# КВАЗІКЛАСИЧНІ СПЕКТРИ СОЛІТОНІВ КОНТИНУАЛЬНОГО ТА ДИСКРЕТНОГО МОДИФІКОВАНИХ РІВНЯНЬ КОРТЕВЕГА - ДЕ ФРІЗА

**М.М. Богдан, Д.В. Лаптєв**

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б.І. Вєркіна НАН України, пр. Леніна, 47, Харків, 61103
e-mail: laptev.denis@mail.ru

В межах точно інтегровних континуального та дискретного модифікованих рівнянь Кортевега – де Фріза та рівняння решітки Хіроти досліджено гамільтонову динаміку кінків і бризерів. Такі збудження відповідають ударним хвилям і самолокалізованим коливанням в моделі Фермі–Паста-Улама, яка описує ангармонічний одновимірний кристал. Знайдено залежності енергії від імпульсу для кінків та квазікласичні спектри енергії як для континуальних, так і дискретних бризерів.

## Вступ

Важливу роль в теорії нелінійних збуджень в кристалах відіграють точно інтегровні системи і такі, що близькі до інтегровних. Кількість інтегровних диференційно-різницевих рівнянь, за допомогою яких можна описати ангармонічні кристали, дуже обмежена. Найбільш відоме з них – це рівняння решітки Тоди [1]. Моделлю, близькою до інтегровної, є одновимірна решітка Фермі, Паста і Улама (ФПУ) [2], яка враховує слабку нелінійність у взаємодії найближчих сусідніх атомів гратки. У випадку, коли в розкладі потенційної енергії залишаються лише перші кубічні члени відносно різниці зміщень, така модель носить назву $\alpha$-решітки ФПУ. У випадку, коли першими у розкладі енергії є члени четвертого порядку, модель має назву $\beta$-решітка ФПУ. Відомо [2,3], що в разі довгохвильових збуджень відповідні рівняння для $\alpha$-решітки ФПУ зводяться послідовно спочатку до рівняння Бусінеска, а потім до рівняння Кортевега – де Фріза. Цей факт відображає близькість такої моделі ФПУ до інтегровної і пояснює її неергодичні властивості. У випадку $\beta$-решітки ФПУ в довгохвильовій границі рівняння зводиться до модифікованого рівняння Бусінеска, яке не є точно інтегрованим, але за певних умов може бути зведене до інтегровного модифікованого рівняння Кортевега - де Фріза (МКдФ) [2,3]. Останнє рівняння може бути безпосередньо узагальнено на дискретний випадок і тоді воно носить назву дискретного модифікованого рівняння Кортевега – де Фріза (ДМКдФ). Встановлення прямого зв'язку між дискретними рівняннями $\beta$-решітки ФПУ і ДМКдФ є досить нетривіальною процедурою, яка була вперше здійснена в роботі [4].

Обидва рівняння МКдФ, континуальне і дискретне, є повністю інтегровними. Зокрема, для них були знайдені точні багатосолітонні розв'язки і інтеграли руху як методом оберненої задачі розсіювання [5], так і прямим методом Хіроти [6,7]. У зв'язку з цим рівняння МКдФ і ДМКдФ знайшли широке застосування у фізиці конденсованого стану, перш за все, в динаміці кристалічної решітки, а також в гідродинаміці, електродинаміці тощо. Поряд з лінійними збудженнями в системах, що описуються цими рівняннями, можуть розповсюджуватись нелінійні збудження з надзвуковою швидкістю, так звані солітони-кінки, які відповідають ударним хвилям. Крім того, було встановлено, що в таких системах можуть існувати зв'язані динамічні стани солітон-антисолітонних пар, так звані бризери [3]. Слід зазначити, що точні розв'язки для бризерів в суцільних середовищах були знайдені досить давно, в той час як для дискретних моделей донедавна єдиним відомим прикладом збудження такого типу залишався солітон – точний розв'язок комплексного рівняння Абловіца-Ладіка [8]. Останнє рівняння інтенсивно використовується як у нелінійній оптиці, так і в теорії магнетизму [9].

