ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Дискретна математика та теорія алгоритмів" вивчається студентами факультету інформаційних технологій на протязі перших двох семестрів. Актуальність вивчення основних понять та засад дискретної математики майбутніми спеціалістами в галузі інформаційних технологій зумовлена тим фактом, що основні способи подання та обробки інформації в інформаційних системах є дискретними за своєю природою [1, 2]. Тому важливою складовою процесу підготовки фахівців IT-сфери є вироблення знань та навичок, які стосуються розуміння та використання сучасних моделей та методів обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації.

Слід зазначити також велике методологічне значення вивчення дисципліни "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Воно, зокрема, полягає у тому, що переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 0501 — "Інформатика та обчислювальна техніка", широко використовують позначення, поняття та моделі дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як "Алгоритми та структури даних", "Об’єктно-орієнтоване програмування", "Бази даних та знань", "Системи штучного інтелекту", "Математичне моделювання" тощо.

У методичному посібнику розглянуто навчальний матеріал, який входить до першої частини курсу «Дискретна математика та теорія алгоритмів». Посібник містить відомості з теорії множин, теорії бінарних відношень та математичної логіки, якій присвячено два останні розділи. На початку кожного розділу наведено основні позначення та означення, знання яких є обов’язковим для успішного засвоєння навчальної дисципліни. Важливі поняття та терміни, які уперше зустрічаються у тексті, виділено курсивом. Переважну більшість понять проілюстровано на змістовних прикладах.

Слід зазначити, що посібник має яскраво виражене практичне спрямування. Основним його завданням є формування навичок із розв’язування задач із дискретними даними. При цьому перевагу надано графічним методам розв’язування задач, які, на думку автора, є наочними і більш доступними для першокурсників. Кожний підрозділ містить формулювання та детальний розв’язок значної кількості практичних завдань. У кінці кожного розділу наведено задачі для самостійного розв’язування, які можуть використовуватися студентами для підготовки до практичних занять, а також модульного та залікового контролю.

Виклад матеріалу у посібнику є надзвичайно стислим. Додаткові теоретичні відомості, обґрунтування тверджень, а також більш детальний розгляд відповідних розділів дискретної математики читач може знайти у підручниках, які наведені у переліку рекомендованої літератури. Велика кількість додаткових задач різної складності наведена у [9-12].

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Основні означення, які мають відношення до теорії множин, можна знайти у підручниках [1-8].

1.1. Основні позначення теорії множин

$x \in A$ — елемент x *належить* множині A.

$x \notin A$ — елемент x не належить множині A.

$A \subseteq B$ — множина A є *підмножиною* множини B (кожний елемент множини A належить множині B).

$A \subset B$ — множина A є *власною підмножиною* множини B ($A \subseteq B$ і $A \neq B$).

$\varnothing$ — *порожня множина* (множина, яка не містить жодного елемента).

U — *універсальна множина*.

$|A|$ — *потужність множини* A (для скінченних множин потужність множини рівна числу елементів множини).

1.2. Операції над множинами

До основних операцій над множинами відносяться доповнення, перетин, об'єднання, різниця, та симетрична різниця, для позначення яких використовуються відповідно символи $\bar{\ }$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ. Нижче наведено їх означення:

$\bar{A} = \{x | x \in U,\ x \notin A\}$ — *доповнення множини A* до універсальної множини U.

$A \cap B = \{x | x \in A,\ x \in B\}$ — *перетин* множин A та B.

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$ — *об'єднання* множин A та B.

$A \setminus B = \{x | x \in A,\ x \notin B\}$ — *різниця* множин A та B.

$A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — *симетрична різниця множин A* та B (позначення $\overset{\text{def}}{=}$ читається як "рівне за визначенням").

Приклад 1.1. Нехай $U = \{5, 6, ..., 30\}$ — універсальна множина, $A = \{6, 8, 9, 10, 12, 14, 20, 21, 22, 27\}$, $B = \{3x - 6 \mid x - \text{непарне}, x \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x + 4 - \text{просте число}\}$. Вказати перелік елементів множини $D = B \setminus \left(A \Delta \bar{C}\right)$,.

Розв'язок.

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

$B = \{9, 15, 21, 27\}$, $C = \{7, 9, 13, 15, 19, 25, 27\}$.

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\bar{C} = \{5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$.

