МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформатики та фізико-математичних дисциплін

Ю.Ю. Білак, Л.Я. Данько-Товтин

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації
з базової теми дисципліни «Інформатика»

Ужгород
2015

ББК 32.97я7
УДК 004.222(07)
Б61
Білак Ю.Ю. Системи числення: методичні рекомендації з базової теми дисципліни «Інформатика» / Ю.Ю. Білак, Л.Я. Данько-Товтин. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2015. – 24 с.

Методичні рекомендації містять теоретичні відомості та методику викладання теми «Системи числення». Дана тема є однією з базових тем будь-якого курсу інформатики вищої школи, а також має пряме відношення до алгебраїчної теорії чисел, математики. Актуальність викладання даної теми у курсі інформатики пов'язана з тим, що числа в пам'яті комп'ютера подаються у двійковій системі числення, а для зовнішнього зображення вмісту та адрес пам'яті використовують шістнадцяткову та вісімкову системи числення, відповідно. Це дозволяє студентам та учням зрозуміти математичні основи роботи процесора та принцип збереження інформації на відповідних носіях.

Методика викладання даної теми була апробована на студентах ДВНЗ «УжНУ» та дала позитивні результати.

Автори:
Білак Ю.Ю. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін факультету інформаційних технологій ДВНЗ «УжНУ»;
Данько-Товтин Л.Я. – викладач вищої категорії, педагогічне звання «викладач-методист», викладач природничо-гуманітарного коледжу ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент:
Міца О.В. – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних управляючих систем та технологій факультету інформаційних технологій ДВНЗ «УжНУ».

Рекомендовано до друку методичною радою
факультету інформаційних технологій
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
(протокол №2 від 9 листопада 2015 року)

ЗМІСТ

Цифри та числа. Історія розвитку

Подано поняття цифр та чисел. Історію розвитку. Виникнення та рисування сучасних знаків для запису десяткових цифр.

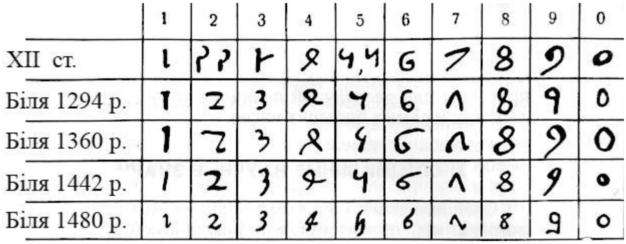
Мабуть, ще у кам’яному віці, наші предки робили спроби рахувати різні предмети і явища, що їх оточували. Звичайно ж, що в той час не існувало ні літер, ні цифр, а думки людина висловлювала за допомогою малюнків на шкурах чи на стінах печер. Уміння рахувати змусило наших предків вчитися записувати числа. Для запам'ятовування та запису чисел люди користувалися зарубками на стінах печер, на шкурах, на деревах, вузликами на мотузках тощо. Значним винаходом людства було використання у якості обчислювального інструменту пальців рук. Це найпростіший спосіб рахунку, бо навіть у наш час діти вчаться рахувати саме так.

Складно уявити життя будь-якої людини без можливості рахувати. Ми кожного дня використовуємо цифри та числа, навіть не задумуючись, у чому полягає різниця між ними. Зупинимось детальніше на таких базових поняттях математики як цифри та числа.

Цифра (від древньолатинського cifra) – це спеціальний знак для позначення кількості одиниць. Поняття «цифра» вперше з'явилося у єгиптян і вавілонян (причому цифри, як спеціальні знаки, утворилися пізніше, ніж літери). Сучасні десяткові (арабські) цифри мають неясне походження. Стверджують, що вони привнесені у Європу арабами у XIII столітті з Індії, а пізніше перейняті мусульманськими науковцями. Так, перський математик Аль-Хорезмі використовує арабські цифри у своїй книзі 825 року «Про лічбу з цифрами хінді» (до речі, термін «алгоритм» походить саме від його імені). Вперше в Європі арабські цифри були згадані у Вігіліанському кодексі в 976 році, хоча їх використання почалось із твору італійського вченого Леонардо Пізанського (Фібоначчі) "Liber abaci" 1202 р. Всією Європою дана система цифр поширилася у часи пізнього Середньовіччя, тобто з другої половини XV ст.

Існує думка, що написання сучасних арабських цифр виникло у зв’язку з тим, що кількість кутів цифри, повинна відповідати її числовому значенню.

Цифри, якими ми користуємося сьогодні відрізняються від тих, які використовували індійські математики, оскільки у процесі розвитку вони зазнали значних перетворень свого первісного вигляду. Нижче у таблиці наведено еволюцію форми арабських цифр.



Навіть у наш час у ряді неєвропейських країн використовують цифри, що різняться від арабських.

Таблиця 1. Сучасне зображення цифр у різних країнах світу

Європа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Арабські країни та Єгипет	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
Перські країни (Іран)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	
Китай та Японія	零	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
Індія (письмо Деванагарі) (хінді)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	
Таїланд	ตั	ว	เ	ล	ข	อ	า	ร	บิ	ก	
Непал	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	
Тібет	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩	
Лаос	໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙	
Цифри тамільської мови		க	உ	௩	ச	௫	௬	எ	அ	கூ	

Число – одне з фундаментальних і найдавніших понять математики; це вираз кількісної міри, поданий у зручному вигляді з допомогою цифр. Тобто числа складаються з цифр, а цифри мають знакові властивості (упізнаваність, обумовленість тощо). Однак цифра не тільки використовується нами як складова числа, але і як самостійний аналог числа, коли мова йде про предмети у кількості від одного до дев’яти включно (у даному випадку, мова йде про 10-ву систему числення, що містить 10 різних цифр). Іншими словами, цифри – це одиниці рахунку від 0 до 9, все інше – числа. Цифри – це знаки, а числа – кількісна абстракція. Цифри і числа різних систем числення (СЧ) настільки не співпадають, що число однієї системи може бути цифрою іншої, оскільки це все є придумані людиною поняття.

