УДК 369.04:519.863

Акименко А.М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри інформаційних систем в економіці
Чернігівського національного технологічного університету
Юрченко М.Є.
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри інформаційних систем в економіці
Чернігівського національного технологічного університету

Akymenko A.M.
PhD of Physical-Mathematical Sciences, Assistant Professor
Department of Informational Systems in Economy
Chernihiv National University of Technology
Iurchenko M.E.
PhD of Physical-Mathematical Sciences, Assistant Professor
Department of Informational Systems in Economy
Chernihiv National University of Technology

ОПТИМІЗАЦІЯ МОМЕНТУ ПОСТАВОК З УРАХУВАННЯМ ЙМОВІРНІСНИХ ФАКТОРІВ

OPTIMIZATION OF THE DELAY OF SUPPLIES WITH THE ACCOUNT OF PROBABILISTIC FACTORS

Анотація. У статті представлено стохастичну модель оптимізації моменту поставки продукції з урахуванням низки невизначених факторів. Отримано аналітичну залежність вказаного моменту від ймовірного попиту і випадкового часу поставки. Показано, що функція витрат враховує витрати на зберігання і витрати дефіциту, що характеризують втрачену вигоду. Отримано аналітичний вираз для знаходження узагальнених витрат з урахуванням того, що як сумарні витрати може бути розглянуто їх математичне очікування. Для опису випадкових характеристик використано нормальний закон розподілення.

Ключові слова: стохастичні моделі, попит, управління запасами, прибуток, оптимізація.

Вступ та постановка проблеми. Як відомо, однією з важливих задач динамічного програмування є задача управління запасами. Коректна постановка і знаходження правильного рішення цього класу задач дають змогу мінімізувати витрати на зберігання і перевезення товару, а також створити такі товарні запаси, які збільшують до максимуму чистий прибуток. Потрібно відзначити, що під час побудови математичних моделей для схожих задач істотний вплив на отримання оптимального рішення здійснюють фактори, що мають ймовірнісний характер. До таких факторів, зокрема, відносять попит, тривалість процедур поповнення запасів, вибір моментів подання та моментів отримання заказів. Облік цих факторів під час побудови моделі є важливим і необхідним з точки зору пошуку коректного оптимального рішення. Ключовий механізм системи управління запасами є також реалізацією принципу зворотного зв'язку, адже у разі здійснення впливу управлінського рішення керівництва системою на робочий елемент мають місце реакція всієї системи, надходження даних про її новий стан і оцінка результативності її функціонування. Таким чином, система є керованою, якщо після впливу є можливість оцінити та відкоригувати її новий стан. Актуальність проблеми оптимізації запасів підприємства і ефективного управління ними обумовлена тим, що стан запасів має визначальний вплив на конкурентоспроможність підприємства, його фінансовий стан та фінансові результати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Моделювання процесів управління запасами в ринкових умовах функціонування підприємства передбачає врахування великої кількості параметрів системи та вибір одного з багатьох варіантів постановки задачі. Єдина класифікація цих варіантів, незважаючи на численні роботи, досі реалізована лише частково. Окремі аспекти побудови коректних математичних моделей управління товарними запасами викладені в роботах Г.Л. Бродецького, Г.І. Просветова та Д. Шрайбфедера [1–3]. Потрібно відзначити, що найбільш розповсюдженими та дослідженими моделями є моделі з фіксованим розміром заказу, моделі з фіксованими інтервалами часу між заказами, моделі зі встановленою періодичністю поповнення запасів до заданого рівня, а також мінімаксні моделі. Особливостям використання математичного апарату під час побудови названих типів моделей присвячено роботи [4; 5]. В роботі [5] запропоновано використовувати так звані причинно-наслідкові моделі, що базуються на методах статистичної регресії, але використання їх не дає змогу правильно оцінити втрати від старіння продукції та витрати, що пов'язані зі складуванням та зберіганням. Відома низка детермінованих моделей управління запасами, серед яких, на наш погляд, заслуговує особливої уваги дослідження [6]. Як вже відзначалося, в реальних умовах завжди присутня невизначеність, що робить процес, що розглядається, випадковим. В основі цієї невизначеності лежать складність прогнозування попиту, а також можливість відхилення від запланованих строків поставок. Цей факт недостатньо повно вивчено в розглянутому вище літературному джерелі. Під час побудови моделі задачі потрібно звернути увагу на те, що найчастіше постановка задачі, що задає стратегію формування заказу, перевантажена великою кількістю початкових умов. Так, наприклад, у своїй роботі [7] Г.І. Феклісов розглядав вектор з сімнадцяти компонент, що задає стратегію формування заказу, але багатокомпонентність перешкоджає отриманню стійкого рішення. На думку автора [8], мінімально достатніми для формування класифікації категоріями є алгоритм постачання, попит, можливість поповнення запасів, функції затрат і обмежень, а також правильне визначення стратегії управління запасами.

Відзначимо, що нині відсутня сукупність показників, що дає змогу проаналізувати та дослідити товарні запаси в стадії товарних потоків і товарні потоки в стадії товарних запасів, не сформовано механізм оптимізації товарних запасів. Для розв'язання поставлених задач існує низка окремих моделей, але цілісне уявлення, теорія і методологія їх побудови відсутні. Ці обставини і визначили вибір теми і основні напрями нашого дослідження.

Метою роботи є знаходження аналітичної залежності оптимального моменту призначення поставки у разі неперервної моделі за умови невизначеності терміну поставки продукції.

Результати дослідження. На практиці часто виникає невизначеність, що обумовлена неточністю або неповнотою інформації про попит, постачання, тимчасові затримки замовлених товарів, псування продукції та інші параметри логістичної системи, що потребують пошуку ефективного механізму управління запасами в умовах невизначеності різного характеру. Невизначені фактори зустрічаються в реальності набагато частіше, ніж детерміновані, повністю визначені чинники. У багатьох випадках вплив невизначеності є істотним моментом під час побудови оптимальної стратегії. Під час побудови коректної математичної моделі найбільш важливим є врахування невизначених факторів, на відміну від детермінованого випадку, в якому цими факторами можна знехтувати. Як показано в дослідженні [1], невизначеність можна розділити на дві групи, а саме стохастичну і повну. Особливість стохастичної невизначеності (або випадкової) полягає в тому, що вона подається випадковою величиною або випадковим процесом. Повна невизначеність не розглядається як випадковий об'єкт. Вид невизначеності обумовлює вибір певного набору математичних моделей. Відзначимо, що нині в більшості розглянутих моделей для пошуку рішення використовуються чисельні методи, а не аналітичні. І практично в більшості моделей для опису випадкових характеристик використовуються задані закони розподілу (найчастіше – пуассонівський процес), а не довільні. Як цільова функція найчастіше обирається або мінімізація середніх загальних витрат, або максимізація очікуваного загального прибутку. Розглянуті обмеження значно, на наш погляд, звужують коло задач, що можуть бути розглянуті. Будемо розглядати задачу, що складається у призначенні моменту часу поставки товару τ^* в припущенні випадкового характеру попиту і часу поставки.

Позначимо $\tau = \tau^* + \delta\tau$ – момент, в який відбувається реальна поставка товару, де $\delta\tau$ – випадкова величина, що характеризує відхилення моменту реальної доставки товару від призначеного моменту доставки, $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ – момент часу, коли товар на складі закінчується, де θ_0 – час закінчення товару на складі, що очікувався. Випадкова величина θ описує відхилення моменту реального закінчення товару на складі від очікуваного часу закінчення товару.

Будемо вважати, що функція затрат U, що відображає оптимальність обраної стратегії управління запасами, враховує витрати на зберігання і витрати дефіциту втраченої вигоди, які беруться рівними часу відсутності необхідної кількості товару на складі. Витрати на зберігання товару в деякому обсязі V після поставки на інтервалі часу до моменту реального обнулення товару θ у разі, коли поставка товару приходиться на більш ранній строк τ ($\tau^* + \delta\tau < \theta$), складуть:

$$C = \gamma V(\theta - \tau^* - \delta\tau), \tag{1}$$

де $\gamma = const$ – вартість зберігання одиниці продукції на добу.

При неповному задоволенні попиту в разі $\tau^* + \delta\tau > \theta$ виникають витрати на дефіцит товару на проміжку від моменту реального обнулення товару θ до моменту поставки τ в обсязі V, які обраховуються за такою формулою:

$$K = \frac{V}{\theta_0}\mu(\tau^* + \delta\tau - \theta), \tag{2}$$

де $\mu = const$ – прибуток від продажу одиниці продукції, $\frac{V}{\theta_0}$ – середній добовий обсяг товару, що продається. Загальні витрати можуть бути знайдені так:

$$C + K = \begin{cases} V\gamma(\theta - \tau^* - \delta\tau, & \theta > \tau^* + \delta\tau \\ \frac{V}{\theta_0}\mu(\tau^* + \delta\tau - \theta), & \tau^* + \delta\tau > \theta \end{cases} \tag{3}$$

В стохастичних моделях сумарні витрати є випадковою величиною, тому як сумарні витрати може бути розглянуто їх математичне очікування. Якщо в моделі $\delta\tau$ і θ розподілені за нормальним законом з щільністю ймовірності відповідно $f_1(\delta\tau)$ та $f_2(\theta)$, математичне очікування сумарних витрат приймає такий вигляд:

$$T(\tau^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\theta-\tau^*} \gamma V(\theta - \tau^* - \delta\tau) f_1(\delta\tau) d\tau \right.$$
$$\left. + \int_{\theta-\tau^*}^{\infty} \frac{V}{\theta_0}\mu(\tau^* + \delta\tau - \theta) f_1(\delta\tau) d\tau \right) f_2(\delta\tau) d(\delta\tau) \tag{4}$$

Поставлена задача зводиться до знаходження такого моменту призначення поставки τ^*, за якого математичне очікування сумарних витрат буде мінімальним:

$$T(\tau^*) \to \min. \tag{5}$$

Для знаходження мінімуму очікуваних витрат знаходимо похідну функції (4) за змінною τ^*, заздалегідь ввівши такі позначення:

$$T_1(\tau^*, \theta) = \int_{-\infty}^{\theta-\tau^*} \gamma V(\theta - \tau^* - \delta\tau) f_1(\delta\tau) d(\delta\tau) \tag{6}$$

$$T_2(\tau^*, \theta) = \int_{\theta-\tau^*}^{\infty} \frac{V}{\theta_0}\mu(\tau^* + \delta\tau - \theta) f_1(\delta\tau) d(\delta\tau) \tag{7}$$

Диференціюючи під знаком інтеграла, отримуємо з урахуванням позначень (6) і (7) такий вираз:

$$\frac{dT(\tau^*)}{d\tau^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial T_1(\tau^*, \theta)}{\partial \tau^*} + \frac{\partial T_2(\tau^*, \theta)}{\partial \tau^*} \right) f_2(\delta\theta) d(\delta\theta) \tag{8}$$

$$\frac{dT(\tau^*)}{d\tau^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\gamma V \Phi\left(\frac{\theta - \tau^*}{\sigma_1}\right) + \frac{V}{\theta_0}\mu - \right.$$
$$\left. - \frac{V}{\theta_0}\mu\Phi\left(\frac{\theta - \tau^*}{\sigma_1}\right) \right) f_2(\delta\theta) d(\delta\theta) \tag{9}$$

У виразах (8), (9) $\Phi(x)$ відома функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Враховуючи, що $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, отримаємо:

$$\frac{dF(\tau^*)}{d\tau^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(-\gamma V - \frac{V}{\theta_0}\mu \right) \Phi\left(\frac{\theta_0 + \delta\theta - \tau^*}{\sigma_1} \right) + \frac{V}{\theta_0}\mu \right) f_2(\delta\theta) d(\delta\theta) \quad (10)$$

Прирівнюючи похідну до нуля, отримуємо таке співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\theta_0 + \delta\theta - \tau^*}{\sigma_1} \right) f_2(\delta\theta) d(\delta\theta) = \frac{1}{\frac{\gamma\theta_0}{\mu} + 1} \quad (11)$$

Рішення інтегрального рівняння (11) знаходимо чисельно за допомогою методу квадратур, який полягає в тому, що інтеграли, які входять в рівняння, замінюються квадратурними сумами, а отримані кінцеві співвідношення можуть бути як допоміжними, так і такими, що є самостійними, в ролі кінцевих розрахованих виразів. При чисельному інтегруванні припускаємо, що момент часу, в який потрібно призначати доставку нової партії товару, визначається таким виразом:

$$\tau^* = \theta - \sigma\Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\gamma\theta + \mu} \right) \quad (12)$$

де θ – момент закінчення товару, γ – вартість зберігання одиниці товару, μ – ціна продажу одиниці товару. З (12) випливає, що оптимальний момент призначення доставки нової партії товару відрізняється відносно моменту часу θ на величину, яка залежить від θ, γ і μ, а також від параметрів нормального розподілу випадкової величини $\delta\tau$, яка характеризує відхилення часу нової партії товару від призначеного терміну.

У припущенні, що прибуток від продажу одиниці товару μ = 100 у. о., очікуваний час закінчення товару θ_0 = 12 діб, а випадкова величина $\delta\tau$ має нормальний закон розподілення з параметрами $m = 0$, $\sigma = 2$, для кожного значення вартості зберігання в таблиці представлений відповідний оптимальний момент часу поставки τ^*.

Таблиця 1

Залежність часу закінчення товару від вартості зберігання одиниці товару та ціни продажу одиниці товару

γ	$\frac{\mu}{\mu+\theta\gamma}$	$\sigma\Phi^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu+\theta\gamma}\right)$	τ^*
5	0,625	1,27	10,73
10	0,455	-0,46	12,46
15	0,357	-1,46	13,46
20	0,294	-2,17	14,17
25	0,250	-2,70	14,70
30	0,217	-3,12	15,12
35	0,192	-3,48	15,48
40	0,172	-3,78	15,78
45	0,156	-4,04	16,04
50	0,143	-4,27	16,27

Висновки. В роботі поряд з числовим рішенням отримана аналітична залежність, що пов’язує очікуваний прибуток від продажу одиниці товару з моментом часу призначення доставки нової партії товару. Представлені числові результати дослідження. Представлена в роботі ймовірнісна модель є теоретичною основою для побудови оптимальної стратегії управління запасами. Оптимізація параметрів управління дає можливість підвищити конкурентоспроможність підприємства та комплексно знизити витрати.

Список використаних джерел:

1. Бродецкий Г.Л. Методы стохастической оптимизации / Г.Л. Бродецкий. – М. : РЭА, 2004. – 324 с.
2. Просветов Г.И. Математические методы в логистике / Г.И. Просветов. – М. : АФЦ, 2008. – 304 с.
3. Шрайбфедер Д. Эффективное управление запасами / Д. Шрайбфедер. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.
4. On a stochastic inventory model with deteriorating items / [L. Aggoun, L. Benkherouf, L. Tadj] // IJMMS. – 2001. – V. 25. – № 3. – P. 197–203.
5. Optimal ordering policies for deteriorating items using a discounted cash-flow analysis when a trade credit is limited to order quantity / [C-T. Chang, L-Y. Ouyang, J-T. Teng, M-C. Cheng] // Computers & Industrial Engineering. – 2010. – Vol. 59. – P. 770–777.
6. Hung K.C. Continuous review inventory models under time value of money and crash able lead time consideration / K.C. Hung // Yugoslav Journal of Operations Research. – 2011. – Vol. 21. – № 2. – P. 293–306.
7. Феклисов Г.И. Математическое обеспечение систем управления запасами / Г.И. Феклистов. – М. : Статистика, 1977. – 112 с.
8. Modelling of two strategies in inventory control system with random lead time and demand / [E. Kopytov, L. Greenglaz, A. Muravyov, E. Puzinkevich] // Computer Modelling and New Technologies. – 2007. – V. 1. 1. – №. 1. – P. 21–30.

Аннотация. В статье представлена стохастическая модель оптимизации момента поставки продукции с учетом ряда неопределенных факторов. Получена аналитическая зависимость указанного момента от вероятностного спроса и случайного времени поставки. Показано, что функция затрат учитывает издержки на хранение и издержки дефицита, характеризующие упущенную выгоду. Получено аналитическое выражение для нахождения обобщенных издержек с учетом того, что в качестве суммарных затрат может быть рассмотрено их математическое ожидание. Для описания случайных характеристик использован нормальный закон распределения.

Ключевые слова: стохастические модели, спрос, управление запасами, прибыль, оптимизация.

Summary. The article presents a stochastic model for optimizing the moment of delivery of products taking into account a number of uncertain factors. An analytical dependence of this moment on probabilistic demand and random delivery time is obtained. It is shown that the cost function takes into account the storage costs and deficit costs that characterize the lost profit. An analytical expression is obtained to find the total costs, taking into account the fact that their mathematical expectation can be considered as the total costs. To describe random characteristics, the normal distribution law is used.

Key words: stochastic models, demand, inventory control, profit, optimization.