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та $\bar{C}$ за формулою:

$$A \Delta \bar{C} = \left(A \setminus \bar{C}\right) \cup \left(\bar{C} \setminus A\right).$$

Оскільки $A \setminus \bar{C} = \{9, 27\}$, $\bar{C} \setminus A = \{5, 11, 16, 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29, 30\}$, то

$A \Delta \bar{C} = \{5,9,11,16,17,18,23,24,26,27,28,29,30\}$.

в) Знайдемо різницю множин B та $A\Delta\bar{C}$:

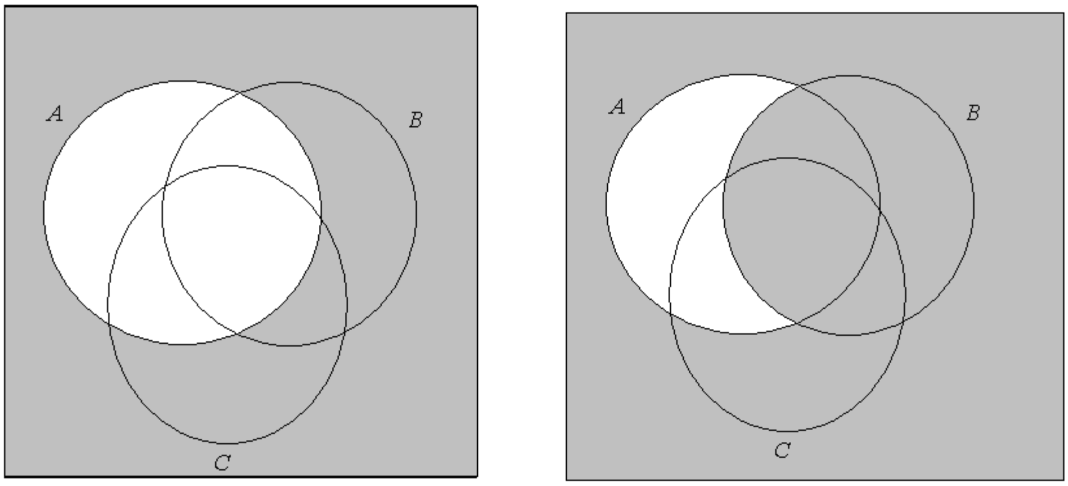
$B \setminus (A\Delta\bar{C}) = \{15,21\}$.

Відповідь: $D = \{15,21\}$.

Приклад 1.2. На *діаграмі Ейлера-Венна* зобразити множину $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}$.

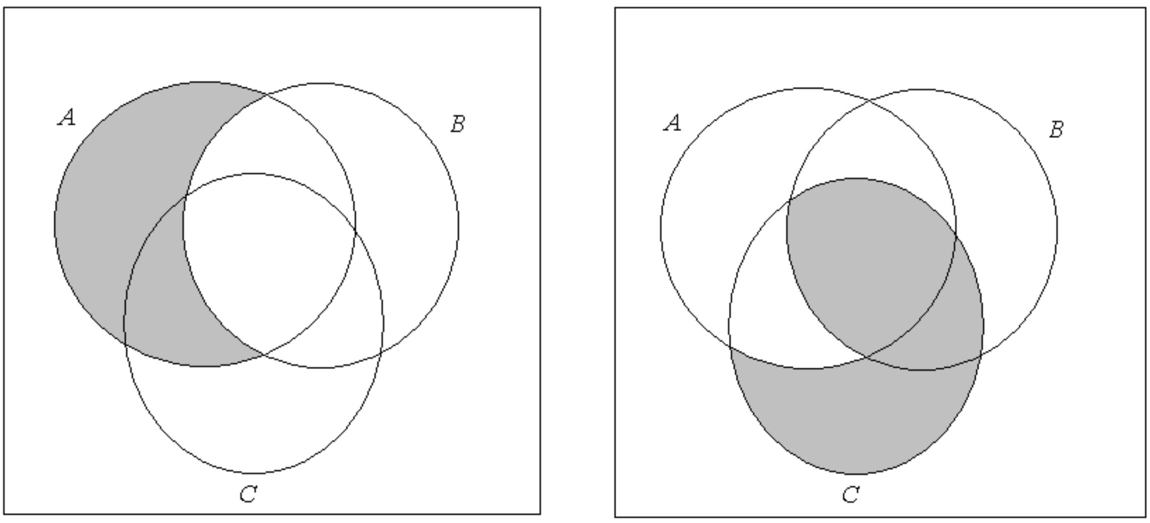
Розв’язок.

Зобразимо діаграми Ейлера-Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}$, у порядку їх виконання:



$\bar{A}$ $\qquad$ $\bar{A} \cup B$

Рис. 1.



$\overline{\bar{A} \cup B}$ $\qquad$ $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B}$

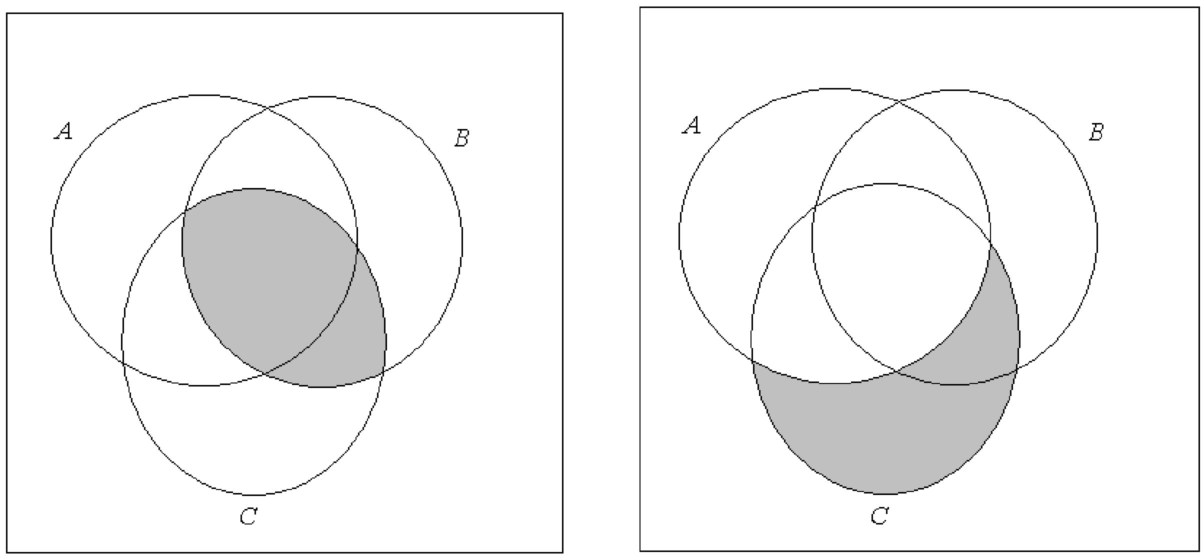
Рис. 2.

На правій діаграмі на рис. 2. зображена шукана множина.

Приклад 1.3. Довести, що для довільних множин *A*, *B* та *C* справджується рівність $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Розв’язок.

Перший спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 2. Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$:



$B \cap C$ $\qquad\qquad$ $C \setminus A$

Рис. 3.

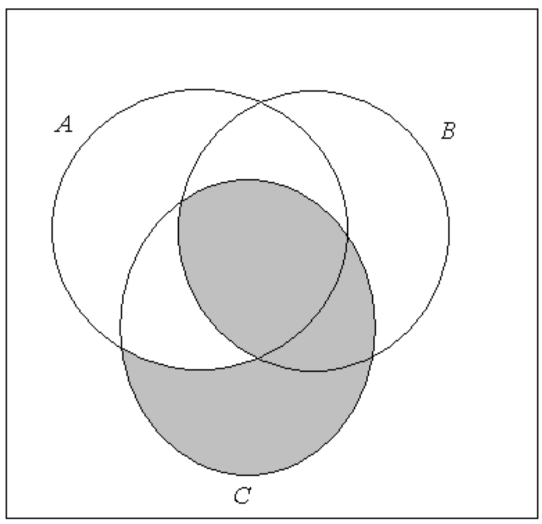


Рис. 4. Діаграма Ейлера-Венна множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 2 (справа) та рис. 4. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб. Використаємо *інтуїтивний принцип об’ємності*, згідно до якого для доведення потрібної рівності достатньо довести, що

$$C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}\subseteq B\cap C\cup(C\setminus A) \text{ та } B\cap C\cup(C\setminus A)\subseteq C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x\in C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$. Тоді

$$\begin{cases} x\in C, \\ x\notin\overline{\overline{A}\cup B}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in C, \\ x\in\overline{A}\cup B. \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in C, \\ x\in\overline{A}. \end{cases}\\ \begin{cases} x\in C, \\ x\in B. \end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in C, \\ x\notin A. \end{cases}\\ \begin{cases} x\in C, \\ x\in B. \end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x\in C\setminus A, \\ x\in C\cap B. \end{array}\right.\Rightarrow x\in B\cap C\cup(C\setminus A).$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент x множини $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$ є елементом множини $B\cap C\cup(C\setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x\in B\cap C\cup(C\setminus A)$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x\in C\cap B, \\ x\in C\setminus A. \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in C, \\ x\in B. \end{cases}\\ \begin{cases} x\in C, \\ x\notin A. \end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\in C, \\ x\in B. \end{cases}\\ \begin{cases} x\in C, \\ x\in\overline{A}. \end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases} x\in C, \\ x\in\overline{A}\cup B. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in C, \\ x\notin\overline{\overline{A}\cup B}. \end{cases}\Rightarrow x\in C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B\cap C\cup(C\setminus A)$ є елементом множини $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$ та $B\cap C\cup(C\setminus A)$ є рівними.

Приклад 1.4. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Pascal, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Pascal і C++, 7 — Pascal і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Pascal, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язок. У якості універсальної множини U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Pascal, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

Перший спосіб. Для відшукання розв'язку скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Pascal, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10-x$ програмістів знають лише Pascal і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 5, яка відповідає множині $(P\cup C)\setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7-x$ програмістів знають лише мови Pascal і Java, $8-x$ — лише мови C++ та Java.

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Pascal, C++ та Java. Оскільки мову Pascal знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Pascal рівна $18-(10-x)-(7-x)-x=1+x$. Аналогічно отримуємо, що $19-(10-x)-(8-x)-x=1+x$ програмістів знають лише мову C++, $21-(7-x)-(8-x)-x=6+x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 5).

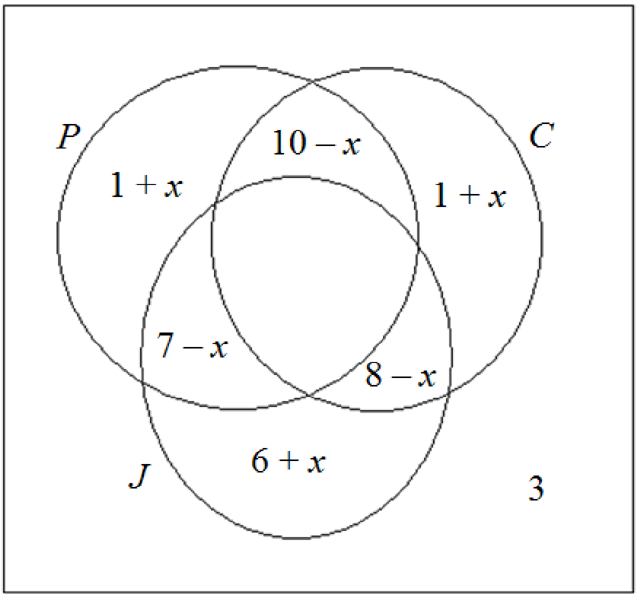


Рис 5. Діаграма до прикладу 1.4

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18+(8-x)+(1+x)+(6+x)+3=40.$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини *P*, останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36+x=40$. Звідси $x=4$.

Другий спосіб. Скористаємося *формулою включень-виключень*

$$|P\cup C\cup J|=|P|+|C|+|J|-|P\cap C|-|P\cap J|-|C\cap J|+|P\cap C\cap J|.$$

Отримаємо

$$|P\cup C\cup J|=18+19+21-10-7-8+x=33+x.$$

Множина $P\cup C\cup J$ є множиною тих програмістів, які володіють принаймні однією із мов програмування Pascal, C++ чи Java. Тому $|P\cup C\cup J|=|U|-|\overline{P\cup C\cup J}|=40-3=37$. Отже, $37=33+x$. Звідси $x=4$.

Приклад 1.5. Нехай *A* — множина трикутників, *B* — множина чотирикутників, *C* — множина правильних многокутників, *D* — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут, *E* — множина рівносторонніх многокутників. Вказати множини:

1) $((D\cap A)\Delta E)\setminus(A\cap C)$.
2) $\overline{B\cap(C\cup D)}\cap E\cap B$.

Розв’язок.

1) Виконаємо операції по черзі:

а) $D \cap A$ — множина прямокутних трикутників. Позначимо цю множину через F.
б) $(F \Delta E) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Оскільки $E \cap F = \varnothing$, то $(F \setminus E) \cup (E \setminus F) = E \cup F$.
в) $A \cap C = E$.
г) $((D \cap A) \Delta E) \setminus (A \cap C) = (E \cup F) \setminus E$. Оскільки множини F та E не перетинаються, то $(E \cup F) \setminus E = F$.

Відповідь: $((D \cap A) \Delta E) \setminus (A \cap C) = F$, де F — множина прямокутних трикутників.

2) а) Знайдемо спочатку $B \cap (C \cup D)$. $B \cap (C \cup D) = B \cap C \cup B \cap D$. Оскільки $B \cap C$ — множина правильних чотирикутників, а кожний правильний чотирикутник є квадратом, то $B \cap C \subset B \cap D$. Тому $B \cap C \cup B \cap D = B \cap D$. Отже, $B \cap (C \cup D) = B \cap D$ — множина усіх чотирикутників, які мають хоча би один прямий кут.
б) Скористаємося формулою $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Тоді отримаємо, що

$$\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B = \overline{B \cap D} \cap E \cap B = (E \cap B) \setminus (B \cap D).$$

Множина $E \cap B$ — множина ромбів. Тому $(E \cap B) \setminus (B \cap D)$ — множина ромбів, які не є елементами множини $B \cap D$, тобто множина усіх ромбів, які не є квадратами.

Відповідь: Множина усіх ромбів, які не є квадратами.

1.3. Основні закони алгебри множин

Для зручності нижче вказано основні закони *алгебри множин*, які використовуються у подальшому:

1) Закони *комутативності*:

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

2) Закони *асоціативності*:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3) Закони *ідемпотентності*:

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

4) Закони *дистрибутивності*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

5) Властивості універсальної множини:

$$A\cap U = A,$$
$$A\cup U = U,$$
$$A\Delta U = \overline{A}.$$

6) Властивості порожньої множини:

$$A\cap\varnothing=\varnothing,$$
$$A\cup\varnothing = A,$$
$$A\Delta\varnothing = A.$$

7) Закон подвійного доповнення:

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

8) Властивості доповнення:

$$A\cap\overline{A}=\varnothing,$$
$$A\cup\overline{A}=U,$$
$$A\Delta\overline{A}=U.$$

9) Закони де Моргана:

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

10) Властивості різниці:

$$A\setminus B=A\cap\overline{B},$$
$$A\setminus A=\varnothing,$$
$$U\setminus A=\overline{A}.$$

11) Властивості симетричної різниці:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A),$$
$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B),$$
$$A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B),$$
$$\overline{A\Delta B}=\overline{A}\Delta B=A\Delta\overline{B},$$
$$A\Delta A=\varnothing.$$

Приклад 1.6. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $A \cup A \cap B = A$ (закон поглинання);

б) $A \cup \bar{A} \cap B = A \cup B$;

в) $\overline{\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A)} = A \setminus B$;

г) $\left(A \Delta \left(A \cap \bar{B}\right)\right) \cap \left(\bar{B} \Delta \bar{C}\right) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Розв'язок.

а) Використаємо перший дистрибутивний закон та властивості універсальної множини:

$$A \cup A \cap B \overset{5}{=} (A \cap U) \cup (A \cap B) \overset{4}{=} A \cap (U \cup B) \overset{5}{=} A \cap U \overset{5}{=} A.$$

Над рівностями у попередньому рядку вказані номери законів алгебри множин, які використовуються при переході від множини у лівій частині рівності до множини у правій частині.