Абстрактне поняття числа (не пов’язаного з перерахунком конкретних предметів) виникає завдяки розвитку писемності та введення для позначення чисел певних символів. Процес розширення поняття чисел та дій над ними пройшов довгий шлях історичного розвитку. Поява нових видів чисел і числення тісно пов'язана з розвитком людського суспільства. Разом з тим на кожне розширення числової системи можна дивитися з математичної точки зору, як на збільшенням кількості можливостей виконання деякої математичної операції. Так, *натуральні* числа, які використовують для лічби в практичній діяльності, з'явилися на ранніх етапах розвитку людської цивілізації. Першим розширенням було приєднання до множини натуральних чисел *дробових* (додатних раціональних) чисел. Спочатку з'явилися зручні дроби (т.з. *основні*), і тільки пізніше виникло уявлення про більш складні дроби як частку від ділення двох натуральних чисел одного на інше у випадку, коли ділене націло не ділиться на дільник (єгипетські папіруси 2000 – 1600 рр. до н. е. із записом арифметичних операцій над дробами). Швидше за все, поява дробових чисел пов'язана з необхідністю проведення вимірювань, тобто процедури порівняння вимірюваної величини з іншою величиною того ж роду, що вибирається в якості еталона; але одиниця виміру не завжди вкладалася цілу кількість разів у вимірювану величину. Уведення *від'ємних* чисел було викликано розвитком алгебри як науки, що дає загальні способи рішення арифметичних завдань незалежно від їхнього конкретного змісту і вихідних числових даних. Натуральні від'ємні та додатні числа разом з нулем утворюють множину *цілих* чисел. Потреба вимірювання відрізків дала поштовх до нового розширення числа, яке дозволило виражати міру відрізка, несумірного з одиничним. Виникає поняття *додатного ірраціонального* числа, а вивчення довжин у геометрії призвело до відкриття *ірраціональних* чисел (перше знайдене ірраціональне число $\sqrt{2}$). Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину *дійсних* чисел. На початку XVI століття у математиці, у зв'язку з рішенням алгебраїчних рівнянь 3-го степеня (пізніше – рівнянь 2-го степеня), виникло поняття *комплексних* чисел, і лише в XIX столітті була розроблена *теорія дійсних чисел*.

Арифметика

Арифметика як наука. Історія виникнення. Поняття числової інформації.

Арифметика – наука про числа, їх властивості та відношення. Вона тісно пов'язана з алгеброю і теорією чисел.

Причиною виникнення арифметики стала практична потреба в лічбі, найпростіших вимірюваннях і обчисленнях. Перші достовірні відомості про арифметичні знання виявлені в історичних пам'ятках Вавілону та Стародавнього Єгипту, які відносяться до III–II тисячоліть до н. е. Великий внесок у розвиток арифметики зробили грецькі математики, зокрема піфагорійці, які намагались за допомогою чисел визначити закономірності світу. У Середні віки основними сферами застосування арифметики була торгівля та базові наближені обчислення. У XVII столітті мореплавство, астрономія, механіка, складніші комерційні розрахунки сприяли подальшому розвитку техніки обчислень.

Новий поштовх теорія чисел та арифметика отримали у період розвитку комп'ютерних інформаційних технологій. Слід зауважити, що числова інформація в комп'ютерній техніці характеризується:

- системою числення;
- видом числа (дійсні, комплексні…);

- типом числа (ціле, дробове…);
- формою представлення числа (з фіксованою чи плаваючою комою);
- форматом числа;
- діапазоном та точністю подання числа;
- алгоритмами виконання арифметичних операцій тощо.

Система числення

Означення. Історія розвитку. Типи систем числення.

Система числення – це спосіб представлення будь-яких чисел за допомогою певного набору знаків (цифр) і визначені правила дій над ними.

У процесі розвитку, історично першою СЧ людства, швидше за все, була одинична система. *Одини*чна (унарна) система числення – це система, будь-яке число якої утворюється шляхом повторення одного знака, що символізує одиницю. У цій СЧ для позначення числа предметів рисували ці предмети, повторюючи їх зображення потрібну кількість разів. Пізніше отримав поширення більш складний спосіб: рисували предмет, про який ішла мова, а поруч ставили точки чи риски, кількість яких вказувала число (точки і риски, мабуть, є прообразом найпростіших цифрових знаків – одиниць). Одинична система числення не самий зручний спосіб запису чисел. Записувати в такий спосіб великі кількості дуже складно та занадто громіздко. З часом виникли інші, більш економні (для запису та збереження чисел у пам'яті ПК) системи числення.

Відомо, що числова вісь нескінченна, оскільки до кожного числа можна додати ще одиницю і отримати наступне число. Зрозуміло, що придумувати якісь спеціальні позначення (цифри) для довільного елементу (числа) нескінченної числової осі нереально. Записати довільне число обмеженою кількістю цифр дозволяє *позиційна система числення*. Значення чисел, записаних у позиційній СЧ, залежить не тільки від символів, з яких складається запис числа, а й від їх розташування. Наприклад, числа 754 і 457 (у 10-й позиційній СЧ) є різними, на відміну від унарної системи числення, в якій важливим є не місце розташування зарубок (вузликів тощо), а тільки їх кількість. Ця властивість називається *позиційністю*, а система числення, що володіє нею, називається *позиційною системою числення*.

У інформатиці, запис чисел у деякій СЧ називається його *кодом*.

Існують також *непозиційні* СЧ *та змішані*.

Позиційні системи числення

Позиційні системи числення. Означення. Основні поняття позиційних систем: основа, алфавіт. Розгорнута форма запису числа.

Ідея позиційної системи числення була описана ще Архімедом у роботі «Обчислення піску». Винахід позиційної системи числення приписують шумерам і вавілонянам, а подальший розвиток – індусам.

Позиційна системи числення – це система у якій величина, яку позначає цифра, залежить від її позиції у числі.

Позиційна СЧ складається з обмеженої кількості цифр, проте позиція кожної цифри у числі забезпечує значимість (вагу) цієї цифри. Позиція цифри на мові математики називається *розрядом*. Тобто значення цифри «мінливе» і залежить від її позиції в числі. Наприклад, у 10-й СЧ, в числі 33 дві трійки мають різне значення: права трійка означає цифру 3 (кількість одиниць), а ліва – число 30 (кількість десятків). Для позиційних систем числення характерні наочність зображення чисел і відносна простота виконання арифметичних операцій. Саме позиційні системи числення стали основою сучасної математики.