Динамічні властивості кінків і бризерів дозволяють розглядати їх як частинкоподібні збудження. Це стає можливим у тому випадку, коли для їхніх колективних координат можна вивести рівняння Гамільтона. Така проблема була неодноразово розв'язана в межах континуальних моделей, але є складною для дискретних систем. Гамільтонова динаміка для солітона рівняння Абловіца-Ладіка була розглянута А.М. Косевичем [9] і ним вперше було одержано квазікласичний спектр енергій для такого дискретного динамічного збудження. В 2002 р. одним з авторів [10] були знайдені точні багатобризерні розв'язки дискретного рівняння МКдФ і еквівалентного йому нелінійного рівняння решітки Хіроти, що дає принципову можливість отримати в явному вигляді динамічні характеристики для всіх солітонних збуджень [11] і описувати процеси їх взаємодії.

Метою даної роботи є одержання рівнянь Гамільтона для кінків і бризерів у межах континуального та дискретного модифікованих рівнянь Кортевега – де Фріза і рівняння решітки Хіроти. Для всіх солітонних хвиль знаходяться основні фізичні інтеграли руху і явні вирази для адіабатичних інваріантів як у випадку континуальних, так і дискретних бризерів. Це дозволяє розрахувати спектри збуджень для кінків і квазікласичні спектри енергій бризерних самолокалізованих коливань.

## Солітонні розв'язки рівнянь МКдФ і решітки Хіроти

Перш за все, сформулюємо основні перераховані вище рівняння, їх точні солітонні розв'язки і інтеграли руху. Лагранжіан для $\beta$-решітки ФПУ має вигляд [2,3]:

$$L=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{du_n}{dt}\right)^2-\frac{\lambda}{2}(u_{n+1}-u_n)^2-\frac{\beta}{4}(u_{n+1}-u_n)^4\right\}, \quad (1)$$

де $m$ є маса атому в гратці, $u_n$ – його зміщення на вузлі з номером $n$, параметри $\lambda$ і $\beta$ є константами в розкладі потенційної енергії кристалу. Рівняння руху атомів, які випливають з лагранжіану (1), можуть бути переписані у такому безрозмірному вигляді:

$$\frac{d^2v_n}{dt^2}+2v_n-v_{n+1}-v_{n-1}+\frac{1}{6}\left\{(v_n-v_{n+1})^3-(v_{n-1}-v_n)^3\right\}=0. \quad (2)$$

У довгохвильовому випадку рівняння (2) трансформується у модифіковане рівняння Бусінеска [2,3]. Останнє, шляхом введення повільної часової змінної і переходу в систему відліку, що рухається зі швидкістю звуку, зводиться до такого рівняння:

$$\phi_{tx}+6(\phi_x)^2\phi_{xx}+\phi_{xxxx}=0. \quad (3)$$

Після введення змінної $w=\partial\phi/\partial x\equiv\phi_x$, що описує розподіл деформації в одновимірному кристалі, рівняння (3) стає стандартним рівнянням МКдФ. Воно може бути виведене з такої функції Лагранжа [12]:

$$L=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\phi_t\phi_x+(\phi_x)^4-(\phi_{xx})^2\right\}dx. \quad (4)$$

В роботі [6] Р.Хірота знайшов багатосолітонні розв'язки континуального рівняння (3), що дозволяє отримувати явні вирази як для кінків, так і для бризерів. Зокрема, поодинокі кінк і бризер мають такий вигляд:

$$\phi_K = 2\mathrm{arctg}\left[\exp K(x - Vt)\right],\ V = K^2, \quad (5)$$

$$\phi_b = 2\mathrm{arctg}\left[\frac{\kappa}{k}\frac{\cos(kx - \omega t)}{\mathrm{ch}\kappa(x - Vt)}\right],$$

$$\omega = 3k\kappa^2 - k^3,\ V = \kappa^2 - 3k^2. \quad (6)$$

Кінк (5) характеризуються одним незалежним параметром, наприклад швидкістю $V$ поступального руху центра мас. Бризер – це двохпараметричне збудження, воно має дві ступені свободи – поступальну, яка відповідає руху бризера як цілого, і внутрішню коливальну ступінь свободи. Як два незалежні параметри, що характеризують бризер, можна вибрати швидкість центра мас $V$ і частоту внутрішніх коливань $\omega$.

Хірота і Сацума запропонували таку форму дискретного рівняння МКдФ [13]:

$$\frac{dw_n}{dt} = \left(1 + w_n^2\right)\left(w_{n-1/2} - w_{n+1/2}\right). \quad (7)$$

У довгохвильовому випадку воно зводиться до рівняння МКдФ для деформації $w(x,t)$:

$$w_t + w_x + w^2 w_x + \frac{1}{24}w_{xxx} = 0, \quad (8)$$

яке, після введення нових координат $\zeta = 2(x - t)$ і $\tau = t/3$, трансформується в стандартне рівняння МКдФ:

$$w_\tau + 6w^2 w_\zeta + w_{\zeta\zeta\zeta} = 0. \quad (9)$$

Зауважимо, що закон дисперсії лінійних хвиль рівняння (8) починається зі звукової ділянки:

$$\omega(k) = k\left(1 - \frac{1}{24}k^2\right), \quad (10)$$

в той час як спектри хвиль в рівняннях (3) і (9) описують тільки відхилення від звукової гілки.

Р.Хірота показав [7], що рівняння ДМКдФ (7) за допомогою співвідношень:

$$\frac{d\varphi_n}{dt} \equiv \dot{\varphi}_n = -w_n,\ \frac{d\psi_n}{dt} \equiv \dot{\psi}_n = -w_{n-1/2} \quad (11)$$

зводиться до самодуальної системи нелінійних рівнянь для функцій $\varphi_n$ і $\psi_n$, із яких можна одержати рівняння тільки для змінної $\varphi_n$:

$$\frac{\ddot{\varphi}_n}{1 + \dot{\varphi}_n^2} = \mathrm{tg}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) - \mathrm{tg}(\varphi_n - \varphi_{n+1}). \quad (12)$$

Це рівняння, яке описує модельну нелінійну одновимірну решітку, ми надалі називатимемо рівнянням решітки Хіроти. Воно може бути виведено із лагранжіану [11]:

$$L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\varphi_n \mathrm{arctg}(\dot{\varphi}_n) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \dot{\varphi}_n^2\right) + \frac{1}{2}\ln\cos^2(\varphi_n - \varphi_{n-1})\right\}. \quad (13)$$

Р.Хірота знайшов багатосолітонні розв’язки [6,7] рівнянь (7) і (12). Односолітонні розв’язки (кінки) мають відповідно такий вигляд:

$$\varphi_n^{(K)} = \mathrm{arctg}\left[\exp K(n - V_K t)\right],$$

$$w_n^{(K)} = \frac{\mathrm{sh}(K/2)}{\mathrm{ch}K(n - V_K t)},\ V_K = \frac{\mathrm{sh}(K/2)}{K/2}. \quad (14)$$

Як витікає з виразу (11), кінки – це ударні хвилі, що розповсюджуються в кристалі зі надзвуковою швидкістю $V > 1$.

Одним із авторів [10,11] було вперше показано, що у рівняння (12) існують точні багатобризерні розв’язки. Поодинокий дискретний бризер має вигляд

$$\varphi_n^{(b)} = \mathrm{arctg}\left[\frac{\mathrm{sh}(\kappa/2)}{\sin(k/2)}\frac{\cos(kn - \omega t - \phi_0)}{\mathrm{ch}(\kappa n - \Omega t - X_0)}\right], \quad (15)$$

$$\omega = 2\mathrm{ch}(\kappa/2)\sin(k/2),$$

$$\Omega = 2\mathrm{sh}(\kappa/2)\cos(k/2), \quad V = \frac{\Omega}{\kappa}, \quad (16)$$

