Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

К. В. Маринець

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина III

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Ужгород—2017

УДК 517.9 (075.8)

ББК В161.6я73–1

Навчальний посібник є довідниковим посібником з основ теорії стійкості для звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем рівнянь першого порядку, а також диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Розглянуто поняття стійкості розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, обґрунтовано основні критерії дослідження на стійкість, класифікацію особливих точок динамічних систем та їх фазові портрети. Для диференціальних рівнянь у частинних похідних викладено базові методи для їх інтегрування, а також спосіб відшукання розв'язку задачі Коші для лінійних та квазілінійних диференціальних рівнянь.

Посібник містить задачі для самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Тилищак О. А.

канд. фіз.–мат. наук, доц. Млавець Ю. Ю.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ "Ужгородський національний університет"від 23 лютого 2017 року, протокол №3.

Рекомендовано до друку Редакційно–видавничою радою ДВНЗ "Ужгородський національний університет"1 лютого 2017 року, протокол №1.

Розділ 1

Стійкість систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

1.1 Загальні поняття та означення теорії стійкості

Теорема 1.1. ***(про неперервну залежність розв'язку від початкових умов)*** *Нехай права частина диференціального рівняння*

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

в області визначення

$$D = \{|y - y_0| \leq b, |x - x_0| \leq a\} \tag{1.2}$$

задовольняє умовам:

1. $f(x, y) \in C(D)$;
   $|f(x, y)| \leq M$;

2. $f(x, y)$ *має обмежені частинні похідні по* y:

$$\exists N > 0, |f'_y| \leq N, \forall (x, y) \in D.$$

Тоді розв'язок $y(x, x_0, y_0)$, *який задовольняє рівняння (1.1) і початкові умови*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.3}$$

неперервно залежить від початкових умов (1.3), тобто, якщо виконуються умови 1)–2), то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |\tilde{y_0} - y_0| < \delta \ |y(x, x_0, \tilde{y_0}) - y(x, x_0, y_0)| < \varepsilon, \tag{1.4}$$

$$\forall x \in [t_t, t_0 + I], T = min\left(a; \frac{1}{N}; \frac{b}{M}\right).$$

Усі розв'язки можна розділити на 2 неперетинаючі класи:

- стійкі;
- нестійкі.

Означення 1.1. *Стійкою інтегральною кривою* називають таку інтегральну криву, що всі достатньо близькі до неї при $t = t_0$ інтегральні криві залишаються близькими до неї при всіх $t \geq 0$.

Відповідний їм розв'язок називається *стійким розв'язком.*

У протилежному випадку кажуть, що *розв'язок нестійкий.*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$x' = F(t, x), x, F \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Нехай $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ є розв'язком системи (1.5).

Означення 1.2. Розв'язок $\phi(t)$ системи (1.5) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \ \ \forall t \geq t_0 \ \ ||x(t_0) - \phi(t_0)|| < \delta \ \ ||x(t) - \psi(t)|| < \varepsilon, \tag{1.6}$$

Означення 1.3. Розв'язок $\phi(t)$ системи (1.5) називається *асимптотично стійким*, якщо

1. Він є стійким за Ляпуновим.
2. Має місце умова:
$$\lim_{m \to \infty} ||x(t) - \phi(t)|| = 0. \tag{1.7}$$

Дослідження на стійкість будь–якого розв'язку системи (1.5) можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку цієї системи.

Нехай
$$z(t) = x(t) - \phi(t) \tag{1.8}$$
— нова шукана функція. Підставимо її в (1.5):

$$z'(t) + \phi'(t) = F(t, z(t) + \phi(t));$$

$$z'(t) + F(t, \phi(t)) = F(t, z(t) + \phi(t));$$

$$z'(t) = F(t, z(t) + \phi(t)) - F(t, \phi(t)). \tag{1.9}$$

Дослідження на стійкість розв'язку $\phi(t)$ системи (1.5) можна замінити на дослідження стійкості тривіального розв'язку системи (1.9).

Отже, без обмеження загальності, будемо досліджувати на стійкість систему диференціальних рівнянь:

$$x' = F(t, x), \tag{1.10}$$

де $F(t, 0) = 0$.

Означення 1.4. *Тривіальний розв'язок* системи (1.10) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall t \geq t_0 ||x(t_0)|| < \delta ||x(t)|| < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Означення 1.5. *Тривіальний розв'язок* системи (1.10) називається *асимптотично стійким*, якщо

1. Він є стійким за Ляпуновим.
2. Виконується умова:
$$\lim_{m \to \infty} ||x(t)|| = 0. \tag{1.12}$$

1.2 Стійкість нелінійних систем диференціальних рівнянь

Розглянемо автономну диференціальну систему

$$x' = F(x), x, F \in \mathbb{R}^n, \tag{1.13}$$

таку, що

$$F(0) = 0, \tag{1.14}$$

тобто $x = 0$ є розв'язком даної системи.

Дослідити на асимтотичну стійкість нелінійну систему (1.13) можна шляхом її лінеаризації.

Відповідна лінійна модель з певною точністю може описувати поведінку нелінійної моделі.

Нехай

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array}\right)\Bigg|_{x=0}. \tag{1.15}$$

Інакше кажучи, розкладемо праву частину системи (1.13) у ряд Тейлора в околі т. $x = 0$:

$$x' = Ax + R(x), \tag{1.16}$$

де $R(x)$ містить тільки нелінійні члени розкладу в ряд Тейлора.

Теорема 1.2. *Якщо дійсні частини усіх власних значень матриці A системи* (1.16) *від'ємні, то тривіальний розв'язок нелінійної системи* (1.13) *є асимптотично стійким.*

Теорема 1.3. *Якщо серед власних значень матриці A системи* (1.16) *є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то тривіальних розв'язок системи* (1.13) *нестійкий.*

Зауваження 1.1. Якщо серед власних значень матриці A системи (1.16) є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а решта мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок системи (1.13) може бути як стійким (асимптотично стійким), так і нестійким, тобто з факту стійкості або нестійкості системи першого наближення (1.16) не можна зробити висновок про стійкість (нестійкість) тривіального розв'язку системи (1.13). У цьому випадку, який називають *критичним*, дослідження на стійкість за першим наближенням неможливе й потрібно використовувати властивості наступних (нелінійних) членів розкладу або інші методи.

Розглянемо тепер таку автономну систему диференціальних рівнянь

$$x' = f(x), x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

розв'язком якої є значення $x = x_0$, тобто

$$f(x_0) \equiv 0. \tag{1.18}$$

Потрібно дослідити поведінку розв'язків (фазових кривих) в околі положення рівноваги.

З цією метою необхідно замінити нелінійну систему (1.17) деякою лінійною системою, яка є достатньо близькою до заданої в околі положення рівноваги (точки $x = x_0$).

З цією метою лінеаризуємо нелінійну систему в околі положення рівноваги:

$$f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + R(x - x_0), \tag{1.19}$$

де R містить степені $(x - x_0)$ від 2–го порядку і вище.

З урахуванням (1.19) система диференціальних рівнянь (1.17) перепишеться у вигляді:

$$x' = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + R(x - x_0). \tag{1.20}$$

Система (1.20) є лінеаризованою в околі точки $x = x_0$ системою, яка відповідає автономній диференціальній системі (1.17).

Позначимо через

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \tag{1.21}$$

якобіан функції f.

Тоді отримаємо, що дослідження на стійкість положення рівноваги системи (1.17) зводиться до дослідження на стійкість тривіального розв'язку системи

$$x' = Ax. \tag{1.22}$$

Теорема 1.4. *Якщо дійсні частини усіх власних значень матриці A вигляду* (1.21) *від'ємні, то положення рівноваги $x = x_0$ асимптотично стійке; якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то положення рівноваги $x = x_0$ нестійке.*

Розглянемо нелінійну автономну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \tag{1.23}$$

Означення 1.6. *Особливою точкою* системи (1.23) будемо називати точку (x_0, y_0) таку, що

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Для того, щоб дослідити фазові криві системи (1.23) потрібно:

1. Знайти положення рівноваги системи.

2. Лінеаризувати систему в околі цих положень рівноваги.

3. Дослідити тип положень рівноваги.

Лінеаризацією для заданої нелінійної автономної системи (1.23) в околі положення рівноваги (x_0, y_0) є система:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0). \end{cases} \tag{1.25}$$

Представимо систему диференціальних рівнянь (1.25) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}. \tag{1.27}$$

Дослідження положення рівноваги (x_0, y_0) системи (1.26) еквівалентно дослідженню положення рівноваги $(0, 0)$ системи:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{1.28}$$

де $u = x - x_0$, $v = y - y_0$.

Теорема 1.5. *Положення рівноваги (x_0, y_0) нелінійної диференціальної системи (1.23) є:*

1. Асимптотично стійким, якщо дійсні частини власних значень матриці A вигляду (1.27) від'ємні.

2. Нестійким, якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці A додатня.

3. Якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці A дорівнює нулеві, то дослідження на стійкість за першим наближенням є неможливим. Потрібне застосування додаткових критеріїв.

Приклад 1.1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - ln(1+y) + sinx, \\ \frac{dy}{dt} = e^x + sin(x+y) - cos^2 y. \end{cases} \tag{1.29}$$

На основі (1.29) побудуємо систему першого наближення вигляду (1.25). Одержимо:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2+cosx)|_{(0,0)}x - \frac{1}{1+y}\left.\right|_{(0,0)}y\ , \\ \frac{dy}{dt} = (e^x + cos(x+y))|_{(0,0)}x + (cos(x+y) + 2sin2y)|_{(0,0)}y. \end{cases}$$

Таким чином, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

матрицею якої є

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i.$$

Оскільки $Re(\lambda_{1,2}) = 2 > 0$, нульовий розв'язок системи (1.29) є нестійким.

1.3 Критерій Рауса–Гурвіца

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$x' = Ax, \tag{1.30}$$

де $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Поряд з системою (1.30) розглянемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{1.31}$$

На основі коефіцієнтів a_i рівняння (1.31) побудуємо *матрицю Гурвіца* вигляду:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

Теорема 1.6. ***(критерій Рауса–Гурвіца)*** *Дійсні частини всіх власних значень від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатніми є всі головні мінори матриці Гурвіца* (1.32)*:*

$$\Delta_1 = a_1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\ldots$$

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0.$$

Приклад 1.2. Дослідити на стійкість розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' - 8y' + 5y = 0. \tag{1.33}$$

Використаємо критерій Рауса–Гурвіца. Для цього побудуємо матрицю Гурвіца:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

та обчислимо її головні мінори:

$$\Delta_1 = |2| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} = -84 < 0,$$

а це означає, що розв'язок рівняння (1.33) не є асимптотично стійким. Для визначення стійкості чи нестійкості розв'язку потрібно застосувати додаткові критерії.

1.4 Положення рівноваги динамічних систем

Розглянемо динамічну диференціальну систему:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.34}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — невироджена матриця з дійсними сталими компонентами.

Системі (1.34) відповідає одне рівняння з дробово–лінійною правою частиною

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{1.35}$$

Означення 1.7. *Особливою точкою* системи диференціальних рівнянь (1.34) будемо називати точку (x_0, y_0), яка є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ a_{11}x + a_{12}y = 0, a_{21}x + a_{22}y = 0. \right. \tag{1.36}$$

Оскільки система (1.36) є лінійною однорідною диференціальною системою, а її детермінант відмінний від нуля, то особливою точкою системи (1.34) буде $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Позначимо через λ_1, λ_2 корені характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Розглянемо можливі випадки:

I. Нехай λ_1, λ_2 дійсні, різні та $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Тип особливої точки — ***вузол.***

1. Якщо $\lambda_1 > 0$ та $\lambda_2 > 0$, то *вузол є нестійким* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

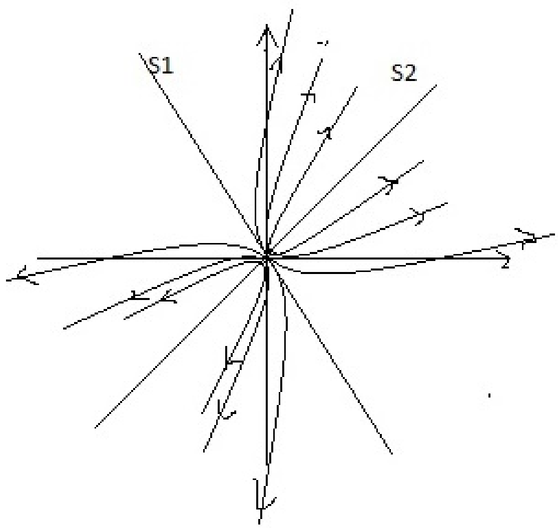

Рис. 1.1:

2. Якщо $\lambda_1 < 0$ та $\lambda_2 < 0$, то *вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

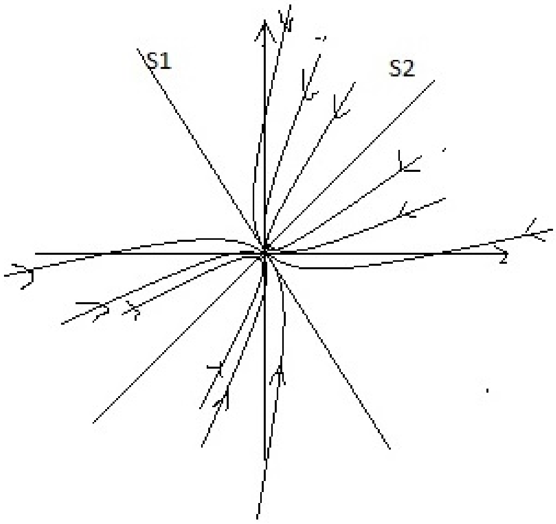

Рис. 1.2:

Напрямні S_1 та S_2 шукаємо у вигляді $y = kx$, де кутовий коефіцієнт k обчислюється підстановкою значення y у рівняння (1.35).

II. Нехай λ_1, λ_2 дійсні, різні та $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Тип особливої точки — ***сідло.*** Оскільки одне з власних значень завжди додатне, то *сідло нестійке.*

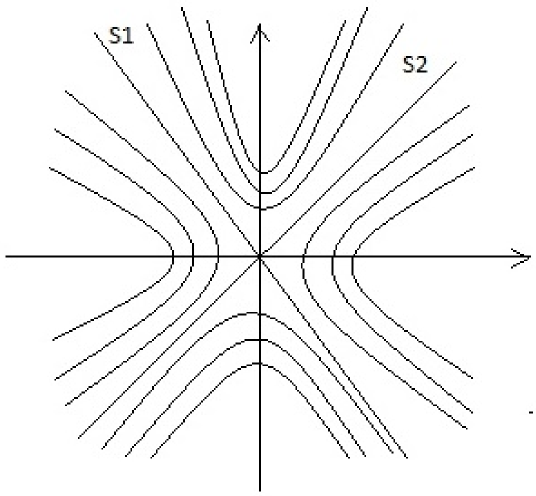

Рис. 1.3:

III. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Тип особливої точки — ***вироджений вузол.***

1. Якщо $\lambda > 0$, то *вироджений вузол нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

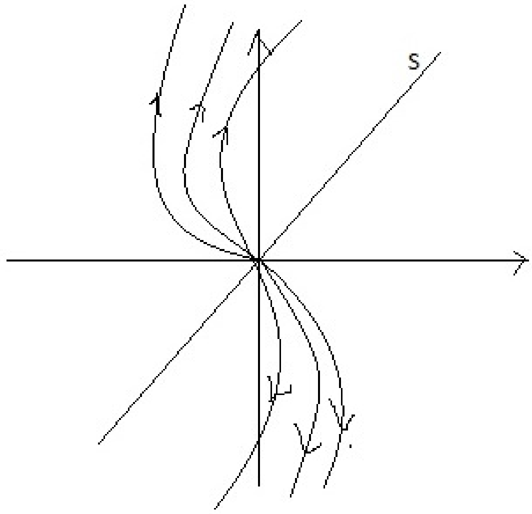

Рис. 1.4:

2. Якщо $\lambda < 0$, то *вироджений вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

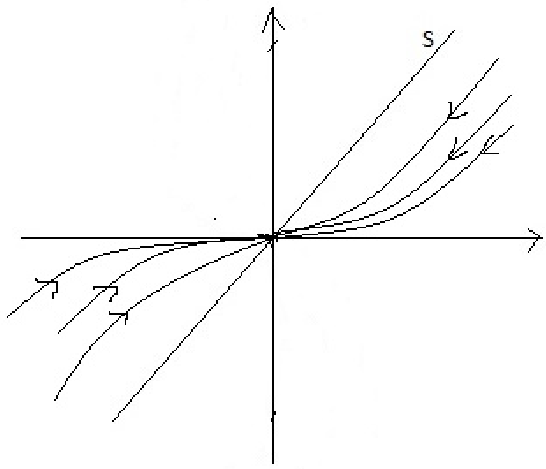

Рис. 1.5:

IV. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ і система диференціальних рівнянь (1.34) має вигляд:

$$\begin{cases} x' = ax, \\ y' = ay. \end{cases}$$

Тип особливої точки ***дикритичний вузол.***

1. Якщо $\lambda > 0$, то *дикритичний вузол нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

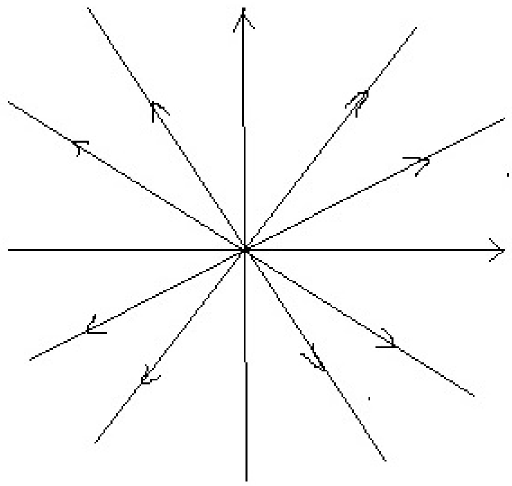

Рис. 1.6:

2. Якщо $\lambda < 0$, то *дикритичний вузол є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

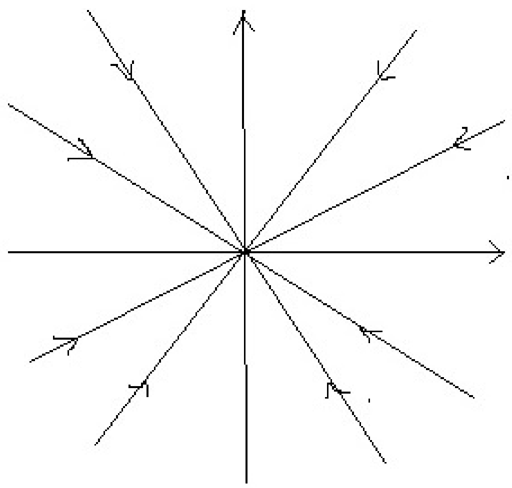

Рис. 1.7:

V. Нехай $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Тип особливої точки — ***пряма положень рівноваги.***

1. Якщо $\lambda_2 > 0$, то *пряма положень рівноваги нестійка* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

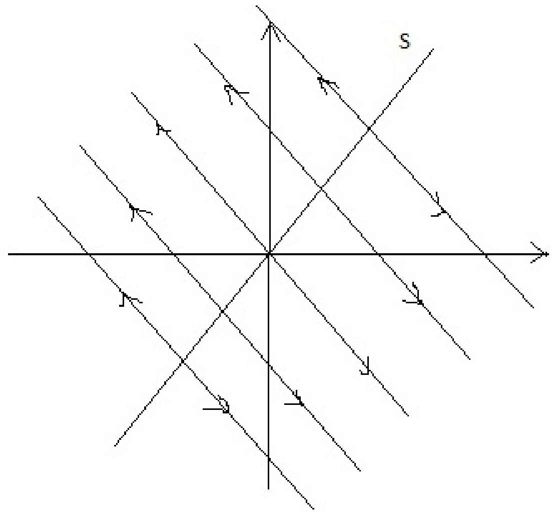

Рис. 1.8:

2. Якщо $\lambda_2 < 0$, то *пряма положень рівноваги є асимптотично стійкою* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

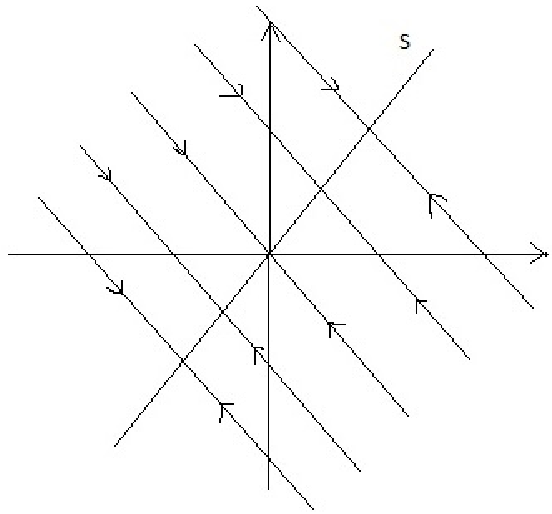

Рис. 1.9:

VI. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тип особливої точки — ***прямі положень рівноваги.*** Прямі положень рівноваги *стійкі.*

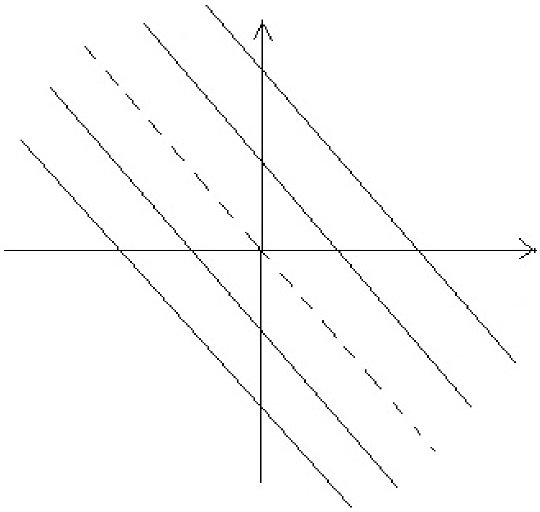

Рис. 1.10:

VII. Нехай $\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$. Тип особливої точки — ***центр.*** Центр завжди стійкий.

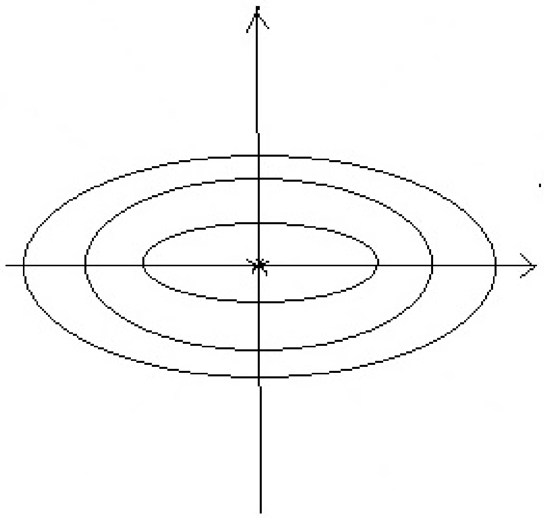

Рис. 1.11:

Для відшукання напрямної S досліджуємо на екстремум функцію:

$$f(x, y) := x^2 + y^2 \to extr;$$

$$f' = 2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 2x(a_{11}x + a_{12}y) + 2y(a_{21}x + a_{22}y) = 0.$$

VIII. Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$. Тип особливої точки — ***фокус.***

1. Якщо $Re(\lambda_1) = \alpha > 0$, то *фокус нестійкий* і рух по фазовим кривим іде від початку координат на ∞.

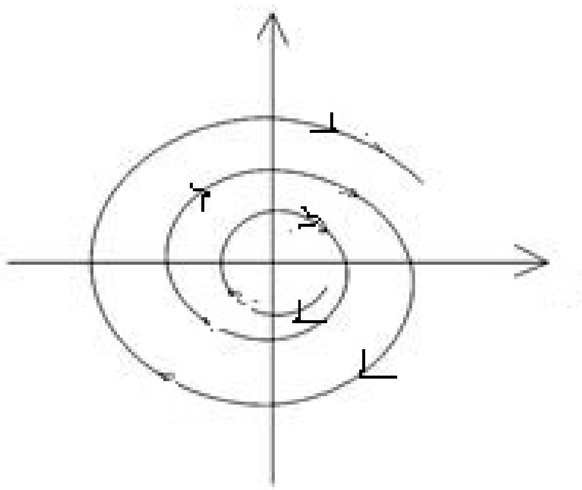

Рис. 1.12:

2. Якщо $Re(\lambda_1) = \alpha < 0$, то *фокус є асимптотично стійким* і рух по фазовим кривим іде від ∞ до початку координат.

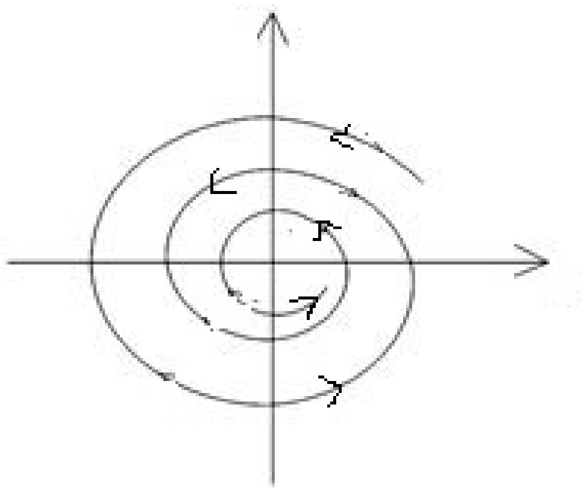

Рис. 1.13:

Приклад 1.3. Визначити тип положення рівноваги та побудувати його фазовий портрет:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases} \tag{1.37}$$

Особливою точкою заданої системи є точка $(0, 0)$. Визначимо її тип.

Знайдемо власні значення матриці заданої системи:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda. \end{vmatrix} = 0.$$

Отримаємо рівняння:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

розв'язками якого є

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Таким чином, тип особливої точки вузол, причому він нестійкий.

Для його побудови потрібно 2 напрямні. Кожну з них шукаємо у вигляді:

$$S : y = kx.$$

Перейдемо від системи (1.37) до диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{x}$$

та підставимо значення

$$y = kx, y' = k.$$

Одержимо:

$$k = \frac{x + 2kx}{x} \Rightarrow k = 1 + 2k,$$
$$k = -1.$$

Отже, рівняння напрямної є таким:

$$S_1 : y = -x.$$

Другою напрямною буде

$$S_2 : x = 0.$$

При цьому фазовий портрет особливої точки буде наступним:

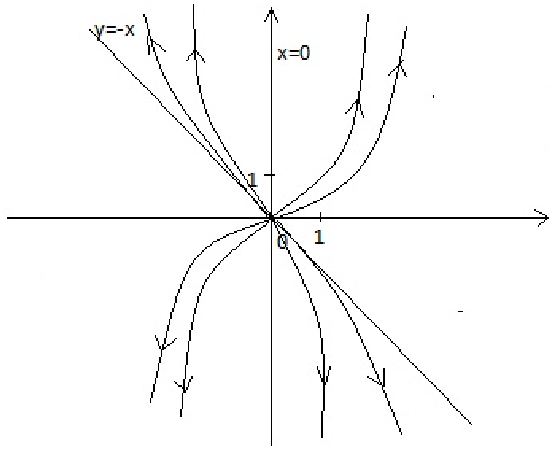

Рис. 1.14:

Завдання для індивідуальної роботи №7

Варіант 1

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' + y'' + y' + 2y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y - x}{3x + 6}.$$

Варіант 2

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 3

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 4

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - cos3x, \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 5

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = x + ay + y^2, \\ y' = bx - 3y - x^2. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 6

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(4y + e^{-3x}), \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Варіант 7

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = y + sinx, \\ y' = ax + by. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = ln(1 - x - x^2) - ln3. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(3e^y - 2cosx), \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln(2 - y^2), \\ y' = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ y' = ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{4y - 2x}{x + y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = (2x - y)(x - 2), \\ y' = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = tg(y - x), \\ y' = 2^y - 2cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий

розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ y' = arctg(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 11

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ln(e + ax) - e^y, \\ y' = bx + tgy. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln\frac{y^2-y+1}{3}, \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Варіант 13

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln(1 - y + y^2), \\ y' = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -6x - 5y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2, \\ y' = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - cos3x, \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y - x}{3x + 6}.$$

Варіант 16

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = x + ay + y^2, \\ y' = bx - 3y - x^2. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$

Варіант 17

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(4y + e^{-3x}), \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^V + 2y^{IV} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = y - x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 18

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = y + sinx, \\ y' = ax + by. \end{cases}$$

2. При яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4y - 6x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}.$$

Варіант 19

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ln(3e^y - 2cosx), \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y}. \end{cases}$$

2. При яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$y''' + 3y'' + ay' + by = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 2y - 4x. \end{cases}$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Варіант 20

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}, \\ y' = ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$$

2. При яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}.$$

Варіант 21

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = tg(y - x), \\ y' = 2^y - 2cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

2. При яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$ay^{IV} + y''' + y'' + y' + by = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = ln(1 - x - x^2) - ln3. \end{cases}$$

Варіант 22

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ln(e + ax) - e^y, \\ y' = bx + tgy. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = ln(2 - y^2), \\ y' = e^x - e^y. \end{cases}$$

Варіант 23

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий

розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = (2x - y)(x - 2), \\ y' = xy - 2. \end{cases}$$

Варіант 24

1. Дослідити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок асимптотично стійкий:

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x + 4y}{2x + 3y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ y' = arctg(x^2 + xy). \end{cases}$$

Варіант 25

1. Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = ax + y + x^2, \\ y' = x + ay + y^2. \end{cases}$$

2. За допомогою критерію Рауса–Гурвіца дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння:

$$y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0.$$

3. Визначити тип особливої точки та побудувати її фазовий портрет:

$$y' = \frac{x - 2y}{3x - 4y}.$$

4. Знайти та дослідити особливі точки:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y, \\ y' = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$$

Розділ 2

Диференціальні рівняння у частинних похідних (ДРЧП)

2.1 Системи рівнянь у симетричній формі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (СДР):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

або еквівалентний їй запис

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X).$$

СДР (2.1) є системою диференціальних рівнянь n–го порядку у нормальному вигляді.

Сукупність функцій

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ x_2 = \phi_2(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ \dots \\ x_n = \phi_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \end{cases} \tag{2.2}$$

такі, що ϕ_i є неперервно диференційовними функціями в D і при підстановці їх у (2.1) перетворюють кожне з рівнянь системи на тотожність, називається *загальним розв'язком.*

Систему (2.2) можна розв'язати відносно довільних сталих c_i:

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ c_2 = \psi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \\ c_n = \psi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

Розглянемо систему функцій (2.3). Праві частини цієї системи не є то-

тожньо рівними константі, а перетворюються на константу тільки тоді, коли замість x_i підставити будь–який частинний розв'язок системи.

Таку систему функцій називають *загальним інтегралом* системи (2.1), а рівності

$$\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i, i = \overline{1, n} \tag{2.4}$$

називають *першими інтегралами системи.*

Функція $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *інтегралом системи (2.1)*, якщо вона перетворюється на сталу при заміні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на будь–який частинний розв'язок системи (2.1).

Рівність

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c, \tag{2.5}$$

де $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є інтегралом системи, називається *першим інтегралом системи.*

Загальним інтегралом системи (2.1) називається сукупність (2.3) з n незалежних перших інтегралів, яка є розв'язаною відносно $x_1, x_2, \ldots,\ x_n$, причому в результаті одержуємо загальний розв'язок 2.2) системи.

Перші інтеграли, які утворюють загальний інтеграл, є лінійно незалежними, якщо існує функція

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = const. \tag{2.6}$$

Диференціальна система n–го порядку має рівно n незалежних перших інтегралів.

Система вигляду

$$\frac{dy_1}{g_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{g_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \\ = \ldots = \frac{dy_{n+1}}{g_{n+1}(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} \tag{2.7}$$

називається *системою диференціальних рівнянь у симетричній формі порядку n.*

Покажемо, що будь–яку нормальну систему (2.1) можна звести до симетричної системи (2.7) і навпаки.

Із (2.1) одержимо:

$$\begin{cases} dt = \frac{dx_1}{F_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}, \\ dt = \frac{dx_2}{F_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}, \\ \ldots \\ dt = \frac{dx_n}{F_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}, \end{cases} \tag{2.8}$$

Як видно із одержаних рівностей, система (2.8) є еквівалентною диференціальній системі у симетричній формі вигляду:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \\ = \ldots = \frac{dx_n}{F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2.9}$$

Нехай функція $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є спільним знаменником функцій $F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$. Домножимо знаменники дробів у (2.9) на $\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \\ = \frac{dx_2}{\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \\ = \frac{dx_n}{\phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \tag{2.10}$$

У рівностях (2.10) зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases} y_1(t) = t, \\ y_2(t) = x_1(t), \\ \ldots \\ y_{n+1}(t) = x_n(t); \end{cases} \tag{2.11}$$

та

$$\begin{cases} g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ g_{n+1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \phi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.12}$$

Заміни (2.11), (2.12) зводять систему (2.10) до системи (2.7).

Зведемо тепер симетричну систему (2.7) до нормальної системи (2.1).

У симетричній СДР усі змінні є рівносильними. Без обмеження загальності припустимо, що $g_{n+1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ в області визначення системи (2.7). Тоді:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dy_{n+1}} = \frac{g_1(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}, \\ \frac{dy_2}{dy_{n+1}} = \frac{g_2(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}, \\ \ldots \\ \frac{dy_n}{dy_{n+1}} = \frac{g_n(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}. \end{cases} \tag{2.13}$$

У виразах (2.13) введемо заміну змінних:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t), \\ x_2(t) = y_2(t), \\ \ldots \\ t = y_{n+1}(t); \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{g_1(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}, \\ F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{g_2(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}, \\ \ldots \\ F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{g_n(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}{g_{n+1}(t,y_1,y_2,\ldots,y_n)}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Заміни змінних (2.14), (2.15) зводять симетричну СДР (2.7) до нормальної системи (2.1).

Інтегровною комбінацією будемо називати вираз вигляду:

$$\frac{dx_1}{\phi_1(x_1)} = \frac{dx_2}{\phi_2(x_2)}, \tag{2.16}$$

звідки

$$\int \frac{dx_1}{\phi_1(x_1)} - \int \frac{dx_2}{\phi_2(x_2)} = c. \tag{2.17}$$

Якщо знайти n незалежних інтегровних комбінацій симетричної системи, то тим самим ми знайдемо n незалежних перших інтегралів, тобто побудуємо загальний інтеграл СДР у симетричній формі.

Для відшукання інтегровної комбінації надалі використовуватимемо *пра-*

вило рівних дробів, яке задається рівністю:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n}{k_1b_1 + k_2b_2 + \ldots + k_nb_n}, \tag{2.18}$$

де $a_i, b_i, k_i = const, i = \overline{1, n}$.

Приклад 2.1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Виділимо в заданій системі 2 інтегровні комбінації. Першою буде:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz},$$

$$\begin{gathered} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow ln|x| = ln|y| + lnC_1, \\ x = C_1y, \\ C_1 = \frac{x}{y} \end{gathered} \tag{2.19}$$

— перший проміжний інтеграл.

Друга інтегровна комбінація є такою:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \tag{2.20}$$

Підставимо (2.19) у (2.20). Одержимо:

$$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-C_1y^2},$$

$$\begin{gathered} C_1ydy = -dz \Rightarrow C_2 = \frac{C_1y^2}{2} + z, \\ C_2 = \frac{xy}{2} + z. \end{gathered}$$

Таким чином, загальним розв'язком системи буде

$$\begin{cases} C_1 = \frac{x}{y}, \\ C_2 = \frac{xy}{2} + z. \end{cases}$$

2.2 Загальні поняття та означення теорії ДРЧП першого порядку

Означення 2.1. Рівняння вигляду

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{2.21}$$

де $U = U(x_1, \ldots, x_n)$ — невідома функція, $n \geq 2$, а

$$F = F\left(x_1, \ldots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$$

— відома функція, визначена в деякій області $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, називається *нелінійним диференціальним рівняння з частинними похідними першого порядку.*

Означення 2.2. Диференціальне рівняння вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, U)\frac{\partial U}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, U), \tag{2.22}$$

де $U = U(x_1, \ldots, x_n)$ — невідома функція, $n \geq 2$, $a_i(x_1, \ldots, x_n, U)$, $i = \overline{1, n}$ та $b(x_1, \ldots, x_n, U)$ — задані функції, визначені в деяких областях $D_j \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $j = \overline{1, n+1}$, називається *квазілінійним диференціальним рівняння з частинними похідними першого порядку.*

Означення 2.3. Якщо у рівнянні (2.22) коефіцієнти a_i не залежать від U, тобто $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, то рівняння називається *напівлінійним* і має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_i} = b(x_1, \ldots, x_n, U). \tag{2.23}$$

Означення 2.4. Якщо у рівнянні (2.23) функція b є лінійною щодо U, то рівняння називається *лінійним* і має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_i} = c(x_1, \ldots, x_n)U + d(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.24}$$

Означення 2.5. Рівняння вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \tag{2.25}$$

називається *лінійним однорідним рівнянням із частинними похідними першого порядку.*

Означення 2.6. Функцію U називають *розв'язком рівняння* (2.21) *в області* $D \subset \mathbb{R}^n$, якщо виконуються умови:

1. $U \in C^1 D$.

2. $\left(x_1, \ldots, x_n, U(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial U(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}\right)$ належить області визначення функції F для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

3. Функція U перетворює рівняння (2.21) на тотожність

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, U(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) \equiv 0,$$

для всіх $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Означення 2.7. Якщо U — розв'язок рівняння (2.21), то поверхня $U = U(x_1, \ldots, x_n)$ у просторі змінних $x_1, \ldots, x_n, U$ називається *інтегральною поверхнею рівняння* (2.21).

2.3 Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння (2.25). Згідно з умовою (2.22) функції a_i не дорівнюють нулю одночасно в області $G \subset \mathbb{R}^n$ і є неперервними в G.

Теорема 2.1. *Нехай $a_i \in C^1(G)$, $i = \overline{1, n}$. Для того, щоб функція U була розв'язком рівняння (2.25), необхідно й достатньо, щоб вона була першим інтегралом системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{2.26}$$

Означення 2.8. *Задачею Коші для диференціального рівняння* (2.25) будемо називати задачу: серед усіх розв'язків рівняння (2.25) знайти такий розв'язок $U = U(x_1, \dots, x_n)$, який задовольняє умову:

$$U(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \tag{2.27}$$

де φ — задана функція в області $G' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, причому $\varphi \in C^1(G')$. При цьому умову (2.27) називають *початковою умовою.*

Теорема 2.2. *Нехай $a_i \in C^1(G)$, $i = \overline{1, n}$ і $a_i\left(x_1^0, \dots, x_n^0\right) \neq 0$. Тоді існує розв'язок задачі Коші* (2.25), (2.27).

Приклад 2.2. Знайти розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}. \tag{2.28}$$

Запишемо систему характеристик, яка відповідає диференціальному рівнянню (2.29):

$$xdx = ydy = -\frac{y^2 du}{u}$$

та розв'яжемо її.

Перша інтегровна комбінація має вигляд:

$$xdx = ydy,$$

звідки

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1,$$

$$C_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

— перший проміжний інтеграл.

Друга інтегровна комбінація є такою:

$$ydy = -\frac{y^2 du}{u} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{du}{u},$$

$$ln|y| = -ln|u| + lnC_2,$$

$$C_2 = yu$$

— другий проміжний інтеграл симетричної системи.

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння (2.29) є функція:

$$\Phi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}; yu\right) = 0.$$

2.4 Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо диференціальне рівняння (2.23). Припустимо, що функції a_i, b визначені в області G, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 2.3. *Нехай коефіцієнти a_i, b неперервно диференційовні в G. Тоді множину всіх розв'язків рівняння* (2.23) *можна задати формулою*

$$\Phi\left(U_1(x_1, \ldots, x_n, U), \ldots, U_n(x_1, \ldots, x_n, U)\right) = 0, \tag{2.29}$$

де Φ — неперервно диференційовна функція, а $U_1(x_1, \ldots, x_n, U) = C_1$, ..., $U_n(x_1, \ldots, x_n, U) = C_n$ — незалежні перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n, U)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n, U)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n, U)}. \tag{2.30}$$

Теорема 2.4. *Нехай a_i, b — неперервно диференційовні в G і*

$$a_n(x_1^0, \ldots, x_n^0, U^0) \neq 0.$$

Тоді існує розв'язок задачі Коші (2.23), (2.27).

Завдання для індивідуальної роботи №8

1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь у симетричній формі
2. Записати множину розв'язків диференціального рівняння
3. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку
4. Знайти поверхню, яка задовольняє задане рівняння і проходить через задану криву.

Варіант 1

1. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$;
2. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
3. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1$;
4. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x$, $x = 0, z = y^2$.

Варіант 2

1. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$;
2. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;
3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$;
4. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$, $y = 1, z = x^2$.

Варіант 3

1. $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$;
2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
3. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y^2$ при $x = 1$;
4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$, $x = 2, z = y^2 + 1$.

Варіант 4

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$;

2. $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$;

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = 1$;

4. $tgx\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, $y = x, z = x^3$.

Варіант 5

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$;

2. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$;

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 0$.

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x-3y)$, $x = 1, yz + 1 = 0$.

Варіант 6

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$;

2. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0$;

3. $(x-2e^y)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $u(x,0) = x$;

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$, $y = -2, z = x - x^2$.

Варіант 7

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$;

2. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$;

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x,1,z) = xz$;

4. $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$, $x = a, y^2 + z^2 = a^2$.

Варіант 8

1. $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{x} = -\frac{dz}{y}$;

2. $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z$;

3. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x,0) = x^2$;

4. $z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$, $x + y = 2, yz = 1$.

Варіант 9

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$;

2. $(x^2 + y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$;

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u(1, y) = y + e^y$;

4. $z\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0$, $y = x^2, z = 2x$.

Варіант 10

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$;

2. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}$;

3. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x, x) = 1 + \frac{x}{3}$;

4. $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$, $z = y = -x$.

Варіант 11

1. $\frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$;

2. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$;

3. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1+y^4}$;

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$, $x + y = 2z, xz = 1$.

Варіант 12

1. $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{\text{!!!!}};$

2. $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z;$

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u(x,2) = 1 + x^2;$

4. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$, $x - y = 0, x - yz = 1.$

Варіант 13

1. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz};$

2. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy;$

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 4u$, $u(x,x,z) = z;$

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$, $y = 2z, x + 2y = z.$

Варіант 14

1. $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz};$

2. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz;$

3. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$ при $y = 1;$

4. $(y+2z^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$, $x = z, y = x^2.$

Варіант 15

1. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\frac{dy}{y(z^2+x^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)};$

2. $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z};$

3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0;$

4. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$, $x - y = 2, z + 2x = 1.$

Варіант 16

1. $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$;

2. $e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x$;

3. $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y^2$ при $x = 1$;

4. $xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z$, $x = -z^3, y = z^2$.

Варіант 17

1. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$;

2. $sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + tgz \frac{\partial z}{\partial y} = cos^2 z$;

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$ при $x = 1$;

4. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $y = x, z = x^2$.

Варіант 18

1. $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$;

2. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$;

3. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$ при $z = 0$;

4. $xy \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x = 1, z = 1 + y^2$.

Варіант 19

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$;

2. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$;

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u(x, 1, z) = xz$;

4. $\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 2x$, $y = 2x^2, z = x^2 + x$.

Варіант 20

1. $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$;

2. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$;

3. $xy\frac{\partial u}{\partial x} + x^2\frac{\partial u}{\partial y} = y$, $u(x,0) = x^2$;

4. $y\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz$, $x = 0, z = -y^2$.

Варіант 21

1. $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$;

2. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$;

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$, $u(1,y) = y + e^y$;

4. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + y$, $x = 3y^2, z = 4y^3$.

Варіант 22

1. $\frac{dx}{x^2-y^2} = \frac{dy}{x} = -\frac{dz}{y}$;

2. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x + y$;

3. $x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$, $u(x,x) = 1 + \frac{x}{3}$;

4. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 z$, $x = 2y, z = e^{\frac{y^2}{2}}$.

Варіант 23

1. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$;

2. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

3. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u|_{xy=1} = \frac{y^2}{1+y^4}$;

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = z + 2x^2$, $y = \frac{1}{4} - x^2, z = x$.

Варіант 24

1. $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$;

2. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$;

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u - xy$, $u(x,2) = 1 + x^2$;

4. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $y = x + 1, z = x + y$.

Варіант 25

1. $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$;

2. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz$;

3. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = y$ при $x = 0$;

4. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^3z$, $x = -z^3, y = z^2$.

Список рекомендованої літератури

1. *Городецький Ю. Д.* Диференціальні рівняння/ Городецький Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк В. М.—Л.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011.— 470 с.
2. *Кривошея С. А.* Диференціальні та інтегральні рівняння/ Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М.—- К.: Либідь, 2004.—408 с.
3. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння/ Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003.-600с.
4. *Н. М. Матвеев.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.:Высшая школа,1967. — 564 с.
5. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.—703 с.
6. *В. Степанов.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гос. издательство технико–теоретической литературы, 1950. — 473 с.
7. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах/ Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О..:К.—Вища школа, 1994.—454 с.
8. А. Ф. Филипов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, 2000.—174 с.

Зміст

Стор.

Відповідальний за випуск:
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
доктор фіз.–мат. наук, проф. Маринець В. В.

Автор: кандидат фіз.–мат. наук, Маринець К. В.

Рецензенти: канд. фіз.–мат. наук, доц. Тилищак О. А.

канд. фіз.–мат. наук, доц. Млавець Ю. Ю.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина III

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