Слід зауважити що позиційні СЧ, в свою чергу, поділяють на однорідні (вага їх розрядів змінюється згідно із степеневим законом) і неоднорідні. Далі, розглядатимемо тільки однорідні СЧ.

Існує велика кількість позиційних систем числення, які відрізняються одна від одної *алфавітом* – множиною використовуваних цифр. *Основа позиційної системи числення* – це розмір алфавіту, тобто кількість різних знаків або символів (цифр), що використовуються для зображення чисел у даній системі.

Вибір алфавіту тієї чи іншої СЧ, швидше за все, визначався потребами реального життя, науки чи зручностями обробки. Історично ж вибір СЧ визначався звичками або традиціями конкретного народу. Ми користуємось десятковою СЧ з цілком зрозумілих причин – у нас на руках десять пальців. Ми звикли до неї, і ніколи свідомо не підкреслюємо значення основи. Але можна побудувати систему числення, взявши за основу будь-яке інше натуральне число.

Примітка. *Для зручності у СЧ з основою не більше 10, використовують арабські (десяткові) цифри, якщо ж основа більша за 10, то роль цифр часто відіграють латинські літери розташовані в лексикографічному (алфавітному) порядку як, до прикладу, у 16-вій системі числення.*

Таблиця 2. Алфавіт позиційних систем числення

Основа *q*	**Система числення**	**Знаки**
2	Двійкова	0, 1
3	Трійкова	0, 1, 2
5	П’ятіркова	0, 1, 2, 3, 4
8	Вісімкова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10	Десяткова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16	Шістнадцяткова	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
і т.д.		

Наприклад, числа трійкової СЧ будуть наступними: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22…

Для зазначення основи системи, до якої належить число, вводять індексне позначення: 75_{10} , 1011_2 , $2A7_{16}$, 54_8.

У позиційній СЧ число можна представити через його цифри за допомогою многочлена відносно основи q :

$$A_q = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + ... + a_{-m} q^{-m} = \sum_{i=-m}^{k} a_i q^i$$

де q – основа СЧ, q^i – вага позиції, a_i – цифри в позиціях числа, *0..k* – номери розрядів цілої частини числа, *-1...-m* – номери розрядів дробової частини числа. Тобто число є послідовністю цифр: $a_k a_{k-1} ... a_0 a_{-1} ... a_{-m}$.

Вищенаведений поліном називається *розгорнутою формою запису числа*. Доданки в цьому виразі є добутками значущих цифр числа і степенів основи системи числення, що залежить від позиції цифри в числі – *розряду*. Розряд числа зростає справа наліво, від молодших розрядів до старших (для цілого числа молодший розряд є нульовим). За кількістю розрядів визначають довжину числа.

Приклади запису чисел:

- двійкова СЧ, q=2; $a_i \in \{0,1\}$,
  $A_2 = 101_2 = 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0$
- вісімкова СЧ, q=8; $a_i \in \{0,1...7\}$,
  $A_8 = 175_8 = 1*10_8^2 + 7*10_8^1 + 5*10_8^0 = 1*8_{10}^2 + 7*8_{10}^1 + 5*8_{10}^0$,
  тобто $10_8 = 8_{10}$
- десяткова СЧ, q=10; $a_i \in \{0,1...9\}$,
  $A_{10} = 531{,}26_{10} = 5*10^2 + 3*10^1 + 1*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} =$
  $= 500 + 30 + 1 + 0{,}20 + 0{,}06$

Еволюція систем числення

У процесі розвитку людство у різні історичні періоди для лічби і обчислень використовувало різні СЧ: єгипетську, крітську, китайську, алфавітні (іонічна грецька, старослов’янська, армянська, грузинська…), десяткову, дванадцяткову, двадцяткову, шістдесяткову та інші. У другій половині XX ст. стрімкий розвиток сучасної обчислювальної техніки та інформатики спонукав актуалізацію та використання двійкової, вісімкової та шістнадцяткової СЧ.

Єгипетську систему (кінець IV тисячоліття до н. е.) було побудовано на основі строгого десяткового принципу. Особливі знаки використовували тільки для одиниці та різних степенів числа 10; для одиниці використовувався знак у формі горизонтальної риски, для десяти – дуга, для ста – зігнута мотузка, для тисячі – стебельце лотоса… Інші числа отримували методом складання основних цифр, розташовуючи їх поруч.

Крітсько-мікенська система цифр, дуже схожа на єгипетську і також побудована за десятковим принципом.

Близька до єгипетської також і *китайська* цифрова система. Дана система базувалася на десятковому принципі, однак містила особливі знаки не тільки для одиниці та степенів числа 10, але і для інших чисел. Поряд з принципом додавання знаків застосовувався також принцип множення (число

400 іноді записувалося знаком 100 з надписаним над ним, зліва чи справа від нього, знаком 4).

Таблиця.3. Позначення цифр і чисел у різних системах числення

Сучасна	Єгипетська (ієрогліфічна)	Єгипетська (ієратична.)	Вавілонська	Грецька (антична)	Грецька (іонічна)	Римська	Древньо-єврейська	Народів Майя	Древньо-китайська (паличкова)	Древньо-китайська (ієрогліфічна)	Індійська (деванагарі)	Арабська (алфавітна)	Арабська (сучасна)	Арабська (гобарі)
1	|	[illegible]	𒁹	I	Α	I	א	•	𝍠	一	१	ا	١	1
2	||	[illegible]	𒈫	II	Β	II	ב	••	𝍡	二	२	ب	٢	2
3	|||	[illegible]	𒐈	III	Γ	III	ג	•••	𝍢	三	३	ج	٣	3
4	||||	[illegible]	𒐉	IIII	Δ	IIII	ד	••••	𝍣	四	४	د	٤	4
5	|||||	[illegible]	𒐊	Γ	Ε	V	ה	—	𝍤	五	५	ه	٥	5
6	||||||	[illegible]	𒐋	ΓI	F	VI	ו	• —	𝍥	六	६	و	٦	6
7	|||||||	[illegible]	𒐌	ΓII	Ζ	VII	ז	•• —	𝍦	七	७	ز	٧	7
8	||||||||	[illegible]	𒐍	ΓIII	Η	VIII	ח	••• —	𝍧	八	८	ح	٨	8
9	|||||||||	[illegible]	𒐎	ΓIIII	Θ	IX	ט	•••• —	𝍨	九	९	ط	٩	9
10	∩	[illegible]	𒌋	Δ	Ι	X	י	— —	𝍩	十	१०	ي	١٠	10
20	∩∩	[illegible]	𒎙	ΔΔ	Κ	XX	כ	• 𝋠	𝍪	二十	२०	ك	٢٠	20
30	∩∩∩	[illegible]	𒌍	ΔΔΔ	Λ	XXX	ל	• — —	𝍫	三十	३०	ل	٣٠	30
40	∩∩∩∩	[illegible]	𒐏	ΔΔΔΔ	Μ	XL	מ	•• 𝋠	𝍬	四十	४०	م	٤٠	40
50	∩∩∩∩∩	[illegible]	𒐐	𐅄	Ν	L	נ	•• — —	𝍭	五十	५०	ن	٥٠	50
60	∩∩∩∩∩∩	[illegible]	𒁹	𐅄Δ	Ξ	LX	ס	••• 𝋠	𝍮	六十	६०	س	٦٠	60
70	∩∩∩∩∩∩∩	[illegible]	𒁹𒌋	𐅄ΔΔ	Ο	LXX	ע	••• — —	𝍯	七十	७०	ع	٧٠	70
80	∩∩∩∩∩∩∩∩	[illegible]	𒁹𒎙	𐅄ΔΔΔ	Π	LXXX	פ	•••• 𝋠	𝍰	八十	८०	ف	٨٠	80
90	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	[illegible]	𒁹𒌍	𐅄ΔΔΔΔ	Ϙ	XC	צ	•••• — —	𝍱	九十	९०	ص	٩٠	90
100	𓍢	[illegible]	𒁹𒐏	H	Ρ	C	ק	— 𝋠	𝍠	百	१००	ق	١٠٠	100
200	𓍢𓍢	[illegible]	𒐈𒎙	HH	Σ	CC	ר	— — 𝋠	𝍡	二百	२००	ر	٢٠٠	200
300	𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒐊	HHH	Τ	CCC	ש	— — — 𝋠	𝍢	三百	३००	ش	٣٠٠	300
400	𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒐋𒐏	HHHH	Υ	CD	ת	• •• 𝋠	𝍣	四百	४००	ت	٤٠٠	400
500	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒐍𒎙	𐅅	Φ	D	ך	• •• — 𝋠	𝍤	五百	५००	ث	٥٠٠	500
600	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒌋	𐅅H	Χ	DC	ם	• •• — — 𝋠	𝍥	六百	६००	خ	٦٠٠	600
700	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒌋𒁹𒐏	𐅅HH	Ψ	DCC	ן	• •• — — — 𝋠	𝍦	七百	७००	ذ	٧٠٠	700
800	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒌋𒐈𒎙	𐅅HHH	Ω	DCCC	ף	•• •••• 𝋠	𝍧	八百	८००	ض	٨٠٠	800
900	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	[illegible]	𒌋𒐊	𐅅HHHH	Ϡ	CM	ץ	•• •••• — 𝋠	𝍨	九百	९००	ظ	٩٠٠	900

У *алфавітних* цифрових системах у якості цифрових знаків використовували літери, на цифрове значення яких вказувала горизонтальна риска (титл), яку ставили над ними. Особливістю даних систем була наявна велика кількість різних знаків, що використовувалися для запису цифр (зазвичай 9 різних знаків для одиниць, 9 для десятків, 9 для сотень і один-два для тисяч чи десятків тисяч). Великі числа отримували за принципом множення. У *старослов'янській* системі числення для запису чисел використовувалась кирилиця та глаголиця з *титлом*, який вказував на використання літер у якості цифр. Цей знак міг ставитися над кожною літерою, або він міг бути довгим і покривати все число.

Дванадцяткова СЧ використовувалася у англійській системі мір (1 фут рівний 12 дюймам тощо), для підрахунку кількості місяців у році, при лічбі дюжинами, у грошовій системі (1 шилінг рівний 12 пенсам тощо).

Народи майя та ацтеки, що населяли протягом багатьох століть великі області американського континенту, використовували *двадцяткову* СЧ (загальна кількість пальців рук та ніг рівна 20); у історичній літературі існує також думка, що народи майя використовували п’ятіркову СЧ. У давнину дану систему також називали *фінікійською*.

У стародавньому Вавілоні існувала достатньо складна *шістдесяткова* система (вимірювання кутів, визначення часу, географічного положення тощо).

Непозиційні системи числення

Не всякі числові системи використовують позиційний спосіб запису.

Непозиційні системи числення – це СЧ у яких величина, яку позначає цифра, не залежить від її позиції у числі. При цьому система може накладати обмеження на позиції цифр, наприклад, щоб вони були розташовані по спаданню, чи згруповані за значенням.

У непозиційній системі кожен знак у записі числа, незалежно від місця його розташування, означає одне й те саме число. Найвідомішою непозиційною СЧ є *римська* (виникла у древньої цивілізації – етрусків, біля 500 р. до н. е., а згодом перейнята римлянами), в якій використовують сім знаків:

I	V	X	L	C	D	M
один	п'ять	десять	п'ятдесят	сто	п'ятсот	тисяча

Наприклад: III – 3, MDC – 1600.

Форма римських цифр походить від використання для лічби пальців і долонь та від словесної назви чисел (**C**entum — сто, **D**emimille — половина тисячі, **M**ille — тисяча). У римській СЧ вага цифри у числі, у будь-якій позиції є незмінною. До прикладу, цифра X у будь-якій позиції числа дорівнює просто десяти (у числі XIX – всі X означають десять).

Щоб записати число, римляни використовували не тільки додавання, але й вирахування ключових чисел. При цьому, застосовувалося наступне правило: значення кожного меншого знаку, поставленого ліворуч від більшого, віднімається від значення більшого знаку. Те, що при записі нових чисел ключові числа можуть не тільки складатися, але й відніматися, має істотний недолік: запис римськими цифрами позбавляє число одиничності вигляду, тобто одне й те ж число можна записати багатьма варіаціями цифр. Єдиних правил запису римських чисел не існує дотепер, але існують пропозиції про прийняття для них міжнародного стандарту. У наші дні кожну з римських цифр пропонується записувати в одному числі не більш трьох разів підряд.

Недоліком римської СЧ є і те, що цифри даної системи розкидані по осі чисел (зображення чисел є занадто громіздким), відсутність нуля та чітких правил виконання арифметичних дій над числами (не кажучи вже, про більш складні функції). У зв'язку з цим, римська СЧ використовується вкрай рідко.

Десяткова система числення

Мабуть, саме завдяки використанню людьми у якості обчислювального інструменту десяти пальців рук, араби створили *десяткову* систему числення. У цій системі використовуються спеціальні графічні знаки – арабські цифри, які можна записати в наступному порядку: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а основою є число 10. Десятковою вона називається тому, що в цій СЧ десять одиниць одного розряду становлять одну одиницю наступного, старшого розряду.

Десяткову систему числення ще називають індо-арабською або індійською. Вона створена у I-IV ст. нашої ери індійськими математиками, причому для позначення цифр вони використовували знаки, що різняться від арабських. Одним з важливих досягнень індійської науки було також введення особливого позначення для пропуску розрядів – *нуля* (який означав відсутність числа). Араби ж першими засвоїли дану СЧ й поширили Європою.

У *розгорнутій формі* ціле десяткове число матиме вигляд:

$$257_{10} = 200+50+7=2\cdot10^2+5\cdot10^1 + 7\cdot10^0$$

У даному прикладі 10 є основою системи числення, а показник степеня – це *розряд* (місце розташування символів у числі). У цілому десятковому числі цифра, що перебуває в крайній праворуч позиції (розряді), означає кількість одиниць, цифра, зміщена на одну позицію вліво, – кількість десятків, ще лівіше – сотень, потім тисяч і т.д. Відповідно маємо розряд одиниць, розряд десятків і т.д.

Саме десяткові цифри отримали широкого вжитку; на них базується метрична система одиниць, нумерація тощо.

Перші обчислювальні машини використовували десяткову СЧ. Механічна обчислювальна машина французького вченого Б.Паскаля мала десяткове механічне рахункове колесо: воно містило десять зубців. Згодом, десяткову систему почали використовувати в електромеханічних та електронних обчислювальних машинах. Останні використовували десять тригерів, тобто мікросхем з двома стійкими станами. Економічна недоцільність використання десятьох тригерів стала поштовхом для пошуку дешевших систем.

Двійкова, вісімкова та шістнадцяткова системи числення

В основу пошуків інженери і математики поклали двійкову природу елементів обчислювальної техніки. Тому, апаратну частину ЕОМ було спроектовано на основі двопозиційних елементів (найпростішим є діод), які можуть перебувати лише в одному з двох стійких станів: 0 чи 1. Тож нові обчислювальні машини почали рахувати за допомогою нулів і одиничок. Знаки 0 і 1 є цифрами двійкової СЧ, яка і в наш час використовується в ПК. Зауважимо, що вперше двійкове числення було запропоноване у XVII ст. німецьким математиком Г.Лейбніцем.

Двійкова СЧ та її арифметика має ряд переваг над іншими СЧ: простота, висока надійність, висока швидкодія обчислювальних засобів для подання даних і виконання операцій тощо. Слід також зауважити, що надійнішими будуть мікросхеми саме з двома стійкими станами, призначені для зберігання значень двійкового розряду. У інформатиці двійкова цифра має назву *біт*.

З появою персональних комп'ютерів двійкова система числення повноправно увійшла в життя суспільства. Ми використовуємо її щодня, працюючи за комп'ютером чи дивлячись цифрове телебачення, знімаючи фото чи відео, здійснюючи дзвінок чи прослуховуючи музику тощо. Двійкова система числення є одним з найважливіших винаходів людства.

Вісімкова СЧ набула популярності завдяки бурхливому розвитку інформатики та програмування. Це позиційна цілочисельна СЧ з основою 8. Для представлення чисел у ній використовуються цифри від 0 до 7. Вісімкова система часто використовується в галузях, пов'язаних з цифровими пристроями та характеризується легким перетворенням вісімкових чисел у двійкові і навпаки, шляхом заміни вісімкових чисел на тріади (триплети) двійкових (див. Таблицю 3). У наш час майже повністю витіснена шістнадцятковою, завдяки швидким темпам збільшення розрядності процесорів, росту об'ємів носіїв інформації та розробки відповідного програмного забезпечення.

Шістнадцяткова СЧ – це позиційна система числення, кожне число в якій записується за допомогою 16-ти символів. Цю систему часто називають також Hex (від англ. hexadecimal — шістнадцятковий). Для запису чисел в цій системі окрім 10 арабських цифр (від 0 до 9) використовують 6 літер латинської абетки: A, B, C, D, E, F. Наприклад, запис шістнадцяткового числа $3E8_{16}$ у вигляді полінома має вигляд:

$$3E8_{16}=3*16^2 + 14*16^1 + 8*16^0 = 768 + 224 + 8 = 1000_{10}.$$

Шістнадцяткова СЧ широко вживана в інформатиці, оскільки значення кожного байту можна записати у вигляді двох цифр шістнадцяткової системи. Таким чином, значення послідовних байтів можна представити у вигляді списку двозначних чисел. Тобто за допомогою шістнадцяткової та вісімкової СЧ можна більш компактно записати двійкову інформацію.

.

Таблиця 4. Відповідність двійкових, вісімкових, десяткових та шістнадцяткових чисел

2-ва	*8-ва*	*2-ві тріади*	*10-ва*	*16-ва*	*2-ві тетради*
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
10	2	010	2	2	0010
11	3	011	3	3	0011
100	4	100	4	4	0100
101	5	101	5	5	0101
110	6	110	6	6	0110
111	7	111	7	7	0111
1000	10	001 000	8	8	1000
1001	11	001 001	9	9	1001
1010	12	001 010	10	A	1010
1011	13	001 011	11	B	1011
1100	14	001 100	12	C	1100
1101	15	001 101	13	D	1101
1110	16	001 110	14	E	1110
1111	17	001 111	15	F	1111
10000	20	010 000	16	10	0001 0000
…	…	…	…	…	…
100000	40	100 000	32	20	0010 0000
…	…	…	…	…	…
1000000	100	001 000 000	64	40	0100 0000
…	…	…	…	…	…
10000000	200	010 000 000	128	80	1000 0000
…	…	…	…	…	…
100000000	400	100 000 000	256	100	0001 0000 0000
…	…	…	…	…	…
1000000000	1000	001 000 000 000	512	200	0010 0000 0000
…	…	…	…	…	…
10000000000	2000	010 000 000 000	1024	400	0100 0000 0000
…	…	…	…	…	…
100000000000	4000	100 000 000 000	2048	800	1000 0000 0000
…	…	…	…	…	…
1000000000000	10000	001 000 000 000 000	4096	1000	0001 0000 0000 0000

Оскільки $2^3=8$, а $2^4=16$, то кожних три двійкових розряди зображення числа утворюють один вісімковий, а кожних чотири двійкових розряди – один шістнадцятковий (див. Таблицю 4). Тому для скорочення запису адрес та вмісту оперативної пам'яті комп'ютера використовують шістнадцяткову й вісімкову системи числення. Також двійкові тріади та тетради використовуються при взаємному перетворенні чисел у цих СЧ, що буде розглянуто нижче.

Слід також зауважити, що двійкові, вісімкові та шістнадцяткові числа не можна читати аналогічно десятковим. При формуванні їх назви слід послідовно називати цифри, що складають число.

Методика викладання недесяткових позиційних систем числення

У будь-якому курсі інформатики вищої школи першочергово йде ознайомлення з двійковою СЧ. Це базова СЧ, яка необхідна студентам для розуміння математичних основ роботи процесора та процесів, що відбуваються в сучасних цифрових пристроях. Далі студентів знайомлять із вісімковою і шістнадцятковою СЧ та подають правила перетворення чисел у вище згаданих системах, а також їх зв'язок із двійковою та десятковою системами. Матеріал щодо двійкової, вісімкової та шістнадцяткової СЧ часто подають з точки зору наявності певних законів, властивих даним системам, які студенти повинні засвоїти на рівні аксіом, і в подальшому виконувати арифметичні дії з відповідними числами та операції перетворення чисел між вище згаданими СЧ та десятковою. Тобто студентів вчать рахувати у двійковій, вісімковій та шістнадцятковій СЧ і виконувати арифметичні дії на рівні шкільної підготовки. Такий метод викладання має низьку ефективність, оскільки руйнуються стереотипи мислення, які формувалися у учнів роками роботи з десятковою СЧ. Це ускладнює засвоєння даного матеріалу і викликає труднощі щодо його розуміння.

Методика ознайомлення студентів із базовими позиційними СЧ

Перші чотири планети Сонячної системи – Меркурій, Венера, Земля та Марс.

Ми з вами живемо на планеті Земля і користуємося десятковою СЧ. Вона виникла, мабуть, у зв'язку з використанням у якості обчислювального інструменту десяти пальців рук людини. А зараз спробуємо познайомитися з іншими СЧ. Давайте пофантазуємо…

Нехай на Венері живуть істоти, у яких на кожній руці по чотири пальці. У процесі еволюції їх арифметичного апарату вони, швидше за все, вмітимуть рахувати до восьми, тобто використовуватимуть вісімкову СЧ. Звичайно ж, що знаки, які вони використовуватимуть для запису цифр, не співпадатимуть із звичними нам знаками – десятковими цифрами. Для більш зручного сприйняття замінимо їх зрозумілими для нас знаками, тобто використаємо перші 8 десяткових цифр.

Таблиця 5. Знаки для запису цифр Венеріанців

Знаки цифр Венеріанців	ס	ףּ	פּ	צּ	קּ	רּ	שּ	תּ
Знаки, зрозумілі для нас	0	1	2	3	4	5	6	7

Примітка. *При викладенні даного матеріалу, викладач може використати у якості знаків Венеріанців дзеркальне по горизонталі (0 1 2 3 4 5 6 7) відображення десяткових знаків. Це не потребує від викладача вміння* рисувати складні знаки, наведені в таблиці.

На Марсі можуть жити істоти, які на кожній руці мають по вісім пальців. Система числення Марсіан буде різнитися від нашої, десяткової. Вони використовуватимуть 16 різних цифр, тобто, використовуватимуть 16-ву СЧ. Так само, як і істоти Венери, знаки, які вони використовуватимуть для запису цифр та побудови з них чисел, будуть відрізнятися від зрозумілих нам, десяткових цифр. Але для зручності сприйняття ми можемо використати наступний прийом: до десяткових цифр додати перші 6 літер латинського алфавіту (принаймні ці знаки для нас є більш зрозумілими, ніж інопланетні символи).

Таблиця 6. Знаки для запису цифр Марсіан

Знаки цифр Марсіан	0	─	│	┌	┐	└	┘	├	┤	┬	┴	┼	═	‖	╒	╓
Знаки, зрозумілі для нас	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

Примітка. *При викладенні даного матеріалу, викладач може використати у якості знаків Марсіан дзеркальне по вертикалі (0 ⇂ Ƨ Ɛ ᔭ ટ ɘ ⅂ 8 ∂ ∀ B C D E Ⅎ) відображення десяткових знаків та латинських літер чи 16 букв українського алфавіту. Це не потребує від викладача вміння рисувати складні знаки, наведені в таблиці.*

І нарешті – Меркурій. Нехай істоти даної планети на кожній руці мають по одному пальцю. Їх СЧ буде містити всього дві цифри. До прикладу, меркуріанці для запису цифр використовуватимуть такі два знаки: ☺ ☻. Або замінимо їх на перші дві десяткові цифри: 0 і 1. Дану СЧ ще називають *бінарною* (з англ. «binary», двійковий).

Вище наведена методика викладання теми «Системи числення» була апробована на студентах ДВНЗ «УжНУ» та дала позитивні результати.

Арифметичні дії у різних системах числення

Наука, що вивчає дії над цілими числами, вчить розв'язувати задачі, які зводяться до додавання, віднімання, множення та ділення цих чисел називається *арифметикою*. Кожна СЧ має свої правила арифметики (таблицю додавання та множення). Арифметичні дії у різних системах числення здійснюються за таким самим принципом, як у десятковій, тобто по розрядах.

Арифметичні дії над десятковими числами проводяться за допомогою досить простих операцій, в основі яких лежать таблиці множення й додавання, а також правило переносу: якщо в результаті додавання двох цифр виходить число, яке більше або рівне за основу СЧ (у нашому випадку 10), то воно записується за допомогою декількох цифр, що перебувають на сусідніх позиціях. Вивчені ще в шкільному віці, ці правила в результаті повсякденної практики засвоюються настільки міцно, що ми оперуємо ними підсвідомо. Саме тому багато людей навіть не здогадується про існування інших систем числення.

Арифметичні операції у 2-й, 8-й, 16-й СЧ виконують ідентично 10-й системі, з врахуванням арифметики відповідної СЧ.

Таблиця 7. Додавання та множення двійкових цифр

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

*****	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Таблиця 8. Додавання та множення вісімкових цифр

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	13	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Таблиця 9. Додавання та множення десяткових цифр

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Таблиця 10. Додавання та множення шістнадцяткових цифр

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Правила виконання основних арифметичних операцій

Додавання та віднімання двійкових, вісімкових та шістнадцяткових чисел виконується аналогічно десятковим, з врахуванням наведених вище таблиць додавання, відповідно. Додаючи два багатозначних числа, застосовуємо правило додавання в стовпчик. При цьому все зводиться до додавання цифр, для яких необхідним є знання таблиці додавання у відповідній СЧ. При відніманні від меншого числа більшого, виконується позичання зі старшого розряду.

В основі множення та ділення лежить таблиця множення одноцифрових чисел.

Взагалі кажучи, за таким принципом арифметичні дії можна виконувати у будь-якій позиційній системі числення.

Перетворення чисел із однієї системи числення в іншу

Існує два основних способи перетворення (переведення) числа з однієї СЧ в іншу: *табличний* і *розрахунковий*. Табличний спосіб прямого перетворення базується на співставленні таблиць відповідності чисел різних СЧ. Цей спосіб занадто громіздкий, а в комп'ютерній техніці вимагає значного об'єму пам'яті для зберігання таблиць.

Розрахунковий спосіб перетворення чисел з однієї СЧ в іншу передбачає виконання певних арифметичних обчислень. Існує велика кількість способів перетворення чисел з однієї позиційної СЧ в іншу. Розглянемо найбільш популярні.

Перетворення 10-вого числа у недесяткову СЧ

А) Метод ділення (для цілої частини) та метод множення (для дробової частини)

Для перетворення чисел із позиційної системи числення з основою p в позиційну систему числення з основою q з використанням арифметики старої системи числення з основою p потрібно:

- для перетворення цілої частини: послідовно число, записане в системі з основою p ділити на основу нової системи числення q, виділяючи остачі. Ділення виконується, до тих пір, поки остання частка не стане меншою за дільник. Отримані остачі від ділення, взяті у зворотному порядку, будуть значеннями розрядів числа в новій СЧ. Остання частка дає старшу цифру числа;

- для перетворення дробової частини: послідовно дробову частину множити на основу нової системи числення, виділяючи цілі частини добутку. Отримані цілі частини добутків будуть цифрами дробу у новій системі числення. Цей процес продовжують до того часу, поки не буде знайдено число із заданою точністю (кінцевому дробу в іншій СЧ може відповідати нескінченний (іноді періодичний) дріб; у цьому випадку кількість знаків у поданні дробу в новій СЧ береться в залежності від потрібної точності).

Примітка. *Цим правилом зручно користуватися у разі перетворення з десяткової системи числення у будь-яку іншу, оскільки десяткова арифметика є для нас звична. У разі ж, якщо потрібно перетворити двійкове число у десяткову СЧ, нам необхідно ділити це число на основу нової СЧ, тобто на 1010_2 та ще й з використанням двійкової арифметики. Такі операції виконувати складно, тому для подібних перетворень використовують інші методи, які розглянуто нижче.*

Приклад:

Перетворимо число $25{,}25_{10}$ з десяткової СЧ у 2-ву:

Ціла частина (три методи):

1. 25:2=12+**1** – молодший розряд (перша цифра)
   12:2=6+**0**
   6:2=3+**0**
   3:2=**1**+**1**

2.

25_{10}	2_{10}
12	**1**
6	**0**
3	**0**
1	**1**
0	**1**

3.

25	2			
24	12	2		
1	12	6	2	
	0	6	3	2
		0	2	**1**
			1	

Примітка. *Тобто, число записуємо у зворотному порядку* – 11001 !

Дробова частина:

$0,25*2=\mathbf{0},50$

$0,50*2=\mathbf{1},00$

Відповідь: $25,25_{10}=11001,01_2$

Перетворимо число $25,25_{10}$ з десяткової СЧ у 8-ву.

Ціла частина	Дробова частина:
$25:8=\mathbf{3}+\mathbf{1}$	$0,25*8=\mathbf{2},00$

Відповідь: $25,25_{10}=31,2_8$

Перетворимо число $25,25_{10}$ з десяткової СЧ у 16-ву.

Ціла частина	Дробова частина:
$25:16=\mathbf{1}+\mathbf{9}$	$0,25*16=\mathbf{4},00$

Відповідь: $25,25_{10}=19,4_{16}$

Примітка. *У випадку, коли результат ділення на 16 дає десяткові числа від 10 до 15, їх слід замітити відповідними знаками 16-вої СЧ, тобто латинськими буквами A…F.*

Приклад. Перетворимо число 175_{10} з десяткової СЧ у 16-ву.

$175:16=\mathbf{10}+\mathbf{15}$

Відповідь: $175_{10}=AF_{16}$

Б) Метод віднімання (на прикладі переведення 10-го числа у 2-ве)

Даний метод застосовуємо для цілих чисел. З десяткового числа віднімається найбільша можлива степінь двійки, у відповідний розряд двійкового числа записується одиниця. Якщо різниця менше наступного степеня двійки, то далі записується нуль, а якщо більше – записується одиниця і знову проводиться віднімання, і так до того часу, поки вихідне число не зменшиться до нуля.

$25_{10}=2^4+9=2^4+2^3+1=2^4+2^3+2^0=11001_2$

$175_{10}=2^7+47=2^7+2^5+15=2^7+2^5+2^3+7=2^7+2^5+2^3+2^2+3=2^7+2^5+2^3+2^2+2^1+2^0=$
$=10101111_2$

Перетворення чисел із недесяткової СЧ у 10-ву

Спосіб 1. Для перетворення чисел із будь-якої системи числення в десяткову необхідно це число представити у вигляді полінома і розкрити всі члени полінома в десятковій системі числення. Іншими словами, слід перейти до розгорнутої форми запису числа в десятковій формі та обчислити отриманий вираз за правилами десяткової арифметики.

Приклади:

$31,2_8=(3*10^1+1*10^0+2*10^{-1})_8=(3*8^1+1*8^0+2*8^{-1})_{10}=(24+1+0,25)_{10}=25,25_{10}$

$AF_{16}=(A*10^1+F*10^0)_{16}=(10*16^1+15*16^0)_{10}=(160+15)_{10}=175_{10}$

Спосіб 2. Для перетворення числа у 10-ву СЧ за його розгорнутою формою запису існує зручний спосіб, який має назву *обчислювальна схема*

Горнера. Основна ідея даного методу полягає у перетворенні розгорнутого запису числа у еквівалентну форму з допомогою вкладених дужок.

$175_8=(1*8^2+7*8^1+5*8^0)_{10}=(1*8+7)*8+5$

$7575_{16}=(7*16^3+5*16^2+7*16^1+5*16^0)_{10}=((7*16+5)*16+7)*16+5$

Зручність дужкової структури полягає в тому, що обчислення проводиться шляхом виконання послідовного ланцюжка операцій множення і додавання в порядку їх запису зліва направо. Схема Горнера зводить обчислення таких виразів до виконання мінімальної кількості арифметичних операцій.

Спосіб 3. Для перетворення цілих чисел у 10-ву СЧ, слід послідовно множити початкове число X_{10} на основу нової СЧ q та, додавати отримане значення до цифри наступного розряду і т.д. у результативній СЧ. Аналогічна процедура виконується для дробових чисел починаючи з молодшої цифри, з заміною множення діленням.

Приклад. Перевести двійкове число 11001_2 у десяткову СЧ.

1*2=2+**1**

3*2=6+**0**

6*2=12+**0**

12*2=24+**1**

Відповідь: $11001_2=25_{10}$

Перетворення чисел із 2-вої у 8-ву та 16-ву СЧ і навпаки

Існує простий зв'язок між двійковою і вісімковою та між двійковою і шістнадцяткою СЧ, оскільки це є системи з кратною основою. Якщо основи СЧ кратні одна одній, тобто зв'язані залежністю $q=p^m$, то кожна цифра системи з основою q може бути представлена m цифрами в системі з основою p.

При перетворенні числа з однієї системи в іншу, одній вісімковій цифрі відповідає трирозрядний двійковий код (двійкова тріада), а шістнадцятковій цифрі відповідає чотирирозрядний двійковий код (двійкова тетрада) (див. Таблицю 4). Цей зв'язок базується на тому, що:

- $8=2^3$, а кількість різних трирозрядних комбінацій із цифр 0 і 1 рівна 8: від 000 до 111;
- $16=2^4$, а кількість різних чотирирозрядних комбінацій із цифр 0 і 1 дорівнює 16: від 0000 до 1111.

Тому перетворення чисел із 8-ї у 2-ву, із 16-вої у 2-ву і навпаки проводиться шляхом формального перекодування, яке сформулюємо у наступних правилах.

Правило 1. Перетворення 2-вого числа у 16-ву СЧ. Двійкове число розбиваємо на тетради (по 4 цифри), починаючи з молодших розрядів. Якщо кількість цифр вихідного двійкового числа не кратна 4, то воно доповнюється зліва незначущими нулями до досягнення кратності 4. Далі, кожна тетрада замінюється відповідною 16-вою цифрою згідно таблиці.

Правило 2. Перетворення 16-вого числа у 2-ву СЧ. Кожна 16-ва цифра вихідного числа заміняється двійковою тетрадою у відповідності до таблиці. Якщо у таблиці двійкове число містить менше 4 цифр, то воно доповнюється зліва незначущими нулями до тетради. Незначущі нулі у результуючому числі відкидаються.

Аналогічні правила можна сформулювати і для перетворення 2-вого числа у 8-ву СЧ та навпаки, врахувавши те, що вісімковій цифрі відповідає двійкова тріада, а не тетрада.

Використана література та інтернет-джерела

1. Фрінланд А.Я. Інформатика. - М., 2005.
2. Радюк Л. Алгоритм перекладу в двійкову і з двійкової системи числення. / / Наука і життя. 2005. № 1.
3. В.М. Чешун, Т.І. Чешун Подібність двійкової та десяткової систем числення в ознайомленні з основами електронно-обчислювальної техніки // Вісник Хмельницького національного університету. №4, 2009, с. 254-260.
4. http://informatika-lub.ucoz.ua/blog/metodika_vvedennja_ponjattja_sistemi _chislennja/2011-06-17-5
5. http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/5178/3/prohramy_ 2013_ Informatika. pdf
6. http://thedifference.ru/otlichie-cifry-ot-chisla/
7. http://uk.wikipedia.org/wiki/Індо-арабська_система_числення
8. http://uk.wikibooks.org/wiki/Системи_числення
9. http://genling.ru/books/item/f00/s00/z0000005/st010.shtml

Ю.Ю. Білак, Л.Я. Данько-Товтин

СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Методичні рекомендації
з базової теми дисципліни «Інформатика»

Мовне видання, коректура та верстка – авторські

Умовн. друк. арк. 1,3
Підписано до друку 09.11.2015 р.
Зам.№121
Формат 60х84/16

Редакційно-видавничий відділ ДВНЗ «УжНУ»
88015, м. Ужгород, вул. Заньковецької, 89
dep-editors@uzhnu.edu.ua