де $V$ – швидкість бризера, $\phi_0$ і $X_0$ є довільними константами, які надалі ми покладемо рівними нулю. З формул (16) зрозуміло, що швидкість бризера $V$ може приймати будь-яке значення. Зокрема, при $k = \pi$ його швидкість дорівнює нулю. В цьому випадку вирази для нерухомого бризера та його параметрів приймають такий вигляд:

$$\varphi_n^{(b)} = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{sh}\frac{\kappa}{2}\frac{(-1)^n\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{ch}(\kappa n)}\right]. \quad (17)$$

$$\omega_0 = 2\mathrm{ch}\frac{\kappa}{2}, \;\; \Omega = V = 0. \qquad (18)$$

Таким чином, основними нелінійними збудженнями, динаміка яких визначається рівняннями ДМКдФ і решітки Хіроти, є надзвукові хвилі і самолокалізовані коливання – дискретні бризери. Область існування кінків і бризерів на площині параметрів $\omega' = \omega - kV$ і $V$ наведена на Рис.1. Зауважимо, що загальна формула для багатосолітонних розв'язків дозволяє проаналізувати і кількісно описати взаємодію довільного числа кінків і дискретних бризерів у цих точно інтегровних моделях.

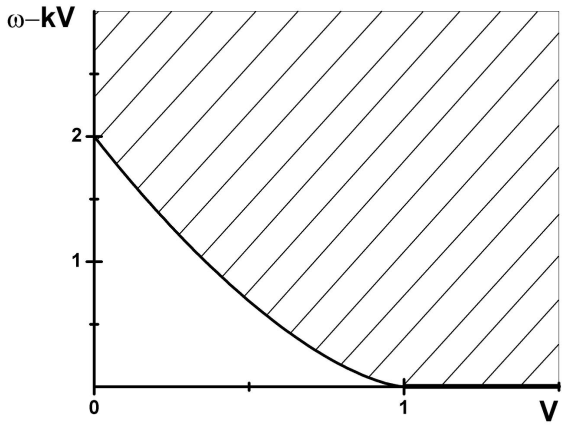


Рис.1 Область існування кінків і бризерів на площині параметрів $\omega' = \omega - kV$ і $V$. Крива між точками 1 і 2 відповідає лінійним хвилям суцільного спектра, горизонтальна лінія від точки 1 – дискретним кінкам, за-трихована область – дискретним бризерам.

## Інтеграли руху і гамільтонова динаміка солітонів у рівнянні МКдФ

Оскільки рівняння (3) є цілком інтегровним, воно має нескінченний набір інтегралів руху. Перші з них, енергія та польовий імпульс, є фізично важливими і можуть бути отримані безпосередньо з лагранжиану (4):

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left\{(\phi_x)^4 - (\phi_{xx})^2\right\}, \;\; P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx(\phi_x)^2. \qquad (19)$$

Крім того, солітони рівняння (3) характеризуються топологічним інваріантом:

$$M = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_x dx = \frac{1}{\pi}\left[\phi(x\to+\infty) - \phi(x\to-\infty)\right]. \qquad (20)$$

Кінки і антикінки мають протилежні топологічні заряди $M_{\pm} = \pm 1$. Ми розрахували інтеграли (19) і (20) для кінків:

$$E_K = \frac{1}{3}K^3, \;\; P_K = K, \; M_+ = 1. \qquad (21)$$

Кінку можна поставити у відповідність частинку із законом дисперсії $E(P)$. Користуючись виразами для енергії та польового імпульса кінка, отримуємо енергетичний спектр кінка:

$$E_K(P_K) = \frac{1}{3}P_K^3 . \qquad (22)$$

Із формул (5), (21) і (22) отримуємо рівняння Гамільтона, які описують рух кінка як частинкоподібного збудження в кристалі:

$$\dot{X}_K = \frac{\partial E_K}{\partial P_K} = V_K, \;\; \dot{P}_K = -\frac{\partial E_K}{\partial X_K} = 0, \qquad (23)$$

де як узагальнена координата $X_K$ береться координата центра мас кінка, а роль узагальненого імпульсу грає польовий імпульс. У відсутності зовнішніх полів повний імпульс кінка зберігається і рух солітона відбувається з постійною швидкістю. Рівняння (23) є основою для опису динаміки солітонів, як частинок, під дією повільно змінних зовнішніх полів [9].

Гамільтонова динаміка бризерів рівняння МКдФ може бути побудована в термінах колективних координат, які відповідають як поступальному руху збудження, так і внутрішній його динаміці. Бризер – це локалізоване в просторі нелінійне коливання, що може рухатися з довільною швидкістю. Як видно з формул (6), у випадку, коли амплітуда бризера наближається до нуля $(\kappa \to 0)$, він делокалізується і переходить у лінійну хвилю (фонон) з законом дисперсії $\omega(k) = -k^3$, яка рухається з груповою швидкістю $V = V_g = -3k^2$. Наявність нелінійності в рівнянні (3) означає врахування взаємодії між фононами, що веде до формування самолокалізованого коливання – бризера і на квантовому рівні відповідає появі локалізованого стану квазічастинок [3]. Рівняння МКдФ не має такого інтегралу руху, як  число квазічастинок, але відомо, що в квазікласичній границі число станів (середнє число елементарних збуджень) визначається за допомогою адіабатичного інваріанта:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2\pi} \oint p d\phi \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^T \phi_\xi \phi_t dt \right\}, \quad (24)$$

де змінна $\xi = x - Vt$ і період $T = 2\pi / \omega$. Оскільки коливання бризера є строго періодичними у системі відліку, що рухається зі швидкістю його центра мас, то саме в цій системі координат потрібно розраховувати адіабатичний інваріант. Знайдений таким чином остаточний вираз для нього має вигляд:

$$I = 2\mathrm{arctg}\frac{\kappa}{k}. \quad (25)$$

Згідно правила квантування Бора-Зомерфельда [14], розмірний адіабатичний інваріант з точністю до сталої Планка дорівнює великому цілому числу станів $\tilde{N}$. Але слід зауважити, що оскільки ми використовуємо безрозмірні змінні для запису адіабатичного інваріанта і надалі будемо вимірювати його в одиницях $\hbar$, то формула квантування для $I$ є такою:

$$I = N \equiv \gamma \tilde{N}, \quad (26)$$

де $\gamma = \hbar / \sqrt{m\lambda} a^2$ є малою величиною, а параметр $N$ відтепер не є цілим числом. З формул (25) і (26) знаходимо зв'язок між параметрами бризера і числом $N$:

$$\frac{\kappa}{k} = \mathrm{tg}\frac{N}{2}. \quad (27)$$

Для енергії, польового імпульса і топологічного інваріанта бризера маємо відповідно:

$$E_b = 2\kappa(\frac{1}{3}\kappa^2 - k^2), \quad P_b = 2\kappa, \quad M_b = 0. \quad (28)$$

Користуючись формулами (27) і (28), можна знайти квазікласичний енергетичний спектр бризера:

$$E_b(N, P_b) = \frac{P_b^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \mathrm{ctg}^2\left(\frac{N}{2}\right)\right]. \quad (29)$$

Зі співвідношення (29) витікають дві пари рівнянь Гамільтона для бризера, як частинкоподібного збудження:

$$\dot{X}_b = \frac{\partial E}{\partial P_b} = V, \quad \dot{P}_b = -\frac{\partial E}{\partial X_b} = 0, \quad (30)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial E}{\partial N} = \omega - kV, \quad \dot{N} = -\frac{\partial E}{\partial \Phi} = 0. \quad (31)$$

Перша пара відповідає поступальному руху, як і у випадку кінка, при цьому $X_b$ є координатою центра мас бризера. Роль узагальненого імпульса, спряженого координаті $X_b$, відіграє польовий імпульс $P_b$. Друга пара рівнянь Гамільтона відповідає коливальній ступені свободи. Роль узагальнених координати і спряженого узагальненого імпульсу відіграють фаза $\Phi$ і адіабатичний інваріант $I = N$. Відмітимо, що частинна похідна енергії по $N$ дорівнює частоті коливань у системі відліку, яка рухається з бризером.

