$

є сильно конзистентною оцінкою параметра H .

Доведення. Оскільки, функція $\varphi(\theta)$, $\theta \in (1, \frac{10}{3})$, обернена до функції (16), то із збіжності $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta(H)$, $n \rightarrow \infty$ випливає, що має місце збіжність $\hat{H}_n \rightarrow H$ з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

Довірчі інтервали. З теореми 4.1 статті [15] випливає наступна теорема.

Теорема 3. Нехай $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ – випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) та приростами другого та третього порядків класу K_1 , а також $\frac{9p}{2} - \lambda_n > 0$. Тоді інтервал $(l_n(p), r_n(p))$, де

$$l_n(p) = \varphi \left(\min \left(\hat{\theta}_n + \gamma_n(p), \frac{10}{3} \right) \right), r_n(p) = \varphi \left(\max \left(1, \hat{\theta}_n - \gamma_n(p) \right) \right),$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}}, \gamma_n(p) = \frac{12\lambda_n + 2\sqrt{D_n}}{9p - 2\lambda_n},$$

$D_n = 18p(9\lambda_n + \mu_n) - 4\lambda_n\mu_n > 0$ для достатньо великих $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \frac{22}{a_n}$, $\mu_n = \frac{204}{a_n}$, $\varphi(\theta)$ – функція, обернена до функції (16), є довірчим інтервалом для параметра H з рівнем довіри $1 - p, p \in (0, 1)$.

Приклад. Нехай $\{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ – випадковий процес з нульовим середнім значенням, коваріаційною функцією (1) і приростами другого та третього порядків класу K_1 , який спостерігається в точках $\left\{ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1/3}{2^n}, \frac{k+1/2}{2^n}, \frac{k+2/3}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \mid 0 \leq k \leq 2^n - 1, n \geq 1 \right\}$. Розглянемо послідовності бакстерівських сум для $n \geq 1$:

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - 2\xi \left(\frac{k+1/2}{2^n} \right) + \xi \left(\frac{k}{2^n} \right) \right)^2,$$

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\xi \left(\frac{k+1}{2^n} \right) - 3\xi \left(\frac{k+2/3}{2^n} \right) + 3\xi \left(\frac{k+1/3}{2^n} \right) - \xi \left(\frac{k}{2^n} \right) \right)^2,$$

$$\hat{S}_n^{(p)} = 2^{n(2H-1)} S_n^{(p)}, p = 2, 3.$$

За теоремою 1 одержимо, що з ймовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}} \rightarrow \frac{2^{2H} (3^{2H} + 16 - 6 \cdot 2^{2H})}{3^{2H} (4 - 2^{2H})}, H \in (0, 1).$$

Побудуємо довірчий інтервал для параметра H з рівнем довіри $1 - p = 0.9$. Нехай $n = 20$. Тоді з теореми 3 для значень $\lambda_{20} \approx 2.098 \cdot 10^{-5}$, $\mu_{20} \approx 1.945 \cdot 10^{-4}$, $D_{20} \approx 6.901 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{20}(p) \approx 0.059$ отримаємо:

$$P \left\{ H \in \left(\hat{H}_n - l_{20}(p), \hat{H}_n + r_{20}(p) \right) \right\} \geq 0.9,$$

де

$$\hat{H}_n = \varphi(\hat{\theta}_n), \hat{\theta}_n = \frac{\hat{S}_n^{(3)}}{\hat{S}_n^{(2)}},$$

$$l_{20}(p) = \varphi \left(\min \left(\hat{\theta}_n + 0.059, \frac{10}{3} \right) \right), r_{20}(p) = \varphi \left(\max \left(1, \hat{\theta}_n - 0.059 \right) \right).$$

Висновки. В роботі за допомогою методу бакстерівських сум побудовано сильно конзистентну оцінку параметра, що входить показником до коваріаційної функції випадкового процесу з приростами другого та третього порядків класу K_1 . А також визначено неасимптотичні довірчі області для параметра, що оцінюється.

1. *Levy P.* Le mouvement Brownian plan // Amer J. Math. – 1940. – Vol. 62. – P. 487–550.
2. *Baxter G.* A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – 1956. – No. 3. – P. 522–527.
3. *Гладышев Е. Г.* Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскимиращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – Том. 1. – С. 57–66.
4. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
5. *Berman S. M.* A version of the Levy-Baxter theorem for the increments of Brownian motion of several parameters // Proc. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 18. – P. 1051–1055.
6. *Краснитский С. М.* О некоторых предельных теоремах для случайных полей с гауссовскими разностями m -го порядка // Теория вероятностей и математическая статистика. – 197. – Вып. 5. – С. 71–80.
7. *Арак Т. В.* О теоремах типа Леви-Бакстера для случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Том 17, Вып. 1. – С. 153–160.
8. *Курченко А. А.* Теорема бакстеровского типа для векторного гауссовского случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1984. – Вып. 30. – С. 107–113.
9. *Бесклинская Е. П., Майборода Р. Е.* О скорости сходимости некоторых оценок параметров стационарных гауссовских случайных процессов // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – Вып. 43. – С. 13–19.
10. *Bardet J.-M.* Un test d'auto-similarite pour les processus gaussiens a accroissements stationnaires // C. R. Acad. Sci. Paris – 1999. – Vol. 328. – P. 521–526.
11. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* An estimate for the multiparameter FBM // Theory Stoch. Process. – 1999. – Vol. 5 (21). – P. 113–119.
12. *Курченко О. О.* Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броуновського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. – Вып. 67. – С. 88–96.
13. *Breton J.-C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics – 2009. – No. 3. – P. 416–425.
14. *Kozachenko Yu. V., Kurchenko O. O.* Levy-Baxter theorems for one class of non-Gaussian stochastic processes // Random Oper. Stoch. Equ. – 2011. – Vol. 4. – P. 313–326.
15. *Синявська О. О.* Бакстерівська оцінка невідомого параметра коваріаційної функції у негауссовому випадку // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2013. – Вып. 88. – С. 155–164.
16. *Dzharidze K., Van Zanten J. H.* A series expansion of fractional Brownian motion // Probability Theory and Related Fields. – 2004. – Vol. 130, Issue 1. – P. 39–55.
17. *Физтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 616 с.
18. *Градштейн И. С., Рыжык И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1000 с.
19. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. Обзор математической теории. – К.: Вища школа, 1983. – 224 с.

Одержано 08.11.2014

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 25 № 2

2014

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

В. В. Маринець (головний редактор), І. І. Король (заст. головн. редактора),
О. О. Погоріляк (відповідальний секретар), М. Д. Бабич, А. А. Бовді,
В. М. Бондаренко, О. Ф. Волошин, Ф. Е. Гече, Й. Г. Головач, Д. В. Гусак,
В. К. Задирака, Ю. В. Козаченко, О. І. Кузка, А. І. Моца, М. О. Перестюк,
А. М. Ронто, М. Й. Ронто, Шапочка І.В.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат математичного факультету УжНУ: редакція збірника наукових праць
"Науковий вісник Ужгородського національного університету",
серія "Математика і інформатика".

Тел. +38(0312)642725

E-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua