ББК:
УДК:

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ЗАКАРПАТСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ІНФОРМАТИКИ ТА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Гончарова С.Ф
Лавер О.Г.

Функціональний та опуклий аналіз

Навчально-методичний посібник

Ужгород - 2012

Гончарова С.Ф., Лавер О.Г., «Функціональний та опуклий аналіз»: електронний посібник – Ужгород: ЗакДУ. 2012. – 40с.
Електронний посібник «Функціональний та опуклий аналіз» складається з двох розділів, кожен з яких складається з параграфів. Посібник містить основний теоретичний матеріал з функціонального та опуклого аналізу. В посібнику приведені прикладом конкретного застосування деяких теорем функціонального аналізу.

Цей посібник призначений для студентів ІІІ курсу факультету інформаційних технологій. Він може бути корисним всім студентам ЗакДУ, які бажають більш глибоко розуміти вищу математику.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою факультету інформатики Закарпатського державного університету (протокол №1 від 01.10.2012р.)

Зміст

Функціональний аналіз – прояв корінного повороту в математиці, здійсненого в наш час, який за своїм принциповим значенням можна порівняти з тим, що стався в XVII с., коли в математиці з'явилася змінна величина і виникли диференціальне та інтегральне числення.

Цей поворот виразився у зміні підходу до дослідження різних проблем математичного аналізу. Розгляд окремих функцій і співвідношень, які їх пов'язують, замінено сукупним дослідженням цих об'єктів, тобто визначенням функціональних просторів та їх перетворень. Так, диференціальний оператор чи інтегральне перетворення розглядається не в застосуванні до окремої функції, а до цілого класу функцій, вивчається результат перетворення цього класу функцій, неперервність операцій у тому чи іншому розумінні та інші питання.

Важливою особливістю функціонального аналізу є також загальна абстрактна форма викладу, яка дає змогу об'єднувати та одночасно досліджувати різні на перший погляд питання. Так, наприклад, вивчення функціонального рівняння $F(x)=y$, де x, y - об'єкти з більш чи менш довільних областей, дозоляє об'єднати розгляд інших проблем, таких як розв'язання диференціальних чи інтегральних рівнянь, граничних задач, нескінченних систем алгебраїчних рівнянь і багатьох інших задач.

Перехід від окремих функції до простору функцій, хоча його іноді формально важко визначити, так само принципово важливий як свого часу перехід від алгебраїчних рівнянь і співвідношень до змінної величини та функціональної залежності.

Функціональний аналіз тісно пов'язаний з такими дисциплінами як математичний аналіз і лінійна алгебра.

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ. НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. ПРОСТОРИ БАНАХА, ГІЛЬБЕРТА, ЕВКЛІДА.

§1.Лінійні простори

Множина M елементів довільної природи називається **метричним простором**, якщо кожній парі його елементів x і y поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $\rho(x,y) \geq 0$, що задовольняє наступним умовам:

1) $\rho(x,y)=0$ тоді і тільки тоді $x=y$ (аксіома тотожності);

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$ (аксіома трикутника).

Число називається відстанню між елементами x і y або метрикою простору, а умови 1), 2), 3) – аксіомами метрики.

Елементи метричного простору називатимемо точками.

Кожна підмножина N множини M з тим же $\rho(x,y)$ теж є метричним простором; вона називається підпростором простору M.

Приклад. R – множина дійсних чисел.

$\rho(x,y)=|x-y|$. Легко перевірити виконання всіх трьох умов метрики.

Наведемо приклади метричних просторів.

1. Множина дійсних чисел з відстанню

   ρ(x, y) = |x-y|

   утворює метричний простір $\mathbf{R}^1$.

2. Множина впорядкованих систем з n дійсних чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з відстанню

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \qquad (1.1)$$

називається n-мірним арифметичним евклідовим простором $\mathbf{R}^n$.

3. Множина C [a,b] всіх неперервних дійсних функцій, визначених на сегменті [a,b], з відстанню

$$\rho(f,g)=\max_{a\leq t\leq b}|g(t)-f(t)| \qquad (1.2)$$

також утворює метричний простір.

4. Позначимо через l_2 метричний простір, точками якого служать всякі можливі послідовності x=(x$_1$, x$_2$, …, x$_n$,…) дійсних чисел, що задовольняють умові

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

а відстань визначається формулою

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \qquad (1.3)$$

5. Вкажемо ще один цікавий приклад метричного простору. Його елементами являються всякі можливі послідовності дійсних чисел x=(x$_1$, x$_2$, …, x$_n$,…), такі, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p < \infty,$$

де p≥1 – деяке фіксоване число, а відстань визначається формулою

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | y_k - x_k |^p \right)^{1/p} \qquad (1.4)$$

Цей метричний простір позначимо l_p.

Нехай задана послідовність $\{x_n\}$ елементів з *M*, будемо казати, що $\{x_n\}$ збігається до x_0 належить M, якщо $\rho(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Властивості.

1) Кожна підпослідовність послідовності, що збігається в *M,* теж є збіжною, причому збіжною до цієї ж точки.

Доведення

$\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$

$\alpha_n = \rho(x_n, x)$; $\beta_{n_k} = \rho(x_{n_k}, x)$

$\{\beta_{n_k}\} \subset \{\alpha_n\}$; α_n прямує до 0, при η прямує до нескінченості, тобто і β_{n_k} прямує до 0, при η_k прямує до нескінченості.

2) Якщо $\{x_n\} \to x \in M$, то x є єдиною границею $\{x_n\}$ в *M*.

Якщо y теж границя, то маємо для кожного $\varepsilon > 0$.

$\rho(x,y) \le \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) \langle \varepsilon$ для достатньо великих *n*; тобто $\rho(x,y) = 0$ і $x = y$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ точок M називається фундаментальною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує N, що при $n, m > N$ $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

3) Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається в *M*, то вона є фундаментальною.

Нехай $\{x_n\} \to x$, $x \in M$, тоді для кожного $\varepsilon > 0$, що $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > N$ і $\rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $m > N$; $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \varepsilon$.

Означення. Метричний простір M називається повним, якщо кожна фундаментальна послідовність цього простору збігається в *M*, тобто границя належить M.

Приклад. Множина дійсних чисел R є повним метричним простором, а множина раціональних чисел *Q* ні.

Означення. Множина E називається лінійним простором, якщо в ній визначена сума довільних двох елементів *x* і *y*, тобто $(x+y) \in E$, і добуток довільного елемента $x \in E$ на будь-яке дійсне число α, тобто $(\alpha x) \in E$. При цьому мають бути виконані наступні умови:

а) $x + y = y + x$ (комутативність);

б) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);

в) існує єдиний нульовий елемент $0 \in E$, тобто для кожного $x \in E$ $x + 0 = x$;

г) для кожного $x \in E$ існує протилежний елемент $(-x) \in E$, що $x + (-x) = 0$;

д) для кожної пари дійсних $(\lambda, M \in R)$ $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

ж) для кожного дійсного $\lambda \in R$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

з) $1 \cdot x = x$, (1 – дійсне число одиниця).

Приклад 1. Множина R дійсних чисел є лінійним простором.

Приклад 2. Множина E_n $n-$вимірних векторів з дійсними компонентами є лінійним простором.

Приклад 3. Множина матриць фіксованого розміру з дійсними елементами є лінійним простором.

§2. Нормовані простори. Простір Банаха

<u>Означення.</u> Лінійний простір E називається нормованим простором, якщо для кожного елементу $x \in E$ однозначно визначається невід'ємне дійсне число (називається нормою x: $\|x\|$), при цьому виконуються умови:

1) $\|x\| \geq 0$ і $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді коли $x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

У нормованому просторі можна ввести метрику (віддаль) формулою:

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ (легко перевірити аксіоми метрики). Збіжність $\{x_n\} \to x$: $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (збіжність по нормі).

Якщо нормований простір є повним відносно збіжності по нормі, то він називається <u>простором Банаха, або банахів простором</u>.

<u>Приклад.</u> Розглянемо n- вимірний простір E_n, всіх n- вимірних векторів з дійсними компонентами.

$x = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n)$. Введемо норму елемента *x:* $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$;

Перевіримо властивості норми.

1) і 2) властивості норми очевидні. Перевіримо третю властивість. Доведемо спочатку нерівність Коші:

(*) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ (a_i, $b_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n$).

Відмітимо, що якщо квадратний тричлен $Ax^2 + 2Bx + C$ з дійсними коефіцієнтами є невід'ємним для довільних дійсних *x*, тобто $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$, то його дискримінант ≤ 0: $B^2 - AC \leq 0$.

Складемо функцію

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2; \; B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i; \; C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Легко бачити, що нерівність Коші <u>доведена</u>.

Нам потрібно довести нерівність трикутника для норми:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad (**).$$

Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності, помножимо на дві частини одержаної нерівності та додамо до обох частин нерівності вираз $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, тоді отримаємо:

$$\sum_{i}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i}^{n} a_i b_i + \sum_{i}^{n} b_i^2 \le \sqrt{\sum_{i}^{n} a_i^2} + 2\sqrt{\sum_{i}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i}^{n} b_i^2} + \left(\sqrt{\sum_{i}^{n} b_i^2}\right)^2;;$$

далі:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) \le \left(\sqrt{\sum_{i}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i}^{n} b_i^2}\right)^2$$

або

$$\sqrt{\sum_{i}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \left(\sqrt{\sum_{i}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i}^{n} b_i^2}\right),$$

тобто

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Доведено.

§3. Евклідів та гільбертів простори

Означення. Лінійний простір називається евклідовим дійсним, якщо в цьому просторі визначений скалярний добуток, тобто кожній парі x, y ставиться у відповідність дійсне число (x, y), що задовольняє умовам:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4) $(x, x) \ge 0$;. $(x, x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$

Означення. Повний евклідів простір називається гільбертовим простором.

Повнота простору зв'язана із збіжністю по нормі, яка для простору Гільберта вводиться наступним чином:

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

§4. Найважливіші простори функціонального аналізу

1. Простір ℓ_2. Розглянемо множину послідовностей дійсних чисел $U = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$, для яких $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$ - збіжний ряд.

Покажемо, що ℓ_2 є евклідовим простором. Введемо скалярний добуток таким чином:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \quad x = \{\alpha_i\};\ y = \{\beta_i\};$$

Перевіримо властивості скалярного добутку. 1), 2), 4) очевидні. Перевіримо 3) властивість. Повинно бути:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \gamma_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i \gamma_i).$$

Нерівність Коші:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i||\beta_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2}$$, тоді

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2} \right)^2$$, звідси:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \right)$$

За нерівністю трикутника, яка доведена для E_n :

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2} \right)^2$$, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2} \right)^2$$, але права частина є сталою величиною,

додатних рядів обмеженість частинних сум означає збіжність ряду, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)^2$ збігається, тобто $(x + y) \in \ell_2$, якщо x і $y \in \ell_2$.

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i||\beta_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2}.$$

Покажемо, що ℓ_2 є банаховим гільбертовим простором, тобто що ℓ_2 є повним простором в розумінні збіжності по нормі і повним евклідовим.