Із виразів для енергій кінка (22) і бризера (29) видно, що вона менша за суму енергій двох відповідних однопараметричних солітонів:

$$E_b = 2E_K - \frac{P_b^3}{4}\mathrm{ctg}^2\left(\frac{N}{2}\right), \quad (32)$$

для яких польовий імпульс бризера є сумою імпульсів кінка і антикінка. Це дозволяє трактувати бризер рівняння (6) як зв'язаний стан кінка і антикінка. Коли $N$ досягає значення $N_* = \pi$, енергія бризера дорівнює сумі енергій двох однопараметричних солітонів, і бризер переходить у вільні кінк і антикінк. З іншого боку, користуючись виразом для польового імпульсу $P_b = 2k\,\mathrm{tg}(N/2)$ запишемо квазикласичний спектр енергій у вигляді:

$$E_b = -2k^3 \mathrm{tg}\frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^2\frac{N}{2}\right). \quad (33)$$

У випадку малих $N$ із формули (33) видно, що з ростом амплітуди бризера, тобто з ростом числа фононів, локалізований стан виникає безпосередньо над спектром лінійних хвиль:

$$E_b \approx -Nk^3(1-\frac{1}{12}N^2)\,. \qquad (34)$$

Таким чином, знайдені нами рівняння (23) та (30) і (31) описують гамільтонову динаміку вільних кінків та бризерів рівняння МКдФ. При додаванні до рівняння (3) повільно змінного зовнішнього поля повна його інтегровність зникає, але в цьому випадку проблема руху дискретних солітонів може бути розв’язана в межах адіабатичного наближення теорії збурень [9].

### Інтеграли руху, гамільтонова динаміка та квазікласичні спектри дискретних солітонів

У решіткових динамічних системах, в яких зберігається енергія, як правило, відсутній такий інтеграл руху, як польовий імпульс, оскільки існування останнього пов’язано з однорідністю простору у неперервних системах. Пошук величини, яка є аналогом польового імпульсу в дискретних нелінійних рівняннях, що містять солітони, представляється на сьогодні актуальною проблемою [15]. Інтегровне рівняння ДМКдФ має нескінченний набір інтегралів руху. Перші з них є такими:

$$C_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}(w_n), \qquad C_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\ln\left(1+w_n^2\right),$$

$$C_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n w_{n-1/2}\,. \qquad (35)$$

Легко переконатись,, що перший інтеграл є узагальненням топологічного інваріанту на дискретні системи. Можна також побудувати лінійні комбінації двох інших інтегралів руху (31), які переходять у довгохвильовій границі в польовий імпульс і енергію континуального рівняння МКдФ. Але навіть для однопараметричних солітонів частинні похідні таких інтегралів не відповідають рівнянням Гамільтона в загальному дискретному випадку. Проблема ускладнюється відсутністю функції Лагранжа для рівняння ДМКдФ. З іншого боку така функція існує для рівняння решітки Хіроти – вона дається формулою (13). З її допомогою безпосередньо знаходимо енергію решітки Хіроти

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left\{\ln\left(1+\dot{\varphi}_n^2\right)-\ln\cos^2\left(\varphi_{n-1}-\varphi_n\right)\right\} \qquad (36)$$

і повний імпульс

$$\Pi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}(\dot{\varphi}_n), \qquad (37)$$

який фактично зводиться до топологічного інваріанту $C_1$. Нарешті, інтеграл руху, еквівалентний $C_3$:

$$S = \frac{1}{2}\sum_n \dot{\varphi}_n\left[\operatorname{tg}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)+\operatorname{tg}(\varphi_n-\varphi_{n+1})\right] \qquad (38)$$

має фізичний зміст потоку енергії.

Значення цих інтегралів руху для кінків і бризерів решітки Хіроти були знайдені в роботі [11]:

$$E_K = \frac{K}{2}, \quad S_K = E_K V_K = \operatorname{sh}(\frac{K}{2}), \qquad (39)$$

$$E_b = \kappa\ , S_b = E_b V = 2\operatorname{sh}(\frac{\kappa}{2})\cos(\frac{k}{2})\,. \qquad (40)$$

Спочатку розглянемо динаміку однопараметричного солітона. Допустимо, що для дискретного кінка виконуються рівняння Гамільтона (23). Тоді повинно мати місце співвідношення $dP_K = dE_K / V_K$, звідкіля маємо для імпульсу представлення у вигляді відомого інтеграла [16]:

$$P_K = \int_{-\infty}^{E_K}\frac{x}{\operatorname{sh}x}dx. \qquad (41)$$

Обернена функція $E_K\left(P_K\right)$ являє собою спектр енергії кінка. Для малих значень параметра $P_K$ одержуємо розклад:

$$E_K\left(P_K\right) = P_K + \frac{1}{18}{P_K}^3 + \ldots \quad . \qquad (42)$$

Набагато складнішою є гамільтонова динаміка бризера. Перш за все, за допомогою функції Лагранжа було побудовано адіабатичний інваріант [11] і знайдено його явний вигляд для загального випадку бризера, що рухається:

$$I = N = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sh}(\kappa/2)}{\sin(k/2)}\right]. \qquad (43)$$

Це дозволяє записати енергію бризера як функцію параметрів $N$ і $k$:

$$E(N,k)=E(N,k)=2\mathrm{Arsh}\left[\mathrm{tg}N\sin\frac{k}{2}\right]. \quad (44)$$

В роботі [11] було проведено квазікласичне квантування нерухомого бризера. У цьому випадку $k=\pi$ і формула для адіабатичного інваріанта спрощується

$$I=N=\mathrm{arctg}\left[\mathrm{sh}\frac{\kappa}{2}\right] \quad (45)$$

і енергія стає функцією одного параметра $N$:

$$E(N)=2\mathrm{arsh}[\mathrm{tg}N]. \quad (46)$$

Для нерухомого бризера маємо одну пару рівнянь Гамільтона, які відповідають внутрішній коливальній ступені свободи.

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial E}{\partial N}=\omega_0, \quad \dot{N}=-\frac{\partial E}{\partial \Phi}=0. \quad (47)$$

Зауважимо, що у високочастотному випадку, коли $E>>1$, бризер практично повністю локалізується на одному вузлі і формула (46) являє собою енергетичний спектр ангармонічного осцилятора. При цьому $N$ грає роль номера енергетичного рівня осцилятора.

Для енергії дискретного бризера, що рухається, вдається встановити співвідношення між інтегралами руху, яке, певно, є загальним для інтегровних нелінійних дискретних систем:

$$\delta E_b=\omega\delta N+S_b\delta q. \quad (48)$$

Подібне співвідношення у дискретному випадку вперше було одержано А.М. Косевичем [9] для солітона Абловіца-Ладіка, де роль параметра $q$ відігравало квазіхвильове число $k$. В нашому випадку для параметра $q$ маємо такий вираз:

$$q=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}(\kappa/2)-\cos(k/2)}{\mathrm{ch}(\kappa/2)-\cos(k/2)}\right). \quad (49)$$

Як видно, у разі нерухомого бризера, коли $k=\pi$, параметр $q$ дорівнює нулю. Спектр енергії дискретного бризера, як функції від $N$ і $q$, є таким:

$$E(N,q)=2\mathrm{Arsh}\left(\frac{\sin N}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 q+\sin^2 N}}\right). \quad (50)$$

Щоб отримати гамільтонові рівняння для дискретного бризера у вигляді (30) і (31), необхідно звести формулу (48) до канонічного співвідношення:

$$\delta E_b=(\omega-kV)\delta N+V\delta P_b. \quad (50)$$

Для цього необхідно, щоб варіація імпульсу $P_b$ дорівнювала

$$\delta P_b=k\delta N+E_b\delta q. \quad (51)$$

Неважко встановити, розглядаючи $P_b$ як функцію параметрів $\kappa$ і $k$, що ця варіація є

$$\delta P_b=\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\mathrm{sh}z}\delta z\right), \quad z=\kappa+ik. \quad (52)$$

Із формули (52) випливає, що узагальнення повного імпульсу на випадок дискретного бризера визначається за допомогою того ж самого інтеграла (41), що і у випадку кінка, тільки тепер він має комплексну верхню границю:

$$P_b=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\kappa+ik}\frac{z}{\mathrm{sh}z}dz\right). \quad (53)$$

Таким чином, квазікласcичний спектр енергії $E(N,P_b)$ частинкоподібного дискретного бризера як функція числа станів $N$ та імпульсу $P_b$, що даються формулами (43) і (53), приводить до рівнянь Гамільтона у канонічній формі (30) і (31). В силу еквівалентності рівнянь (7) і (12) знайдені співвідношення вирішують повністю проблему енергетичних спектрів солітонів рівняння ДМКдФ.

## Висновки

У роботі досліджено гамільтонову динаміку кінків і бризерів в межах точно інтегровних континуального та дискретного рівнянь МКдФ та рівняння решітки Хіроти. В явному вигляді знайдено основні фізичні інтеграли руху – енергію, польовий імпульс, потік енергії і топологічний заряд для солітонів цих рівнянь, а також адіабатичні інваріанти для континуальних і дискретних бризерів. Встановлено енергетичні спектри збуджень для кінків та квазікласичні спектри енергії бризерів. Показано, яким чином можна побудувати аналоги повного імпульсу дискретних кінка і бризера, в термінах яких рівняння їх руху, як частинок, стають канонічними гамільтоновими рівняннями.

**Роботу підтримано грантом №23/09-Н НАН України і російсько-українським проектом №8-2008 між РФФД та НАН України.**

**Література**

1. М.Тода, Теория нелинейных решеток (Мир, Москва, 1984).
2. Р.Додд, Дж.Эйлбек, Дж.Гиббон, Х.Моррис, Солитоны и нелинейные волновые уравнения (Мир, Москва, 1988).
3. А.М.Косевич, А.С.Ковалев, Введение в нелинейную физическую механику (Наукова думка, Киев, 1989).
4. K.Hori, S.Takeno, J. Phys. Soc. Jpn. 61, 4263 (1992).
5. М.Абловиц,Х.Сигур, Солитоны и метод обратной задачи (Мир, Москва, 1987).
6. R.Hirota, J. Phys. Soc. Jap. 33, 1456 (1972).
7. R.Hirota, J. Phys. Soc. Jap. 35, 289 (1973).
8. M.J.Ablowitz, J.F.Ladik, J. Math. Phys. 16, 598 (1975).
9. А.М. Косевич, ФНТ 27, 699 (2001).
10. M.M.Bogdan, in Proc.: International Conf. Inverse Problems and Nonlinear Equations (Kharkiv, 2002), c. 8–9.
11. M.M.Bogdan, G.A.Maugin, Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 52, 76 (2003).
12. F.Cooper, A.Khare, A.Saxena, Complexity 11, 30 (2006).
13. R.Hirota, J.Satsuma, Supplement of the Progress of Theoretical Physics 59, 64 (1976).
14. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Квантовая механика (Наука, Москва, 1974).
15. P.G.Kevrekidis, Physica D 183, 68 (2003).
16. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (Физматгиз, Москва, 1963).

# QUASICLASSICAL SPECTRA OF THE SOLITONS OF THE CONTINUAL AND DISCRETE MODIFIED KORTEWEG - DE VRIES EQUATIONS

**M.M.Bogdan, D.V.Laptev**

B.I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engeniering NAS of Ukraine, Lenin ave. 47, Kharkiv, 61103
e-mail: laptev.denis@mail.ru

Hamiltonian dynamics of kinks and breathers is investigated in the framework of exactly integrable continual and discrete modified Korteweg - de Vries equations and Hirota lattice equation. These nonlinear excitations correspond to the shock waves and self-localized oscillations of the Fermi – Pasta - Ulam model which describes an anharmonic one-dimensional crystal. The dependence of energy on the momentum for kinks and quasiclassical spectra of energy for both continual and discrete breathers are found.