Розглянемо фундаментальну послідовність в ℓ_2:

$$\{x_n\};\ x_n = \left(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots\ldots, \alpha_k^{(n)} \ldots\ldots\right);\ \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

$\|x_n - x_m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)}\right)^2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, тобто $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)}\right)^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, тобто $\left|\alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)}\right| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ при кожному i - ознака Больцмана – Коші для дійсних чисел, тобто при кожному i існує $\beta_i = \lim_{n\to\infty} \alpha_i^{(n)}$. Складемо вектор $x = (\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots)$.

<u>Доведемо, що $x \in \ell_2$ і що $\{x_n\} \to x$.</u>

Маємо: для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке N що при $n,m > N$

$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)}\right)^2 = \|x_n - x_m\|^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2$, далі, тим більше, кожного k і $n,m > N$:

$\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i^{(m)}\right)^2 < \frac{1}{2}\varepsilon^2$, фіксуючи n і переходячи до границі при $m \to \infty$, отримаємо:

$\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i^{(n)} - \beta_i\right)^2 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2$, оскільки ця нерівність справедлива для кожного натурального k, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha_i^{(n)} - \beta_i\right)^2$ збігається і, $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\alpha_i^{(n)} - \beta_i\right)^2 \le \frac{1}{2}\varepsilon^2 < \varepsilon^2$, тобто вектор $(x_n - x) \in \ell_2$ і $\|x_n - x\| < \varepsilon$ при $n > N$, але тоді вектор $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_2$ і при цьому $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Повнота ℓ_2 доведена. ℓ_2 називається координатним гільбертовим.

2). Простір $C[a,b]$ - це простір всіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $x(t)$.

Введемо норму в $C[a,b]$ наступним чином: $\|x(t)\| = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$ - максимум неперервних на відрізку функції $\exists_i$ max| | є дійсним невід'ємним числом

$\|x\| = 0$: $\max_{t\in[a,b]}|x(t)| = 0$, тобто t належить $[a,b]$.

$x(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$ і навпаки теж

$\|\lambda x\| = \max_{t\in[a,b]}|\lambda x(t)| = |\lambda| \cdot \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$;

$\|x + y\| = \max_{t\in[a,b]}|x(t) + y(t)| \le \max_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max_{t\in[a,b]}|y(t)| = \|x\| + \|y\|$.

Отже $C[a,b]$ є нормованим простором. Покажемо, що $C[a,b]$ є банаховим. Розглянемо фундаментальну послідовність в $C[a,b]$: $\{x_n(t)\}$ і $\|x_n(t) - x_m(t)\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ тобто для евклідовим $\exists N$, що при $n,m > N$ $\max_{t\in[a,b]}|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, тобто $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ при кожній t належить $[a,b]$ - критерій Коші рівномірної збіжності послідовностей функцій $x_n(t)$, тобто існує $x(t)$: $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ і $x(t)$ є неперервним, тобто $x(t) \in C[a,b]$ і воно є повним, тобто банаховим.

3). Простір Лебега $L[a,b]$. Нехай $f(x)$ - функція, визначена і вимірна на $[a,b]$ і інтегрована на цьому відрізку, тобто $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. Ототожнюватимемо дві функції, які є еквівалентмини, тобто збігаються майже всюди на $[a,b]$. Надалі через $f(x)$ позначатимемо і цілий клас еквівалентних між собою функцій і еквівалентні $f(x)$. Визначимо норму $f(x)$ наступним чином:

$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$ - інтеграл Лебега.

З властивостей інтеграла Лебега випливають властивості:

1) $\|f\| = 0 \leftrightarrow f = 0$;

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$;

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Легко довести, що $L[a,b]$ є повним, тобто він є банаховим.

4). Простір $C^2[a,b]$ - простір неперервних на $[a,b]$ функцій, скалярний добуток вводиться так:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Перевіряємо властивості скалярного добутку:

1) $(f, g) = (g, f)$;

2) $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$;

3) $(f + g, h) = \int_a^b [f + g] h \cdot dx = \int_a^b fhdx + \int_a^b ghdx = (f, h) + (g, h)$;

4) $(f, f) \geq 0$; $(f, f) = 0 \leftrightarrow f = 0 \quad x \in [a,b]$.

Можна ввести норму $C^2[a,b]$: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$, тобто є і нормованим простором.

Означення. Повний евклідовий простір називається гільбертовим.

5) Простір $L_2(a,b)$- простір визначених і вимірних на $[a,b]$ функцій таких, що $\int_a^b f^2(x)dx < \infty$. Далі: $\int_a^b f^2(x)dx = 0 \to f(x) = 0$ майже всюди на $[a,b]$. (інтеграл Лебега!).

Функції з $L_2(a,b)$ - функції з інтегрованим квадратом.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ вважатимемо за рівні, якщо $\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 = 0$.

Покажемо, що $L_2(a,b)$ є евклідовим простором.

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x) + g^2(x)]dx = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_a^b g^2(x)dx < \infty.$$

Очевидно можна показати, що $L_2(a,b)$ є і повним, тобто гільбертовим; його називають функціональним гільбертовим простором.

§5.Відкриті і замкнені множини. Сепарабельні простори.

M - деякий метричний простір.

Означення. Відкритою кулею з центром в $a \in M$ (M - метричний простір) і радіусом $r > 0$ називається множина $S(a,r)$ всіх точок $x \in M$,що $\rho(x,a) < r$. Аналогічно замкненою кулею $\overline{S}(a,r)$ називають множину усіх точок $x \in M$, що $\rho(x,a) \leq r$.

Приклад: якщо M - числова пряма, то відкрита куля – інтервал; замкнена куля– відрізок.

Визначення. Сферою з центром в точці $a \in M$ і назвемо множину точок M, що $\rho(a,x) = r$.

Приклад: у E_3 сфера звичайна.

Нехай $N < M$ - підмножина *M*, тоді *N* належить деякій замкнутій кулі простору M.

Лема 1. Якщо послідовність точок М $\{x_n\}$ має границю $x_0 \in M$, то ця послідовність обмежена.

Доведення. За визначенням: для кожного $\varepsilon > 0 \exists n_0$, що при $n > N_0$ $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Виберемо $\varepsilon = 1$:

позначимо $f = \max\limits_{1 \leq i \leq n_0} \rho(x_i; x_0)$.

Нехай $r = \max\{f, 1\}$, тоді $\rho(x_n, x_0) \leq r$, тобто остання обмежена.

Означення. Околом точки $a \in M$ називається будь-яка відкрита куля з центром в цій точці.

Визначення. Точка $a \in M$ називається граничною точкою множини $N \subset M$якщо кожен окіл точки містить, принаймні, одну точку множини Nвідмінну від a.

Лема 2. Нехай a - гранична точка N з простору M, тоді існує така послідовність $\{x_n\}$ точок N, що $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$.

Доведення.. Нехай $S(a,r)$ - похідний окіл точки a, знайдеться точка $x_1 \in N$що $x_1 \neq a$ і $x_1 \in S(a,r)$. Нехай $0 < r_1 < \rho(a,x_1)$. Відкрита куля $S(a,r_1)$ є знову околом точки a і, отже, містить точку $x_2 \in N$, що $x_2 \neq a$. Візьмемо $0 < r_2 < \rho(a,x_2)$ і розглянемо кулю $S(a,r_2)$ і так далі. Якщо додатково вимагати, щоб $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{x_n\} \subset N$ збігається до точки a.

Зауваження. З цього, зокрема, випливає, що кожен окіл граничної точки множини N містить нескінченно багато точок множини N. Звідси, у свою чергу, випливає, що в метричному просторі скінченна множина не може мати граничних точок.

<u>Означення.</u>

1.Сукупність всіх граничних точок множини N називається похідною множиною цієї множини і позначається N'.

2.Якщо множина N містить всі свої граничні точки, то вона називається замкненою.

3.Доповненням множини N називається множина $\overline{N} = N \cup N'$.

Ясно, що N замкнута тоді і тільки тоді $N = \overline{N}$.

<u>**Лема 3**</u>. Замкнена куля простору M є замкнутою множиною простору M .

<u>Доведення.</u> Нехай точки $x, y, z \in M$, тоді $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (1) і $\rho(y,z) \le \rho(y,x) + \rho(x,z)$ (2).

З (1) випливає: $\rho(x,y) \ge \rho(x,z) - \rho(y,z)$ (3).

З (2) випливає: $\rho(x,y) \ge \rho(y,z) - \rho(x,z)$ 4).

Порівнюючи (3) і (4), отримуємо:

$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \le \rho(x,y)$ (5).

Нехай N - замкнена куля простору M з центром в точці a і радіусом $r: N = \overline{S}(a,r)$.

Нехай x_0 - гранична точка множини, тоді, по лемі 2, , існує $\{x_n\}$ в N, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тобто за визначенням збіжності: $\rho(a,x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ потрібно показати, що $x_0 \in \overline{S}(a,r)$, тобто, що $\rho(a,x_0) \le r$. $\alpha_n = \rho(a,x_0) \le r$. (6) – за визначенням. Покажемо, що $\{\alpha_n\} \to \alpha_0 = \rho(a,x_0)$. Дійсно, з (5) отримуємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує n_0, що при $n > n_0$: $|\rho(x_n,a) - \rho(x_0,a)| \le \rho(x_n,x_0) < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$. Переходячи до межі при $n \to \infty$ в (6), маємо: $\alpha_0 = \rho(a,x_0) \le r$, тобто $x_0 \in N$.

<u>Мають місце наступні властивості замкнених множин.</u>

1. $\overline{\overline{N}} = \overline{N} = N$ (оскільки множина замкнена).

2. Об'єднання скінченного (!) числа замкнутої множини – замкнена множина: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} N_i = N$.

3. Перетин довільного числа замкнених множин – замкнена множина. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} N_i = N$. (довести самостійно).

<u>Означення.</u> Множина O, яка є доповненням замкненої множини до простору M називається відкритою. Відкриті множини мають такі властивості:

1). Об'єднання довільного числа відкритих множин – множина відкрита.

2). Перетин скінченного числа відкритих множин – множина відкрита.

3). Множина O відкрита тоді і тільки тоді, коли для кожної точки $a \in O$ знайдеться окіл, який належить множині O.

(Довести самостійно).

Означення. Множина T називається топологічним простором, якщо в ній виділені такі підмножини $\{T_i\} W$ (i пробігає деяку підмножину довільної потужності), що виконуються умови:

1). T і порожня множина належить W ;

2). Об'єднання довільного числа T_i належить W;

3). Перетин скінченного числа T_i належить W.

Метричний простір M є топологічним, роль підмножин T_i грають відкриті множини в M. Сам простір M і є відкритими.

Означення. Точка множини N метричного простору M називається ізольованою точкою множини N, якщо вона не є граничною точкою множини N.

Означення. Множина N називається досконалою, якщо вона замкнута і не містить ізольованих точок, тобто якщо $M = M'$.

Означення. Множина P метричного простору M називається щільною в множині N того ж простору M, якщо $\overline{P} \supset N$, множина P щільна в самому просторі, називається усюди щільним $\left(\overline{P} = M\right)$.

Означення. Метричний простір M називається сепарабельним, якщо в ньому існує зчисленна, усюди щільна множина.

Приклад. Числова пряма є сепарабельним метричним простором (множина раціональних чисел усюди щільна на числовій прямій).

§6. Зчисленні множини

Множина *A,*для елементів якої заданий закон відповідності її елементів множини *N* натуральних чисел називається ***зчисленною*** множиною.

Іншими словами, зчисленна множина *A* - це така множина, всі елементи якої можна занумерувати числами 1,2,3,..., тобто можна вказати спосіб, за яким першому елементу множини *A* ставиться у відповідність число 1, другому - число 2, третьому - число 3 і т.д. Отже, будь-яку зчисленну множину *A* можна подати у вигляді $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Неважко переконатись, що множини квадратів натуральних чисел, усіх парних чисел, усіх непарних чисел, чисел кратних деякому числу *k*, чисел, які закінчуються парою цифр 00 тощо є зчисленними множинами.

Перейдемо до вивчення властивостей зліченних множин.

Теорема 1.1. Будь-яка нескінченна множина M містить зчисленну підмножину.

Доведення. Оскільки M нескінченна множина, візьмемо два елементи $a_1,b_1 \in M$ ($a_1 \neq b_1$). Очевидно, множина $M\backslash\{a_1,b_1\}$ є нескінченною множиною. Тоді візьмемо наступні два нові елементи $a_2,b_2 \in M \backslash\{a_1, b_1\}$ ($a_2 \neq b_2$) і т.д. Таким чином, ми виділимо з множини M дві зчисленні множини $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\} \subseteq M$ і $B=\{b_1,b_2,...,b_n,...\} \subseteq M$. Це дозволяє підсилити формулювання теореми. А саме: будь-яка нескінченна множина M містить зчисленну підмножину A і при цьому множина $M \setminus A$ є нескінченною множиною (оскільки $B \subseteq M \setminus A$).

Теорема 1.2. Будь-яка підмножина зчисленної множини є або скінченною, або зчисленною множиною.

Доведення. Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ - зчисленна множина і $B \subseteq A$. Отже, $B=\{a_1,a_2,...,a_k,...\}$ і можливі дві ситуації: або послідовність у фігурних дужках уривається на деякому елементі, тоді B - скінченна множина, або послідовність у дужках нескінченна, для якої, встановлюючи відповідність (l,a_l), $l \in N$, одержуємо, що B - зчисленна множина.

З теорем 1.1 і 1.2, зокрема, випливає, що зчисленні множини є до певної міри найпростішими нескінченними множинами, бо, з одного боку, вони містяться в будь-якій нескінченній множині, а з другого - містять в собі тільки скінченні множини, або нескінченні множини, які є зчисленними.

Теорема 1.3. Об’єднання скінченної або зчисленної сукупності зчисленних множин є зчисленною множиною.

Доведення. Розглянемо спочатку скінченну сукупність зчисленних множин $\{A_1,A_2,...,A_k\}$, де $A_i=\{a_1^i,a_2^i,...,a_n^i,...\}$, $i=1,2,...,k$. Запишемо всі елементи множин $A_1,A_2,...,A_k$ в рядок таким чином: $a_1^1,a_1^2,...,a_1^k,a_2^1,a_2^2,...,a_2^k,...,a_n^1,a_n^2,...,a_n^k,...$.

Перенумеруємо записані елементи в порядку їх розташування в рядку. При цьому елемент, який вже одержав свій номер і повторно з'являється в рядку, з подальшої нумерації вилучається. В результаті кожен елемент об’єднання одержить свій номер, що і потрібно було довести.

У випадку зчисленної сукупності множин $A_i=\{a_1^i,a_2^i,...,a_n^i,...\}$, $i=1,2,...$, перепишемо всі елементи множин A_i у такому порядку: $a_1^1,a_1^2,a_2^1,a_1^3,a_2^2,a_3^1,a_1^4,a_2^3,a_3^2,a_4^1,....$

Принцип переписування елементів множин A зображений за допомогою стрілок на рис.1.4.

$$
\begin{array}{ll}
a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,\ ...,\ a_n^1,.... & A_1 \\
a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ ...,\ a_n^2,.... & A_2 \\
a_1^3,\ a_2^3,\ a_3^3,\ ...,\ a_n^3,.... & A_3 \\
a_1^4,\ a_2^4,\ a_3^4,\ ...,\ a_n^4,.... & A_4
\end{array}
$$

..................Рис. 1.4.

Далі проводимо міркування аналогічні випадку скінченної сукупності множин. Теорему доведено.

З теореми 1.3 випливає низка цікавих наслідків.

Наслідок 1.3.1. Множина Z всіх цілих чисел зчисленна.

Справді, подамо множину Z у вигляді $Z = N \cup \{0\} \cup N'$, де $N' = \{ -1,-2,-3,... \}$ - множина від’ємних цілих чисел, яка, очевидно, є зчисленною.

Числова множина W називається *щільною*, якщо для будь-якої пари чисел $a,b \in W$ $(a<b)$ завжди існує число $c \in W$ таке, що $a<c<b$.

Безпосередньо з означення випливає, що щільна множина завжди є нескінченною. Більш того, для кожної пари чисел $a,b \in W$ існує безліч чисел $c \in W$, для яких виконується $a<c<b$.

Очевидно, що множина Z цілих чисел, а також будь-яка її підмножина (зокрема, множина N натуральних чисел) - не щільні. У той же час множина Q раціональних чисел є щільною множиною. Справді, для будь-яких раціональних чисел r_1 і r_2 $(r_1<r_2)$ число $r=(r_1+r_2)/2$ задовольняє нерівності $r_1<r<r_2$. Зокрема, для всіх чисел r' з нескінченної множини раціональних чисел $\{r_1+(r_2-r_1)/2^i \mid i=1,2,...\}$ виконуються нерівності $r_1<r' <r_2$.

Здавалося б зі щільності множини раціональних чисел повинно було б випливати, що ця множина має більшу потужність, ніж множина N або множина Z. Однак має місце таке твердження.

Наслідок 1.3.2. Множина Q всіх раціональних чисел зчисленна.

Справді, множину Q можна подати як об'єднання таких зчисленних множин:

$A_1 = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,...\}$ - усі цілі числа (або дроби виду $\frac{n}{1}$, $n\in Z$),

$A_2 = \{\frac{0}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2}{2},-\frac{2}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},...\}$ - усі дроби виду $\frac{n}{2}$, $n\in Z$.

$A_3 = \{\frac{0}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{3},-\frac{3}{3},...\}$ - усі дроби виду $\frac{n}{3}$, $n\in Z$,

....

$A_k = \{\frac{0}{k},\frac{1}{k},-\frac{1}{k},\frac{2}{k},-\frac{2}{k},\frac{3}{k},-\frac{3}{k},...\}$ - усі дроби виду $\frac{n}{k}$, $n\in Z$,

Наслідок 1.3.3. Декартів добуток $A\times B$ зчисленних множин A і B є зчисленною множиною.

Справедливість цього твердження випливає з того, що множину всіх пар $(a,b)\in A\times B$, де $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$ і $B=\{b_1,b_2,...,b_n,...\}$ можна подати як об'єднання такої зчисленної сукупності зчисленних множин.

$D_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2),..., (a_1, b_n),...\}$,

$D_2 = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2),..., (a_2, b_n),...\}$,

....

$D_k = \{(a_k, b_1), (a_k, b_2),..., (a_k, b_n),...\}$,

....

Зокрема, множина всіх точок координатної площини з раціональними координатами зчисленна.

Наслідок 1.3.4. Декартів добуток $P_n=A_1\times A_2\times...\times A_n$ зчисленних множин A_1, A_2,..., A_n - є зчисленною множиною для довільного n.

Доведення проведемо методом математичної індукції.

Для n=1 P_1=A_1 і справедливість твердження випливає з умови зчисленності множини A_1. Нехай $P_{k-1}=A_1\times A_2\times...\times A_{k-1}$ - зчисленна множина. Тоді зчисленність множини $P_k = P_{k-1}\times A_k$ випливає з наслідку 1.4.3.

Наслідок 1.3.5. Множина P усіх многочленів $p(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ з раціональними коефіцієнтами $a_i\in Q$, i=0,1,...,n, n=0,1,2,..., є зчисленною множиною.

Множину P можна подати у вигляді об'єднання зчисленної сукупності множин P_n, де P_n - це множина многочленів з раціональними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n, n=0,1,2,.... Разом із тим, будь-якому многочлену $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ ...+a_{n-1}x+a_n$ з множини P_n можна поставити у відповідність кортеж $(a_0,a_1,a_2,...,a_n)$, який складається з раціональних чисел a_i - коефіцієнтів цього многочлена. Очевидно, ця відповідність є взаємно однозначною. Отже, $P_n \sim Q^{n+1}$. Тоді з наслідків 1.3.2 і 1.3.4 випливає, що множина P_n - зчисленна, а тому зчисленною є і множина P.

Назвемо число *алгебраїчним*, якщо воно є коренем деякого многочлена з раціональними коефіцієнтами. Відомо, що кожен такий многочлен має скінченну кількість коренів (рівну степеню многочлена). Таким чином, множину всіх алгебраїчних чисел можна подати у вигляді об'єднання зчисленної сукупності скінченних множин. Отже, має місце

Наслідок 1.3.6. Множина всіх алгебраїчних чисел зчисленна.

Наслідок 1.3.7. Множина A всіх слів у заданому скінченному алфавіті A зчисленна.

Справедливість твердження випливає з того, що

$A^* = \{e\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup ...,$

тобто множина A^* є зчисленним об'єднанням скінченних множин $\{e\}$ і A^n, де A^n - множина всіх слів довжини n в алфавіті A.

§7. Поповнення метричних просторів.

Означення. Хай дано два метричні простори M і L. Нехай відстань в M $\rho_m(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in M)$ і в L $\rho_l(y_1, y_2)$ $(y_1, y_2 \in L)$. Якщо між елементами M і L можна встановити таку взаємно однозначну відповідність, щоб $\rho_m(x_1, x_2) = \rho_l(f(x_1), f(x_2))$, то простори M і L називаються ізометричними.

Нехай даний метричний простір M_0, допустимо, що він не є повним. Покажемо, що існує інший метричний простір $\tilde{M}$, повний і такий, що в ньому існує, $M' < \tilde{M}$, лежаче усюди щільно в $\tilde{M}$ ($\overline{M'} = \tilde{M}$) і ізометричне простору M_0: $M' \cong M_0$.

Простір $\tilde{M}$ називається доповненням M_0. Розглянемо фундаментальні послідовності в M_0: $\{x_n\}, \{y_n\}$.

Будемо вважати фундаментальні послідовності еквівалентними, якщо $\rho(x_n, x_n') \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

До одного класу віднесемо еквівалентні послідовності, клас позначатимемо $\tilde{x}$. Ці класи приймемо за елементи нового простору $\tilde{M}$. Нехай $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ - елементи $\tilde{M}$ які визначаються послідовностями $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. Введемо віддаль в $\tilde{M}$ таким чином: $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ (*).

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$ існує. Маємо:

$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n)$; звідси:

$(\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, y_n); \rho(x_m, y_n) \le \rho(x_m, y_m) + \rho(y_m, y_n))$

$\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$.

Міняючи місцями m і n:

$\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m)$, тобто

$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \le \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \to 0$ при n, m прямують до нескінченості, тобто числова послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}$ задовольняє умову Коші і існує межа $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.

Покажемо, що (*) не залежить від вибору представників $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ в класах $\tilde{x}$ і $\tilde{y}$ маємо при інших представниках $\{x_n'\}$ і $\{y_n'\}$:

$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, x_n') + \rho(x_n', y_n') + \rho(y_n', y_n)$, тобто

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n')$;

Аналогічно: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n')$.

Перевіримо виконання аксіом метрики:

a) Оскільки $\rho(x_n, y_n) \geq 0$ то і $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \geq 0$; рівність $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ означає, що $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ належать одному класу, тобто $\tilde{x} = \tilde{y}$ оскільки $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ довільні.

b) $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(\tilde{y}, \tilde{x})$ - очевидно.

c) якщо $\{x_n\} \in \tilde{x}$; $\{y_n\} \in \tilde{y}$; $\{z_n\} \in \tilde{z}$ то маємо: $\rho(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim\limits_{n} \rho(x_n, y_n) + \lim\limits_{n} \rho(y_n, z_n) = \rho(\tilde{x}, \tilde{y}) + \rho(\tilde{y}, \tilde{z})$.

Доведемо, що $\tilde{M}$ - повний простір. Візьмемо послідовність $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n, ...\}$ елементів простору $\tilde{M}$ (фундаментальну), що $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. У кожному класі $\tilde{x}_n$ візьмемо деяку послідовність $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...\}$ оскільки це фундаментальна послідовність, то можна вибрати таке k_n що: $\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \dfrac{1}{n}$ для $p > k_n$. Розглянемо послідовність $\{x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, ..., x_{k_n}^{(n)}, ...\}$ покажемо, що вона фундаментальна. Маємо: $\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \leq \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(n)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + \rho(x_p^{(n)}, x_{k_m}^{(m)})$ (1). Нехай дане довільне $\varepsilon > 0$ оскільки $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0$ при n, m прямує до нескінченості то існує n_0 , що при $n, m \geq n_0$ $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \lim\limits_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тобто для $n, m \geq n_0$ і достатньо великих p матимемо $\rho(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ цьому можна вважати n_0 таким, що $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Зафіксувавши $n, m \geq n_0$ вважатимемо $p > k_m$ і $p > k_n$. Тоді, через вибір чисел k_m і k_n $\rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{4}$; $\rho(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) < \dfrac{1}{m} < \dfrac{\varepsilon}{4}$ (3). З (1) (2) (3) випливає, що при $n, m \geq n_0$ $\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) \leq \varepsilon$, тобто $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ фундаментальна. Позначимо клас, що містить цю послідовність через $\tilde{x}$. Покажемо, що $\tilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{x}$. Маємо: $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim\limits_{p} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq \lim\limits_{p\to\infty} \rho(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) + \lim\limits_{p\to\infty} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{p} \rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)})$ (4).

Оскільки $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ фундаментальна, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує n_0 що $\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n, p \geq n_0$ тобто границя $\rho(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ (5) при $n \geq n_0$. При цьому можна припустити, що $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. З (4) і (5) випливає, що при $n \geq n_0$ $\rho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon$ тобто $\{\tilde{x}_n\} \to \tilde{x}$ і повнота $\tilde{M}$ доведена.

Введемо в розгляд стаціонарні послідовності: $\{x, ..., x, ...\}$, які, очевидно, є фундаментальними, тобто відносяться кожна до деякого класу – елементу $\tilde{M}$. Очевидно, що до одного і того ж класу належить лише одна стаціонарна послідовність. Якщо тепер: $\{x,...,x,...\}\in\tilde{x}$; $\{y,...,y,...\}\in\tilde{y}$ то, очевидно: $\rho(x,y)=\rho(\tilde{x},\tilde{y})$. Покажемо тепер, що M_0 ізометричний деякій підмножині простору $\tilde{M}$, усюди щільній в $\tilde{M}$. Віднесемо до M' всі класи $\tilde{x}$ серед послідовностей яких є стаціонарні послідовності. Маємо: $\tilde{x}$ належить M' і $\tilde{y}$ належить M', то $\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\rho(x,y)$ $(\{x\}\in\tilde{x};\ \{y\}\in\tilde{y})$. Тому ця відповідність є ізометрія. Легко бачити, що M' усюди щільно в $\tilde{M}$, тобто що для будь-якого $\varepsilon>0$ і будь-якого $\tilde{x}\in X$ існує $\tilde{x}_\varepsilon$ належить M', що $\rho(\tilde{x},\tilde{x}_\varepsilon)<\varepsilon$. Насправді, нехай $\tilde{x}$ - клас, що містить в собі фундаментальну послідовність $\{x_n\}$. Візьмемо таке n, що $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ при $m>n$. Розглянемо стаціонарну послідовність $\{x_n,...,x_n,...\}$ і позначимо через $\tilde{x}_\varepsilon$ клас, що містить її. Очевидно, що $\tilde{x}_\varepsilon$ належить x' і: $\rho(\tilde{x},\tilde{x}_\varepsilon)=$ границя $\rho(x_m,x_n)\le\varepsilon$ - доведено. Показано, що поповнення простору однозначне з точністю до ізометрії. Нехай існує $\hat{M}$, що містить $\hat{M}'\cong M_0$ і $\overline{\hat{M}'}=\hat{M}$. Будь-яка точка $\tilde{y}\in\hat{M}$ є границею послідовності точок з M_0 оскільки ця послідовність фундаментальна, то вона визначає деякий елемент $\tilde{x}$ належить $\tilde{M}$. Цей елемент $\tilde{x}$ ставимо у відповідність елементу. Навпаки, нехай $\tilde{\zeta}$ - елемент $\hat{M}$ і $\{\zeta_n\}\in\tilde{\zeta}$ тоді $\{\zeta_n\}$ визначає деякий елемент $\tilde{\zeta}\in\hat{M}$ цей елемент ставимо у відповідність між елементами $\tilde{M}$ і $\hat{M}$ взаємно однозначне, крім того: $\rho(\tilde{x},\tilde{\zeta})=\lim\limits_{n}\rho(x_n,\zeta_n)=\rho(\tilde{y},\tilde{y})$. Якщо x_n прямує x і y_n прямує y, то $\rho(x_n,y_n)$ прямує $\rho(x,y)$. Доведено.

Теорема. Нехай в повному метричному просторі M дана послідовність замкнених куль, накладених одна на одну (тобто кожна наступна куля міститься в попередній), радіуси яких прямує до 0. Тоді існує одна і лише одна точка, що належить всім цим кулям.

Нехай кулі будуть:

$\overline{S}(a_1,\varepsilon_1),\overline{S}(a_2,\varepsilon_2),...,\overline{S}(a_n,\varepsilon_n),...$; по умові: $\overline{S}_1\supset\overline{S}_2\supset...\supset\overline{S}_n\supset...$ $(\overline{S}_n=\overline{S}(a_n,\varepsilon_n))$. Розглянемо послідовність центрів цих куль: $\{a_n\}$. Оскільки $\overline{S}_{n+p}\subset\overline{S}_n$, то a_n+p належить $\overline{S}(a_n,\varepsilon_n)$, тому: $\rho(a_n+p,a_n)\le\varepsilon_n$, тобто $\rho(a_n+p,a_n)$ прямує до 0 при n прямує до ∞, тобто послідовність $\{a_n\}$ фундаментальна. Оскільки M повний простір, то $\{a_n\}\to a\in x$. Візьмемо будь-яку кулю $\overline{S_k}$ де k- фіксовано, тоді $a_k,a_{k+1},...,a_{k+n},...\in\overline{S_k}$. Через замкнутість куль $\overline{S_k}$ межа a послідовності $\{a_k,a_{k+1},...,a_{k+n},...\}$ також належать $\overline{S_k}$, тобто $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ належить всім кулям. Допустимо, що існує b що належить всім кулям і $b\neq a$ так що $\rho(a,b)=\delta>0$. Оскільки крапки a і b належить $\overline{S}_n$ то повинні мати:

$\delta = \rho(a,b) \le \rho(a,a_n) + \rho(a_n,b) \le 2\varepsilon_n$ але ε_n прямує до 0, при n прямує до ∞ тобто теорема доведена.

§8. Принцип стислих відображень

Нехай M_1 і M_2 - два метричні простори. Функція A, яка відображає M_1 в M_2 називається оператором і позначається

$y = A(x) = Ax \quad (x \in M_1; y \in M_2)$.

Теорема. Нехай в повному метричному просторі M заданий оператор A, що переводить елемент M знову в елементи цього простору. Нехай, крім того, для всіх x і y з M

(1) $\rho(A(x);A(y)) \le \alpha\rho(x,y)$, де $\alpha < 1$ і не залежить від x і y. Тоді існує одна і лише одна точка x_0 така, що $A(x_0) = x_0$. Точка x_0 називається нерухомою точкою оператора A.

Доведення.

Візьмемо довільний фіксований елемент x належить M отримаємо: $x_1 = A(x), x_2 = A(x_1), \ldots, x_n = A(x_{n-1}), \ldots$. Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною. Для цього відмітимо, що

$\rho(x_1, x_2) = \rho(A(x), A(x_1)) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, A(x))$

$\rho(x_2, x_3) = \rho(A(x_1), A(x_2)) \le \alpha\rho(x_1, x_2) = \alpha^2\rho(x, A(x))$

....

$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n\rho(x, A(x))$

....

Далі:

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1})\rho(x, A(x)) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, A(x)) \quad (2)$$

Оскільки по умові $\alpha \langle 1$, то $\rho(x_n, x_{n+p}) \le \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, A(x))$ звідки випливає, що $\rho(x_n, x_{n+p})$ прямує до 0, при n прямує до ∞, $p > 0$. Значить $\{x_n\}$ фундаментальна. Через повноту простору M існує елемент x_0 належить M ,що $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доведемо, що $A(x_0) = x_0$. Маємо:

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, A(x_0)) = \rho(x_0, x_n) + \rho(A(x_{n-1}), A(x_0)) \le \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0).$$

Але при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує N що при $n > N$ $\rho(x_0, x_p) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\rho(x_0, x_{n-1}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ тобто $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$ оскільки $\varepsilon > 0$ довільне число, то $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, тобто $A(x_0) = x_0$ що і потрібно було довести.

Припустимо, що існують два елементи x_0, y_0 в M, що $A(x_0) = x_0$; $A(y_0) = y_0$ тоді $\rho(x_0, y_0) = \rho(A(x_0), A(y_0)) \le \alpha\rho(x_0, y_0)$. Якщо припустити, що $\rho(x_0, y_0) > 0$, то і отримаємо $1 \le \alpha$ що неможливо. Доведено.

Зауваження. Якщо перейти в (2) до границі при p прямує до нескінченості, то отримаємо оцінку помилки n-ого наближення: $\rho(x_n, x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax)$.

Зауваження. Можна інакше сформулювати цю теорему: якщо виконується умова (1), то рівняння $A(x) = x$ має тільки один розвязокв повному метричному просторі.

Приклади.

1) Існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння. Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма 2-го ряду:

$$x(s) = \lambda\int_a^b k(s,t)x(t)dt + f(s) \quad (3).$$

Функція $x(s)$ визначена на $[a,b]$ функція $k(s,t)$ (називається ядром рівняння) задана в квадраті $\Delta: a \le s,t \le b$ а вільний член $f(s)$ заданий на відрізку $[a,b]$.

λ - числовий параметр. Для простоти розглянемо тільки випадок,коли всі функції в рівнянні дійсні і неперервні, параметр λ теж дійсний.

Покажемо, що при всіх λ достатньо малих по абсолютній величині, до рівняння (3) може бути застосований принцип стислих відображень.

Праву частину (3) можна розглядати як оператор ux, визначений в просторі $C^2[a,b]$ неперервних функцій, заданих на відрізку $[a,b]$ із значеннями в тому ж просторі. Нехай $M = \max|K(s,t)|$ у квадраті Δ;

$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, тоді при .

Нехай $x, \tilde{x} \in \tilde{C}[a,b]$ $y = Ux$, $\tilde{y} = U\tilde{x}$, тобто

$$y(s) = \lambda\int_a^b k(s,t)x(t)dt + f(s)$$

$\tilde{y}(s) = \lambda\int_a^b k(s,t)\tilde{x}(t)dt + f(s)$. Це означає, що $y(s) - \tilde{y}(s) = \lambda\int_a^b k(s,t)[x(t) - \tilde{x}(t)]dt$. Тобто при будь-якому s належить $[a,b]$:

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| \le |\lambda|\int_a^b |k(s,t)||x(t) - \tilde{x}(t)|dt \le |\lambda| M \max|x(t) - \tilde{x}(t)|(b-a) = |\lambda| M (b-a)\rho(x, \tilde{x}),$$

звідки:

$\rho(y, \tilde{y}) \leq \alpha\,\rho(x, \tilde{x})$, де $\alpha = |\lambda| M(b-a) < 1$.

Оскільки знаходження розвязку рівняння (3) зводиться до відшукання нерухомих точок оператора і те, отже, при $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ рівняння (3) має єдиний розвязок при будь-якому вільному члені і цей розв'язок можна отримати методом послідовних наближень.

2) Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

Знайти розвязок рівняння

$\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$, для якого $x(t_0) = x_0$. .

Припустимо, що $f(t, x)$ неперервна по обом змінним в деякому околі Δ точки (t_0, x_{01}) і задовольняє в цьому околі по змінній x умову Ліпшиця:

$\left| f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}}) \right| \leq L\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right|$.

Тоді задача Коші еквівалентна знаходженню розв'язку інтегрального рівняння

$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$, для якого можна застосувати принцип стислих відображень.

§9.Ортонормовані системи в евклідових просторах

Нехай Е – евклідовий простір над полем дійсних чисел.

Елементи x, y належать Е називаються ортогональними, якщо скалярний добуток ((x, y) = 0 (x ≠ 0, y ≠ 0)

Система елементів $\{e_i\}$ (e_i належить Е, $e_i \neq 0$) називається ортогональною, якщо $(e_i, e_j) = 0$, при $i \neq j$.

Система векторів $\{e_i\}$ (e_i належить Е, $e_i \neq 0$) називається ортонормованою, якщо вона ортогональна і для будь-якого i $\| e_i \| = 1$.

Кожній ортогональній системі можна поставити у відповідність ортонормовану систему: $\{e_i\} \rightarrow \{\overline{e_i}\}$, де

$\left\{ \overline{e_i} = \dfrac{e_i}{\|e_i\|} \right\}$, але $\|\overline{e_i}\| = 1$: $\|\overline{e_i}\| = \dfrac{1}{\|e_i\|} \cdot \|e_i\| = 1$.

§10. Метод ортогоналізації системи векторів по Шмідту

Нехай h_1, h_2 ., h_n . – система лінійно незалежних (над R) елементів простору E. Шляхом деяких перетворень з цієї системи можна отримати ортонормовану. Вважаємо $e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$. Нехай $g_2=h_2-c_{21}e_1$. підберемо число c_{21} так, щоб g_2 було ортогональне e_1. Очевидно, для цього потрібно взяти:

$c_{21}=(h_2,e_1)$. Вважаємо $e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}$; при цьому $\|g_2\| \neq 0$ оскільки інакше $g_2=0$ і елементи h_1 і h_2 лінійно залежні, що є протиріччям з умовою. Нехай $e_1,e_2.,e_{к-1}$ вже побудовані. Візьмемо $g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}e_i$ і підберемо числа c_{ki} так, щоб g_k було ортогональне $e_1,e_2.,e_{к-1}$; для цього потрібно взяти $c_{ki}=(h_k,e_i)$. Вважаємо, що $e_k = \frac{g_k}{\|g_k\|}$ при цьому знову $\|g_k\| \neq 0$ і так далі.

Означення. Ортонормовані система $\{e_i\}$ $(e_i \in E)$ називається повною, якщо замикання простору $L = \{e_i\}$ збігається з E, тобто: $\overline{L} = E$.

Теорема 1. У сепарабельному евклідовому просторі E завжди існує повна ортонормована система.

Доведення. Оскільки E сепарабельний, то існує зчисленна множина $M = \{u_i\}$ що $\overline{M} = E$. Позначимо через N підмножину всіх лінійно незалежних елементів з M: $N = \{v_i\}$. (Таку систему завжди можна побудувати). Розглянемо простір $L = \{v_i\}$ над R. Очевидно, що $T = \{u_i\} \subset L$ тобто $\overline{L} = E$. За методом Шмідта існує така система $L = \{e_i\}$, тобто маємо повну ортонормовану систему.

§11. Нерівність Бесселя. Замкнені системи. Ряди Фур`є.

Нехай E – сепарабельний евклідовий простір; $\{e_i\}$ - ортонормована система в E $(e_i \in E)$. Позначимо $c_i = (u, e_i)$ де u – фіксований елемент простору E; c_i – коефіцієнти Фур`є елементу u щодо системи $\{e_i\}$.

Ряд вигляду $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ називається рядом Фур`є елемента u щодо системи $\{e_i\}$.

Означення. Елемент x називається сумою ряду Фур`є , якщо $\|x - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ де $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$.

Розглянемо різницю $\|u - w_n\|^2$, де $w_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad (\alpha_i \in R)$ (2).

$\|u-w_n\|^2=(u-w_n,\ u-w_n)=(u,u)-2(u,w_n)+(w_n,w_n)$. Оскільки $w_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i,\quad (\alpha_i\in R)$

то: $\|u-w_n\|^2=\|u\|^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i c_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\ 2}=\|u\|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-c_i)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}=\|u-w_n\|^2$, звідси

випливає, що $\|u-w_n\|$ набуває найменшого значення при $\alpha_i=c_i$ для фіксованого n.

Візьмемо $\alpha_i=c_i$, тоді одержуємо: $\|u\|^2-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}\geq 0$, тобто $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^{\ 2}\leq\|u\|^2$ - нерівність має місце для довільних u і n, тобто $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i^{\ 2}\leq\|u\|^2$ -нерівність Бесселя.

Рівність (називається рівністю Парсеваля-Стєклова) виконується для так званих замкнених систем. Якщо система $\{e_i\}$ замкнена, то з рівності Парсеваля-Стеклова випливає, що $\left\|u-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i e_i\right\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, тобто u – сума ряду Фур`є.

<u>Теорема 2</u>. Якщо $\{e_i\}$ замкнена система в сепарабельному евклідовому просторі, то елемент u є сумою ряду Фур`є.(1)

$u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i e_i$, де $c_i=(u,e_i)$.

<u>Теорема 3</u>. Система $\{e_i\}$ сепарабельного евклідового простору Е повна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена.

<u>Доведення</u>. Нехай система $\{e_i\}$ повна в просторі Е, це означає що $\overline{L}=\mathrm{E}$ де $L=\{e_i\}$ тобто для кожного $u\in E,\varepsilon>0$ існує елемент $\overline{u_n}=\sum\alpha_i e_i\in L$, що $\|u-u_n\|<\varepsilon$
Тоді отримаємо з урахуванням попереднього, що $u_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i e_i$. Далі: $\|u-u_n\|^2<\varepsilon^2$

тоді: $\|u-u_n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ і $\|u-u_n\|^2=\|u\|^2-\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i^2$

$\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i^2\leq\|u\|^2\right)$, тобто $\|u\|^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i^2$, це означає, що система замкнена.

Достатність. Нехай система $\{e_i\}$ замкнена, тоді виконується рівність Парсеваля:

$\|u\|^2=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i^2\quad (u\in E;c_i=(u,e_i))$. Потрібно довести, що $\{e_i\}$ - повна система. Нехай $L=\{e_i\}$. Покажемо, що $\overline{L}=E$. Візьмемо довільний елемент $u=E$, тоді маємо:

$u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i e_i$, тобто: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$, де $u_n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i e_i$, тобто $\overline{L}=E$.

Доведено.

Наслідок 1. З теорем 1 і 3, випливає що в сепарабельном евклідовому просторі завжди існує замкнена система.

Приклад. Простір $C^2[a,b]$ де $a=-\pi; b=\pi$, система: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}};\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}};...;\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}};\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\dots$

Наслідок 2. Якщо система $\{e_i\}$ сепарабельного евклідового простору E замкнена, то не існує ненульового елементу u належить E, який був би ортогональний всім елементам $\{e_i\}$.

Доведення. Нехай $(u,e_i)=0$, $(i=1,2,...)$. Одержимо: $c_i=(u,e_i)=0$ для всіх i, тобто $u=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i=\sum_{i=1}^{\infty}0\cdot e_i=0$. Доведено.

§12. Деякі властивості гільбертових просторів

Розглядатимемо тільки сепарабельні гілбертові простори H. Всі попередні теореми мають місце і для гільбертових просторів.

Лема 1. Нехай x_n прямує x $(x_n, x\in H)$ тоді для будь-якого $(u\in H)$ скалярний добуток є неперервною функцією.

Доведення. $|(x_n,u)-(x,u)|=|(x_n-x,u)|\le\|x_n-x\|\cdot\|u\|$ нерівність Коші-Буняковського.

Лема 2. Нехай H - сепарабельний гільбертовий простір E - евклідовий підпростір простору H, тоді E - сепарабельний евклідовий підпростір.

Доведення. Нехай H - сепарабельний гільбертовий простір, тоді існує зчисленна множина $T\subset H$ щільна в H: $T=\{u_1,u_2,...,u_n,...\}$. Покажемо, що в E існує множина S, зчисленна і щільна в E. Позначимо: $\alpha_n=\inf_{x\in L}\|u_n-x\|$. Розглянемо пару цілих чисел (n,m). З визначення випливає, що для цієї пари знайдеться такий елемент $V_{n,m}\in E$, що $\|u_n-v_{n,m}\|<\alpha_n+\frac{1}{m}(1)$. З іншого боку, оскільки T усюди щільна в H, для елементу $V\in E$ знайдеться $u_n\in T$, що $S=\{V_{n,m}\}$ усюди щільна в E. Маємо: $\|V-V_{n,m}\|\le\|V-u_n\|+\|u_n-V_{n,m}\|\le\alpha_n+\frac{1}{m}+\varepsilon<\varepsilon'$ (3) (оскільки $L<H$, то для достатньо великих n $\alpha_n<\varepsilon$). Отже E - сепарабельний простір.

Лема 3. Нехай H - сепарабельний гільбертовий простір. L - замкнений гільбертовий підпростір в H. Нехай L' - множина таких елементів $h\in H$ що $(h,x)=0$ для будь-яких L. (L'- ортогональне доповнення до L). Тоді L' є замкненим підпростором простору H.

Доведення. Покажемо, що L'- лінійний простір. Нехай $x, y \in L'$, тобто $(u, x) = 0, (u, y) = 0$ для кожного $u \in L$, тоді $(u, x + y) = (u, x) + (u, y) = 0$, тобто якщо $x, y \in L'$, то і $x + y \in L'$. Аналогічно доводиться для $\lambda x (\lambda \in R)$, тобто L' - лінійний

простір, оскільки всі аксіоми виконуються. Покажемо, що $\overline{L'} = L'$. Досить показати, що кожна послідовність, що збігається в $\overline{L'}$ елементів з L' має границю, що належить L'. Нехай $\{x_n\} \to x$ $(x_n \in L', x \in \overline{L'})$. Покажемо, що $x \in L'$: $(x_n, u) = 0 \forall u \in L$; $0 = \lim_{n\to\infty} (u, x_n) = (u, x)$, тобто $(u, x) = 0$ для кожного $u \in L'$, тобто $\overline{L'} = L'$.

Доведено.

Теорема. Нехай H - сепарабельний гільбертовий простір. L - замкнений гільбертовий підпростір простору H. Тоді будь-який елемент $h \in H$ однозначно представляється у вигляді: (I) $h = x + y$ $(x \in L, y \in L')$.

Доведення. З леми 2 випливає, що L - сепарабельний евклідовий простір, тоді з попереднього випливає, що в L існує повна система $\{l_i\} \in L$. Позначимо $c_i = (h, l_i)$, де $h \in H$.

Розглянемо ряд: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i$, - цей ряд збігається, оскільки система $\{l_i\}$ - повна.

Нехай n<m, тоді: $\|u_n - u_m\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i l_i - \sum_{i=1}^{m} c_i l_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=n+1}^{m} c_i l_i\right\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} c_i^{\,2} < \varepsilon$ - оскільки система $\{l_i\}$ ортонормована, то $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ збігається. Нехай x – сума ряду $\sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i$, тоді

$$y = h - \sum_{i=1}^{\infty} c_i - l_i$$

Покажемо, що $y \in L'$. Маємо: $(h - x, l_i) = (h, l_i) - (x, l_i) = c_i - c_i = 0$, оскільки $(x, li) = \sum_{i=1}^{\infty} (c_i l_i, l_j) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (l_i, l_j) = c_j$. Нехай u – довільний елемент з L. Покажемо, що $(y, u) = 0$. $(y, u) = \left(y, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i l_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (l_i, y) = 0$ (*) – з урахуванням того, що $\{l_i\}$ - замкнена система і того, що $(h - x, l_i) = 0$. Тобто $y \in L'$, тобто має місце розкладання $h = x + y$. Покажемо, що це представлення однозначне.

Нехай $h = x' + y'$ $(x' \in L, y' \in L')$. Маємо $(x - x') + (y - y') = 0$, оскільки x і $x' \in L$, то і $(x - x') \in L$, аналогічно $(y - y') \in L$, тоді $x - x' = 0$ в L, $y - y' = 0$ в L', тобто $x = x', y = y'$.

Доведено.

Зауваження. Якщо має місце формула (I), то H розкладається в пряму суму підпросторів L і L': $H = L \oplus L'$.

Нехай $\{l_i\}$ - замкнена система в сепарабельному гільбертовому просторі H. Позначимо $H_i = \{\alpha l_i \mid \alpha \in R\}$. Очевидно, що H_i - одновимірний гільбертовий простір; оскільки довільне $h \in H$: $h = \sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i$, то $H = \oplus \sum_{i=1}^{\infty} H_i$.

Приклад. Простір l_2 - є повним евклідовим і сепарабельним.

Розглянемо систему векторів:

$$\begin{cases} l_1 = (1,0,0,\ldots) \\ l_2 = (0,1,0,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(l_i, l_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Система $\{l_i\}$ є замкненою.

Рівність Парсеваля:

$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \quad c_i = (u, l_i)$ для кожного $u \in l$.

$u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$

$c_i = (u, l_i) = \alpha_i$, але $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$, тобто $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$, тобто $\{l_i\}$ - замкнена і повна система в l_2.

§13. Лінійні оператори і їх властивості

Нехай A- оператор $y = Ax \quad (x \in M_1, y \in M_2)$ називається лінійним, якщо

1) оператор адитивний, тобто:

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad (x_1, x_2 \in M_1)$;

2) він однорідний, тобто для всіх $x \in M_1$ і довільного дійсного λ:

$A(\lambda x) = \lambda Ax$.

Очевидно, що для випадку метричного простору неперервність оператора A означає, що для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, що сукупність образів елементів кулі $S(x, \delta)$ лежить в кулі $S(Ax, \varepsilon)$.

Означення. Нехай M1 і M2 – два нормовані простори, A – оператор, що відображає M_1 в M_2 і задовольняє умовам:

1) $A(x+y)=A(x)+A(y)\ \forall x,y\in M_1$;

2) якщо $\{x_n\}\to x_0\ (x_n, x_0\in M_1)$ то $\lim\limits_{n\to\infty}A(x_n)=A(x_0)$.

Тоді А називається лінійним оператором.

<u>Властивості лінійних операторів.</u>

1) $A(0)=\tilde{0}$ (0 – нульовий в М1; $\tilde{0}$ - в М2)

$A(x+0)=A(x)=A(x)+A(0)$, тобто $A(0)=\tilde{0}$. .

2) $A(-x)=-A(x)$

$A(x+(-x))=A(0)=\tilde{0}=A(x)+A(-x)=A(x)+(-A(x))$.

<u>Теорема.</u> Кожний лінійний оператор А: $M_1\to M_2$ є однорідним.

<u>Доведення.</u>

З властивості 2): $A(\alpha x)=-A(|\alpha|x)$ при $\alpha<0$, тобто потрібно провести доведення проводити при $\alpha>0$.

$A(nx)=A\left(\underbrace{x+...+x}_{n}\right)=nA(x)$ (n – натуральне). Нехай $r\in R$ - раціональне число, тоді $r=\dfrac{n}{m}$.

Маємо: $A\left(\dfrac{n}{m}x\right)=A\left(n\cdot\left(\dfrac{1}{m}x\right)\right)=nA\left(\dfrac{1}{m}x\right)$ (*)

Позначимо: $y=\dfrac{1}{m}x$, тобто $x=my$.

Далі: $A(x)=A(my)=mA(y)$, тобто $A(y)=\dfrac{1}{m}A(x)$.

Далі: $A\left(\dfrac{n}{m}x\right)=\dfrac{n}{m}A(x)$. Нехай тепер α - дійсне число тоді існує послідовність $\{r_n\}$ раціональних чисел, така що для кожного $\varepsilon>0$ існує N, що при $n>N$ $|r_n-\alpha|<\varepsilon$. Маємо:

$A(\alpha x)=\lim\limits_{n\to\infty}A(r_n x)=\lim\limits_{n\to\infty}r_n A(x)=\alpha A(x)$.

Доведено.

Приклад. Нехай $k(s,t)$ - неперервна функція $a\le s,t\le b$. Розглянемо простір $C[a,b]$. $\varphi(x)\in C[a,b]$; $\|\varphi\|=\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi(x)|$.

Розглянемо оператор:

$$A(\varphi(s))=\int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt,\ \varphi(t)\in C(a,b).$$

Оператор А називається інтегральним оператором Фредгольма.

Очевидно, що $A(\varphi(s))\in C[a,b]$. Покажемо, що А – лінійний оператор.

Адитивність А:

$$A(\varphi+\psi) = \int_a^b k(s,t)(\varphi(t)+\psi(t))dt = \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k(s,t)\psi(t)dt = A(\varphi)+A(\psi).$$

Нехай $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$, тобто $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$. $(t\in[a,b])$.

Тоді: $\lim\limits_{n\to\infty} A(\varphi_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b k(s,t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b k(s,t)\varphi(t)dt = A(\varphi)$. Тобто А – лінійний.

Теорема. Якщо адитивний оператор А неперервний в якій-небудь одній точці $x_0 \in M_1$, то він неперервний і в будь-якій точці простору M_1, тобто він лінійний.

Доведення.

Нехай $x_n \in M_1$ і $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Тоді одержуємо $x_n - x + x_0 \to x_0$. Внаслідок неперервний оператора А в точці x_0:

$Ax_n - Ax + Ax_0 = A(x_n - x + x_0) \to A(x_0)$, тоді , $Ax_n - Ax \to \tilde{0}$ $(\tilde{0} \in M_2)$, тобто $Ax_n \to Ax$.

Теорема. У скінченновимірному нормованому просторі кожний адитивний і однорідний оператор є лінійним.

Доведення.

Нехай простір M_1 скінченновимірний $x_1, x_2, \ldots, x_p$ – його базис, а оператор А адитивний і однорідний. Тоді кожен $x \in M_1$ має вигляд: $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ і $A(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (A(x_k))$. Якщо тепер $x^{(n)} \to x$ і $x^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k^{(n)} x_k$, то $a_k^{(n)} \to a_k$ при $n \to \infty$ $(k = 1,2,\ldots,p)$, тобто $Ax^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_k^{(n)}(Ax_k) \to \sum\limits_{k=1}^{p} a_k (Ax_k) = Ax$. Тобто А є лінійним.

Доведено.

Означення.

Нехай А: $M_1 \to M_2$, де M_1 і M_2 - нормовані простори. Якщо виконується: $\|Ax\| \le c\|x\|$ для всіх $x \in M_1$ і деякій const с, то А називається обмеженим (лінійним) оператором.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

§ 1. Простір L_2, повнота і сепарабельність

Виходячи з теорії міри, можна дати означення простору $L_2[a, b]$

Нехай f(x) – вимірна на сегменті $[a,b]$ функція така, що $\int_a^b f^2(x)dx < +\infty$,

де інтеграл існує як інтеграл Лебега. Будемо ототожнювати дві функції, які еквівалентні на $[a,b]$. Класи складені із еквівалентних між собою функцій з інтегровними квадратами , утворюють простір $L_2[a,b]$, який називають також *функціональним гільбертовим простором.* Формальне означення цього простору наводилося у розділі 2. Тому що цілий ряд властивостей гільбертового простору, в тому числі і простору $L_2[a,b]$, розглядалося вище, обмежимось тільки вивченням повноти і сепарабельності простору $L_2[a,b]$.

Зауважимо, що при додаванні елементів простору $L_2[a,b]$ і множенні їх на числа, необхідно визначити суму класів і добуток класу на число. Пропонуємо це зробити читачеві.

Теорема 1.(Ф. Ріса[27]). Кожна послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ ³ç L$\{ f_n(x)\}$ ³ç $L_2[a,b]$, фундаментальна по нормі в $L_2[a,b]$ збігається в розумінні цієї ж норми до деякої функції $f(x) \epsilon L_2[a,b]$.

Детальне доведення цієї теореми див., наприклад в [12]. Ідея доведення полягає в тому, що спочатку вибирається послідовність $\{ f_{n_k}(x)\}$ така, що

$$\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\| L_2 < \frac{1}{2^k}.$$

Із нерівності Коші – Буняковського

$$\int_a^b | f_{n_{k+1}}(x) - f n_k(x)|dx < \sqrt{b-a} \cdot \frac{1}{2^k},$$

І тому ряд

$$\int_a^b | f_{n_1}(x)\ |dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b | f_{nk+1}(x) - f_{n_k}(x)dx$$

збіжний. За теоремою Б. Лєві $f_{n_k}(x) \to f(x)$ майже скрізь. На підставі леми Фату

$$\| f - f_{n_k} \| < \frac{1}{2^k},$$

а із нерівності Мінковського отримуємо, що $f(x) \epsilon L_2[a,b]$. Використовуючи нерівність трикутника

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \| f_{n_k} - f\|,$$

легко побачити, що не тільки послідовність $\{ f_{n_k}(x)\}$ збігається в середньому до $f(x)$, але і вся послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається до цієї функції.

Сепарабельність простору $L_2[a,b]$ випливає з наступної теореми.

Теорема 2. Множина M обмежених, вимірних на сегменті $[a,b]$ функції скрізь щільна в $L_2[a,b]$.

Доведення. Нехай $f(x) \epsilon L_2[a,b]$. Із нерівності Коші-Буняковського

$$\int_a^b |f(x)|dx \le \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

випливає, що f(x) інтегровна на [a,b] і, отже майже скрізь скінчена на цьому сегменті.

Нехай

$A_n = \{x : |f(x)| \le n\}$

Всі множини A_n – вимірні, послідовність $\{ A_n \}$ зростаюча і $A = \lim_{n\to\infty} An$

відрізняється від [a,b] на множині міри нуль. Тому $\forall \varepsilon > 0$ ⍰n_0 таке, що при $n \ge n_0$

$$\mu\{[a,b]\backslash A_n\} < \varepsilon . \qquad (1)$$

Введемо функцію

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{при } |f(x)| \le n; \\ 0, \text{при } |f(x)| < n. \end{cases}$$

При цьому

$$\| f - f_n \|^2 = \int_{[a,b]\backslash A_n} f^2(x)dx$$

Враховуючи(1), із абсолютної неперервності інтеграла Лебега (див. вправу 5* до розділу 8) отримуємо, що при $n > n_0$

$$\| f - f_n \|^2 = \int_{[a,b]\backslash A_n} f^2(x)dx < \varepsilon^2$$

§2. Означення і приклади лінійних операторів

Найбільш доступними для вивчення є лінійні оператори. Разом з цим лінійні оператори представляють собою достатньо важливий клас операторів, що зустрічаються у алгебрі і аналізі.

Частковим випадком лінійних операторів є лінійні функціонали, які вивчалися детально раніше.

Нехай X та Y – два лінійні простори, і нехай задано оператор $y=Ax$, означений на X, з областю значень в Y.

Оператор $y=Ax$ називається *лінійним*, якщо

1)він адитивний, тобто $\forall x_1, x_2 \in X$

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2 ;$$

2)він однорідний, тобто $\forall$ x є X і будь-який дійсних або комплексних чисел

A(λx)=Ax.

Приклади.1. Оператор O, що переводить кожний елемент простору X в нульовий елемент простору Y:Ox для $\forall$x є X, очевидно, лінійний. Він називається *нульовим оператором*.

2. Оператор I, що переводить кожний елемент простору X в себе : Ix=x для $x \in X$, лінійний. Він називається *одиничним оператором*.

3.Оператор A, що переводить кожен елемент x є A фіксоване число, є лінійним оператором, який називається *оператором подібності.*

Нехай $A{:}X\to Y$ де X,Y – лінійні нормовані простори. Оператори A називається <u>неперервним</u> в точці $x_0 \in X$, якщо для $\forall\ \varepsilon>0$ ⍰ $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$, коли $\|x-x_0\|<\delta$, де перша норма береться в просторі Y, а друга в – X.

Наведемо приклади лінійних неперервних операторів в гільбертовому просторі.

1.Нехай $X=\ell_2$ μ $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$- нескінченна матриця така, що

$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^2\ = a^2<\infty$

Розглянемо оператор A, визначений рівністю: для x =()покладемо

$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\,\xi_j\ \ (i=1,2,\dots)$

або

$y=Ax$

де

$y=(\eta_1,\eta_2,\dots\eta_n,\dots)$.

Із нерівності Коші-Буняковського випливає, що ряд $\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\,\xi_j$ абсолютно збіжний у тому що

$$\sum_{*=1}^{\infty}|a_{ij}\xi_j|\ \le\ \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j^2<\infty}$$

Далі,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i^2=\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\,\xi_j\Big)^2\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}^2\ \sum_{j=1}^{\infty}\xi_j^2<\infty \qquad (1)$$

Тобто $y=\ell_2$.

Оператор A, очевидно лінійний. Його неперервність в точці $x_0=\ell_2$ буде випливати з таких міркувань. Із нерівності (1) отримуємо

$\|y\|\le a\|x\|$.

Візьмемо довільне $x_0=\ell_2$. Тоді

$\|\mathbf{A}x-\mathbf{A}x_0\|=\mathbf{A}\|(x-x_0)\|\le a\|x-x_0\|$

Якщо $\|x-x_0\|<\delta$, то $\|Ax-Ax_0\|<\varepsilon$, де $\varepsilon=a\delta$

2.Нехай $X=L_2[a,b]$ і

$$Y=Ax=\int_a^b K(t,s)x(s)ds \qquad (2)$$

- інтегральний оператор Фредгольма. Будемо вважати, що його ядро задовольняє умову:

$$\int_a^b\int_a^b K^2(t,s)dtds\ =B^2<\infty. \qquad (3)$$

Доведемо, що оператор(2) діє із $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$.

На підставі теореми Фубіні із умови (3)випливає, що $K(t,s)\in L_2[a,b]$

Отже, інтеграл (2) існує майже для всіх $t\in[a,b]$. Тоді на підставі нерівності Буняковського

$$y^2(t)=\Big[\int_a^b K(t,s)x(s)ds\Big]^2\le\int_a^b K^2(t,s)ds\int_a^b x^2(s)ds.$$

Тому що $x \in L_2[a, b]$, а $\int_a^b K^2(t,s)ds$ інтегровна по $t \in [a,b]$, то y^2(t) теж інтегровна на $[a, b]$ і

$$\int_a^b y^2(t)dt \le \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)dtds \int_a^b x^2(s)ds\,, \qquad (4)$$

Тобто $y(t) \in L_2[a, b]$

Лінійність оператора (2) очевидна, а неперервність отримується із співвідношення,

$||y|| \le \mathbf{B}\, ||x||,$

яке випливає з (4).

<u>Теорема.</u> Якщо лінійний оператор неперервний в будь-якій одній точці, то він неперервний скрізь на *X*.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з § 4, розділу IV.

§3. Обмежені оператори. Норма оператора

Нехай *X*,*Y* – лінійні нормовані оператори. Лінійний оператор $A{:}X \to Y$ називається <u>*обмеженим,*</u> якщо існує $M=const$ таке, що

$||\mathbf{A}x|| \le M||x||$

для будь-якого $x \in X$.

Очевидно, що норма взята в розумінні простору – в розумінні простору *X*.

Згідно з цим означенням, обмежений оператор *A* переводить кожну обмежену множину елементів $X_0 \subset X$ в обмежену множину елементів $Y_0 \subset Y$.

Найменша із сталих *M*, що задовольняє нерівність (1), називається <u>*нормою оператора*</u> і позначається $||\mathbf{A}||$.

Копіюючи доведення теореми 2 і 3 з § 4, отримуємо відповідно дві теореми.

<u>Теорема 1.</u> Для того, щоб лінійний оператор був неперервний, необхідно і достатньо, щоб він був обмежений.

<u>Теорема2.</u> Норма оператора *A* дорівнює

$$||\mathbf{A}|| = \sup_{||x|| \le 1} ||\mathbf{A}x|| \qquad (2)$$

Розглянемо декілька прикладів .

1. Норма нульового оператора, очевидно, дорівнює нулю: $||\mathbf{O}|| = 0$
2. Норма оператора необхідності $\mathrm{A}x=\lambda x$ дорівнює $|\lambda|$

Обчислення норм конкретних операторів є, звичайно, досить важке. Однак, часто буває достатньо оцінити норму оператора згори.

Розглянемо, наприклад, в просторі $C[a,b]$ інтегральний оператор Фредгольма

$$\mathrm{A}x = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \qquad x \in C[a,b]$$

з неперервним на квадраті *a* ядро

Очевидно,

$\|\mathbf{A}x\| \le \max\limits_{a\le t\le b} \left| \int_a^b K(t,s)x(s)ds \right| \le \max\limits_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|ds \cdot \max\limits_{a\le t\le b} |x(s)| =$
$=\|x\| \max\limits_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|ds.$

Отже,

$$\|\mathbf{A}\| \le \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|ds \qquad (3)$$

Можна довести, що має місце обернена нерівність(див., також вправу з до цього розділу), так що

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{a\le t\le b} \int_a^b |K(t,s)|ds \qquad (4)$$

§ 4. Простір лінійних обмежених операторів

Зафіксуємо два лінійні нормовані простори X і Y і розглянемо всі можливі лінійні обмежені оператори $A, B, C,\ldots$, що діють із X в Y.

Два оператори A і B називаються рівними , $A=B$, якщо

$Ax=Bx \quad \forall x \in X$

Над лінійними операторами, означеними в X , можна проводити різні дії, які приводять в результаті до нових лінійних операторів.

Визначимо суму лінійних операторів і добуток лінійного оператора на число за допомогою формули

$(A+B)x \overset{df}{=} Ax+Bx,$

$(\lambda A)x \overset{df}{=} \lambda Ax.$

Легко перевірити, що в результаті цих дій одержуються знову лінійні оператори, що діють із X в Y. Для вказаних дій мають місце алгебричні закони.

Очевидно, що за співвідношенням до введених операцій множина всіх лінійних операторів у свою чергу утворює лінійний простір. Зокрема, нулем його простору буде нульовий оператор. Даний лінійний простір буде лінійним нормованим простором. Справді, для кожного оператора визначена в попередньому параграфі норма оператора $\|\mathbf{A}\|$ і вказано ,що

$\|\mathbf{A}\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|\mathbf{A}x\|$

Перевіримо виконання аксіоми норми.

1. Очевидно, що $\|\mathbf{A}\| \ge 0$

Якщо $A=0$, то $\|\mathbf{A}\|=0$.

Нехай, навпаки, $\|\mathbf{A}\|=0$. Тоді із співвідношення (1) попереднього параграфу

$$\|\mathbf{A}x\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|x\| \qquad (1)$$

Звідки випливає, що для всіх x, тобто $A=0$.

2.Перевіримо справедливість нерівності трикутника:

$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|(\mathbf{A}+\mathbf{B})x\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|\mathbf{A}x+\mathbf{B}x\| \le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \{\|\mathbf{A}x\|+\|\mathbf{B}x\|\} \le$
$\le \sup\limits_{\|x\|\le 1} \{\|\mathbf{A}\|\cdot\|x\|+\|\mathbf{B}\|\cdot\|x\|\} \le \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$

3.Перевіримо справедливість властивості однорідності норми. Нехай - число. Тоді

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \| \lambda Ax\| == \sup_{\|x\|\leq 1} |\lambda|\cdot \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = |\lambda|\cdot \|A\|$$

Отже, сукупність всіх лінійних обмежених операторів, що діють із X в Y, яка називається <u>*простором всіх лінійних обмежених операторів , що діють із X в Y,*</u> є лінійним нормованим простором. Позначимо його символом L(X,Y). Інколи вживають також символ (X→Y).

Коли $Y=R_1$, тобто, коли розглядається простір лінійних функціоналів, означених на X, то простір L(X,Y) називається, як це було визначено в § 5 розділу IV, спряженим до X простором і позначається X*.

<u>Теорема.</u> Якщо Y повний простір, то простір L(X,Y) всіх лінійних обмежених операторів із X в Y теж буде повним простором і, отже, простором Банаха.

Доведення. Розглянемо послідовність операторів $\{A_n\}$ із L(X,Y) і припустимо, що

$\|A_{n+p} - A_n\| \to 0$

При $n\to\infty$ і довільного $p > 0$.

Із нерівності трикутника для різниці

$|\|A_{n+p}\| - \|\mathbf{A_n}\||\|\|A_{n+p} - A_n\|\to 0.$

Таким чином числова послідовність {} завдяки критерію Коші є збіжною. Така послідовність, як відомо, є обмеженою. Покладемо K .

Розглянемо довільний елемент x і розглянемо послідовність $\{A_n x\}$ з простору Y . Ця послідовність фундаментальна , тому що на підставі нерівності

$\|A_{n+p}x - A_n x \|= \| (A_{n+p}- A_n)x \|\leq \|A_{n+p} - A_n \|\cdot \|x \|\to 0$ (2)

при $n\to\infty$ і будь-якому $p > 0$.Внаслідок повноти простору Y існує $\lim_{n\to\infty} A_n x=y \in Y$ Таким чином , кожному $x \in X$ відповідає один елемент $y \in Y$, і одержується оператор $y=Ax$, що діє із X в Y. Цей оператор лінійний:

$$A(x_1+x_2)= \lim_{n\to\infty} A_n(x_1+x_2) = \lim_{n\to\infty} (A_nx_1+A_nx_2)= \lim_{n\to\infty} A_nx_1 + \lim_{n\to\infty} A_nx_2 = A_nx_1+A_nx_2 ,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A_n x = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n x= \lambda Ax$$

Даний оператор буде також обмеженим:

$$\|Ax \|= \|\lim_{n\to\infty} A_n x\|=\lim_{n\to\infty} \|A_n x\|\leq\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A_n} \|\cdot\|\mathbf{x}\|\leq\lim_{n\to\infty} K\cdot \|\mathbf{x} \|=K \|\mathbf{x} \|$$

Доведемо тепер, що $A_n\to A$ в розумінні збіжності нормі в просторі L(X,Y).

Із нерівності (2) , яка справедлива для всіх $x \in X$, і, отже , для $\{x: \|x\|\leq 1\}$ -

$\|A_{n+p}\, x - A_n x\|< \varepsilon$ (3)

при $n>N$ і будь-якого $p > 0$

Нехай $p\to\infty$. Тоді із (3)

$\|Ax - A_n x\|\leq \varepsilon$

при $n>N$. Тому, що це справедливо для довільного x такого, що $\|x \| \leq 1$, то

$$\|A - A_n\|= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A - An)x\|= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax - A_n x\|\leq \varepsilon$$

при $n>N$.

Розглянена тут збіжність по нормі в просторі операторів називається також *рівномірною збіжністю послідовності операторів.*

Якщо для довільного $x \in X$ при $n \to \infty$

$\| A_n x - Ax \| \to 0$,

то вважають, що має місце *точкова збіжність* послідовності $\{A_n\}$ із $L(X,Y)$ до A із $L(X,Y)$.

Очевидно, що із рівномірної збіжності випливає точкова. Обернене твердження неправильне.

Нехай X,Y,Z три лінійні нормовані простори, A і B – лінійні простори у $A: X \to Y$, $B: Y \to Z$. Визначимо тепер добуток C=BA, як оператор, що ставить відповідність елементу $x \in X$ елемент $B(Ax)$, із Z.

Легко побачити, що BA є лінійний оператор:

$(BA)(x_1+x_2) = B(A(x_1+x_2)) = B(Ax_1+Ax_2) = B(Ax_1)+B(Ax_2) = (BA)x_1+(BA)x_2$

$(BA)(\lambda x) = B(A(\lambda x)) = B(\lambda Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)x$

Можна перевірити, що

$(AB)C= A(BC)$,

$(A+B)C = AC + BC$,

$C(A+B) = CA+CB$.

Степінь оператора A рекурентними формулами:

$$A^{n} \overset{df}{=} A \cdot A^{n-1} (n = 1,2\ldots),\ A^{0} \overset{df}{=} I$$

де I – одиничний оператор.

Доведемо, що

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|. \quad \textbf{(4)}$$

Справді, нехай x і $\|x\| \le 1$. Тоді

$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\| \cdot \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

$\|(AB)x\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

Тому, і

$$\|AB\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(AB)x\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

Насамкінець, введемо в просторі $L(X,Y)$ операторні ряди . А саме ряд $A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots$ складений із операторів A_k з простору $L(X,Y)$ називається *збіжним* (рівномірно або точково) до оператора $S \in L(X,Y)$, якщо послідовність операторів $\{S_n\}$, де $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ збігається (рівномірно або точково) до оператора S.

§ 5. Обернений оператор. Спектр. Резольвента

Оператор B називається *оберненим* до оператора A, якщо виконуються рівності

$AB=BA=I$

де I – одиничний оператор. Оператор обернений до оператора A, позначається через A^{-1}.

Нехай $A = (a_{ij})_{i,j-1}^{n}$ матриця з детермінантом, відмінний від нуля. Роль оберненого оператора відіграє обернена матриця.

При певних умовах справедливі формули перетворення Фур'є, що визначають деякий оператор і йому обернений;

$Ux = 1/\sqrt{2}\int_{\infty}^{-\infty} x(a)\,e^{-iat}da$ $\qquad$ $U^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{it\tau}\,d\tau$

Теорема. Якщо A – лінійний оператор і існує A^{-1}, то оператор A^{-1} теж лінійний.

Доведення. Достатньо перевірити,що

$A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\ A^{-1}y_1 + \lambda_2\ A^{-1}y_2$

Нехай

$Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_y$

Завдяки лінійності оператора A

$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

Отже

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$

Далі

$x_1 = A^{-1}y_1\ \ x_2 = A^{-1}y_2$ $\qquad$ *(1)*

Помножимо ці рівності на λ_1 і λ_2 відповідно і додамо;

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1\ A^{-1}y_1 + \lambda_2\ A^{-1}y_2$ $\qquad$ *(2)*

Порівняємо (1) і (2):

$A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1\ A^{-1}y_1 + \lambda_2\ A^{-1}y_2$ $\qquad$ *(3)*

З поняттям оберненого оператора тісно пов'язані питання існування і єдності розв'язків операторних рівнянь

$Ax = f$ $\qquad$ *(4)*

де x – шуканий елемент деякого простору X, f – заданий елемент.

До рівнянь типу (4) відносяться алгебраїчні, диференціальні, інтегральні та інші рівняння системи.

Розглянемо рівня'ння (4) і припустимо, що існує A^{-1}. Безпосередньою підстановкою переконуємось, що

$x = A^{-1} f$ $\qquad$ *(5)*

є розв'язком рівняння (4).

Справді, нехай, навпаки, існують два роз'язки рівняння (4); x_1 і x_2, тобто

$Ax_1 = f \quad i \quad Ax_2 = fR_\lambda$

Тоді $A(x_1 - x_2) = 0$, звідки $x_1 - x_2 = 0$ і $x_1 = x_2$.

Зрозуміло, що розв'язуванняоператорного рівняння (4) зводиться до знаходження оберненого оператора.

В різних розділах матеметики зустрічаються рівняння виду:

$Ax - \lambda x = f$ або $(A - \lambda \mathrm{I})x = f$ $\qquad$ *(6)*

де A: X→X – лінійний оператор, а λ деякий параметр.

Поряд з рівнянням (6) розглянемо рівняння

$Ax - \lambda x = 0$ або $(A - \lambda \mathrm{I})x = 0$ $\qquad$ *(7)*

яке називається *однорідним рівнянням* що відповідає рівнянню (6). Це рівняння завжди має розв'язок $x=0$, який називається *тривіальним розв'язком*.

Нехай, для деякого значення λ існує $(A - \lambda \mathrm{I})^{-1} = R_\lambda$. Оператор R_λ називається *резольвентним оператором* або *резольвентою* для рівняння (6) або оператора A. Тоді для цього значення λ рівняння (6) має єдиний розв'язок при будь-якій правій частині

$x = R_\lambda f$.

Однорідне рівняння (7) має в цьому випадку тільки тривіальний розв'язок

$x = ()$

Ті значення λ, при яких рівняння (6) має єдиний розв'язок при довільному f називають <u>*регулярними*</u> значеннями для рівняння (6) або для оператора A. Якщо рівняння (7) при даному λ має, крім тривіального, деякий інший розв'язок, то таке значення λ називається <u>*власним значенням*</u> для рівняння (6) або оператора A, а не тривіальний розв'язок називається <u>*власним елементом рівняння*</u> (7) або оператора A, що відповідає даному власному значенню λ.

Сукупність всіх значень λ, які не є регулярними, називається <u>*спектром*</u> оператора A. Зокрема, всі власні значення належать спектру.

Наведемо приклад. Розглянемо в просторі $C[0,1]$ оператор множення на незалежну змінну

$Ax = tx(t)$

Рівняння (6) прийме вигляд

$tx(t) - \lambda x(t) = f\lambda(t)$ (8)

Якщо $\lambda \notin [0,1]$, то при довільному $f(t)$ рівняння (8) має єдиний неперервний розв'язок

$x(t)= \frac{1}{t-\lambda} f(t)$

Тоді всі $\lambda \notin [0,1]$ є регулярні значення, а резольвентою є оператор множення на $\frac{1}{t-\lambda}$:

$R_\lambda f = \frac{1}{t-\lambda} f(t)$.

Всі визначені $\lambda \in [0,1]$ є точками спектра. Разом з тим ні одна точка спектра не є власним значенням , тому що розв'язком однорідного рівняння

$(t-\lambda)x(t)=0, \quad \lambda \in [0,1]$

є тільки тривіальний розв'язок.

Список літератури

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1989
2. Бурбаки Н. Топологичесние векторные пространства. – М. Иностр. лит ., 1959.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Иностр. Лит., 1962.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теорія. – М.: Мир, 1966.
5. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М. Наука, 1977.
7. Келли Дж. Общая топология. – М.: Наука, 1968.
8. Рисс Ф., Секефальви- Надь Б. Лекции по ункциональному анализу. – М.: Мир, 1979.
9. Робертсон А.. Робертсон В. Топологические векторне пространства. – М.: Мир 1967.

Навчально-методичний посібник

Гончарова С.Ф
Лавер О.Г.

Функціональний та опуклий аналіз

Технічна редакція, комп’ютерна верстка,
коректура – Гончарова С.Ф.

44,1;42,3;40,5;38,7;36,9;34,11;32,13;30,15;28,17;26,19;24,21;
2,43;4,41;6,39;8,37;10,35;12,33;14,31;16,29;18,27;20,25;22,23