б) Використаємо другий дистрибутивний закон, властивості доповнення та універсальної множини:

$$A \cup \bar{A} \cap B \overset{4}{=} \left(A \cup \bar{A}\right) \cap (A \cup B) \overset{7}{=} U \cap (A \cup B) \overset{5}{=} A \cup B.$$

в) Використаємо закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості операції віднімання та закон ідемпотентності:

$$\overline{\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A)} \overset{9}{=} A \cap \overline{B \cup (C \setminus A)} \overset{2,9,10}{=} A \cap \bar{B} \cap \overline{C \cap \bar{A}} \overset{1,9}{=} \bar{B} \cap A \cap \left(\bar{C} \cup A\right) \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} \bar{B} \cap \left(A \cap \bar{C} \cup A \cap A\right) \overset{3}{=} \bar{B} \cap \left(A \cap \bar{C} \cup A\right) \overset{\text{а)}}{=} \bar{B} \cap A \overset{10}{=} A \setminus B.$$

г) Використаємо закон асоціативності, комутативності, дистрибутивності та ідемпотентності, властивості універсальної та порожньої множин а також властивості операції віднімання та симетричної різниці множин:

$$\left(A \Delta \left(A \cap \bar{B}\right)\right) \cap \left(\bar{B} \Delta \bar{C}\right) \overset{3}{=} \left(A \cap \bar{B}\right) \Delta \left(A \cap \bar{C}\right) \Delta \left(\left(A \cap \bar{B}\right) \cap \bar{B}\right) \Delta \left(\left(A \cap \bar{B}\right) \cap \bar{C}\right) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \left(A \cap \bar{B}\right) \Delta \left(A \cap \bar{C}\right) \Delta \left(A \cap \left(\bar{B} \cap \bar{B}\right)\right) \Delta \left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \overset{2,3}{=} \left(A \cap \bar{C}\right) \Delta \left(A \cap \bar{B}\right) \Delta \left(A \cap \bar{B}\right) \Delta$$

$$\Delta \left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \overset{11}{=} \left(A \cap \bar{C}\right) \Delta \varnothing \Delta \left(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}\right) \overset{5,6}{=} \left(A \cap \bar{C} \cap U\right) \Delta \left(A \cap \bar{C} \cap \bar{B}\right) \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} \left(A \cap \bar{C}\right) \cap \left(U \Delta \bar{B}\right) \overset{5}{=} \left(A \cap \bar{C}\right) \cap \bar{\bar{B}} \overset{1,2,3,7}{=} A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C} \overset{10}{=} (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

1.4. Метод математичної індукції

Метод *математичної індукції* заснований на *принципі математичної індукції*, який полягає у наступному: *твердження справедливе для всіх натуральних n, якщо*

1) *твердження справджується при n = 1 (база індукції);*

2) *із виконання твердження для довільного натурального n = k випливає його справедливість для n = k + 1.*

Приклад 1.7. Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел рівна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Розв'язок. Нехай $S_2(n)=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $S_2(1)=1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто $S_2(k)=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ і нехай $n=k+1$. Тоді

$$S_2(n)=S_2(k+1)=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.5. Задачі для самостійного розв'язування

1. Нехай $U=\{5,6,...,30\}$ — універсальна множина, $A=\{5,7,8,10,13,19,20,27,28,30\}$, $B=\{5,7,6,11,13,18,20,24,29\}$, $C=\{x\,|\,x\in U,\ 2x+1-\text{просте число}\}$. Знайти
   1) $(\overline{A}\setminus B)\Delta(C\setminus A)$.
   2) $(A\Delta\overline{C})\setminus(A\cap B)$.
   3) $(C\cup\overline{B})\setminus(B\Delta\overline{A})$.
   4) $(\overline{A}\cap C)\Delta(\overline{B}\setminus A)$.
   5) $(\overline{A}\cup\overline{B})\setminus\overline{\overline{C}\,\Delta A}$.
   6) $\overline{B\setminus C}\cap\overline{\overline{A}\Delta B}$.
   7) $(B\Delta\overline{C})\setminus(A\cap(\overline{B}\cup C))$.
   8) $(\overline{A}\Delta C)\setminus(B\setminus\overline{A})$.
   9) $(\overline{B}\cup(B\setminus\overline{C}))\setminus(\overline{B}\Delta A)$.
   10) $\overline{C\setminus A}\Delta(B\cup A)$.
2. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини
   1) $(C\cup(\overline{B}\setminus C))\setminus A$.
   2) $(A\cup\overline{B})\Delta\overline{C}$.
   3) $(C\Delta\overline{A})\setminus B$.

4) $\bar{A}\setminus\overline{C\cup\bar{B}}$.
5) $\overline{\bar{C}\Delta(B\setminus A)}$.
6) $(\bar{C}\Delta A)\cap\bar{B}$.
7) $(\bar{A}\setminus B)\cup(C\setminus A)$.
8) $\overline{(B\setminus A)\Delta\bar{C}}$.
9) $\bar{B}\setminus(\bar{C}\Delta\bar{A})$.
10) $(C\cup\bar{B})\setminus\bar{A}$.

3. Довести, що в алгебрі множин справджуються рівності
   1) $A\Delta(B\cup C)=((C\cup B)\setminus A)\cup((A\setminus C)\setminus B)$.
   2) $\bar{A}\setminus(\bar{B}\setminus C)=(B\cup C)\setminus A$.
   3) $(A\setminus\bar{B})\setminus C=\overline{\bar{A}\cup C}\cap B$.
   4) $(\bar{C}\setminus B)\Delta\bar{A}=A\Delta(B\cup C)$.
   5) $(B\cup C)\setminus A=\overline{\bar{B}\setminus C}\setminus A$.
   6) $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}\cap\bar{C}=(A\setminus\bar{B})\setminus C$.
   7) $A\Delta(B\cup C)=(C\setminus A)\cup(A\Delta B)\setminus C$.
   8) $(C\setminus A)\cup(\bar{A}\setminus\bar{B})=\bar{A}\setminus\overline{B\cup C}$.
   9) $(A\setminus\bar{B})\setminus(A\cap C)=\bar{C}\setminus(\bar{A}\cup\bar{B})$.
   10) $(B\setminus A)\cup(A\Delta C)\setminus B=(B\cup C)\Delta A$.
4. Розв’язати наступні задачі
   1) За результатами сесії жоден з 24 студентів групи не отримав двійку, 7 мають принаймні одну оцінку «задовільно», 16 — «добре», 8 — «відмінно». У трьох студентів є обидві оцінки «добре» і «відмінно», у двох — «задовільно» і «відмінно», у чотирьох — «задовільно» і «добре». Знайти кількість студентів, усі оцінки яких однакові.
   2) У класі навчається 20 учнів. Із них 7 відвідують танцювальний гурток, 6 — драматичний, 8 — гурток з малювання. Троє школярів займаються і у танцювальному і у драматичному гуртках, 5 — і у танцювальному і гуртку з малювання, 1 — лише у драматичному, 2 — в усіх трьох гуртках. Скільки школярів не відвідують жодний гурток?
   3) Із 40 туристів 8 чоловік знають французьку мову, 16 — англійську, 8 — німецьку. Троє знають французьку і англійську, один — французьку і німецьку, четверо — англійську і німецьку, один — усі три мови. Знайти кількість туристів, які не знають жодної з трьох мов.
   4) У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п’ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п’ятірки з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та

фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які

a. Не отримали жодної п'ятірки;
b. Отримали рівно одну п'ятірку.

5) Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі, і у Лондоні, 6 — і у Лондоні, і у Римі, 5 — і у Парижі, і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.
6) За результатами сесії жоден з 25 студентів групи не отримав двійку, 9 мають принаймні одну оцінку «задовільно», 16 — «добре», 8 — «відмінно». Десять студентів склали *усі* свої іспити на оцінку «добре», 4 — на «відмінно», 4 — на «задовільно». Один студент має усі три можливі позитивні оцінки. Знайти кількість студентів, які склали усі свої іспити на "відмінно" та "добре".
7) У класі навчається 24 учнів. Із них 9 відвідують танцювальний гурток, 8 — драматичний, 8 — гурток з малювання. Троє школярів займаються і у танцювальному і у драматичному гуртках, 5 — і у танцювальному і гуртку з малювання, 3 — лише у драматичному, 2 — в усіх трьох гуртках. Скільки школярів відвідують хоча б один гурток?
8) Із 25 туристів 15 чоловік знають англійську мову, 8 — німецьку. Троє знають французьку і англійську, один — французьку і німецьку, четверо — англійську і німецьку, один — усі три мови. Знайти кількість туристів, які знають лише французьку мову, за умови, що двоє туристів не знають жодної з трьох мов.
9) У групі вчиться 27 студентів. Відомо, що 6 студентів отримали п'ятірку з математики, 7 — з програмування, 8 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які отримали не більше однієї п'ятірки.
10) Двоє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі, і у Лондоні, 6 — і у Лондоні, і у Римі, 5 — і у Парижі, і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були більше, ніж у одному місті.

5. З використанням методу математичної індукції довести, що для довільного натурального n
   1) Число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ націло ділиться на 19.
   2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
   3) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   4) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
   5) Число n^3-7n націло ділиться на 6.
   6) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

7) Число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7 $(n>1)$.

8) $4^n \geq 3^n + n^2$.

9) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

10) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

6. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних многокутників площини. Знайти множини

1) $(L \setminus S)\cap(R \setminus \bar{P})$.

2) $(P \setminus S)\cup(R \setminus \bar{L})$.

3) $(R \cup \bar{S})\cap(L \setminus P)$.

4) $(\bar{S} \setminus \bar{L})\cap(P \setminus \bar{R})$.

5) $\overline{S \cup \bar{P}} \cup (L \setminus \bar{R})$.

6) $\overline{\bar{L} \cup P \cup (\bar{R} \cap S)}$.

7) $\overline{\overline{P \setminus S} \cup \bar{R} \cup \bar{L}}$.

8) $\overline{(\bar{P} \cup S)\cap(\bar{L} \cup (\bar{R} \cap L))}$.

9) $(L \setminus P)\setminus(S \cap \bar{R})$.

10) $\overline{\bar{R} \cup \bar{P}} \cap (L \setminus S)$.

2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні означення та позначення

Декартовим добутком множин *A* та *B* називається множина $A \times B$ усіх упорядкованих пар, перший елемент яких належить множині *A*, а другий — множині *B*. Тобто, $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$. При цьому *порядок множників є суттєвим*.

Бінарним відношенням, визначеним на *базисних множинах A* та *B*, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин. Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні *R* позначається як aRb або $(a,b) \in R$.

Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Оскільки бінарні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *графів* (діаграм) відношень.

При матричному способі задання відношення елементам множини *A* ставляться у відповідність рядки матриці $M(R)$, елементам множини *B* — стовпці. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні *R*, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин *A* та *B* ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу *a*, з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу *b*.

Проілюструємо матричний та графічний спосіб задання відношень на прикладі відношення $R = \{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$, заданого на множинах $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ та $B = \{1,2,3,4\}$. Тоді матриця відношення *R* має вигляд

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф відношення наведено на рис. 6.

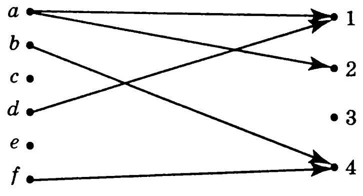


Рис. 6. Граф відношення *R*

Множини $\operatorname{pr}_1 R = \{x | (x,y) \in R\}$ та $\operatorname{pr}_2 R = \{x | (x,y) \in R\}$ відповідно називаються першою та другою *проекціями* відношення *R*. Для відношення *R* із попереднього прикладу $\operatorname{pr}_1 R = \{a,b,d,f\}$, $\operatorname{pr}_2 R = \{1,2,4\}$.

Множина $R[C] = \{y | (c,y) \in R, c \in C\}$ називається *зрізом* бінарного відношення *R* за підмножиною *C* першої базисної множини *A*.

Для відношення *R* із попереднього прикладу $R[\{a,d\}] = \{1,2\}$.

Зріз $R[\{a\}]$ називається *зрізом бінарного відношення за елементом a.* Часто для одноелементних зрізів використовують позначення $R[a]$.

Множина усіх одноелементних зрізів бінарного відношення *R*, визначеного на множині *A*, називається фактор-множиною множини *A* за відношенням *R* і позначається A/R.

Наприклад, для відношення *R* із діаграмою, наведеною на рис. 6, $R[a] = \{1,2\}$, $R[b] = R[f] = \{4\}$, $R[c] = R[e] = \varnothing$. Тому $R/A = \{\{1,2\},\{4\},\varnothing\}$.

2.2. Операції над відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$, визначене на множинах *B* та *A*, називається *оберненим* до відношення $R \subseteq A \times B$. Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 6, $R^{-1} = \{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$.

Бінарне відношення $S \circ R = \{(x,z) |\ \text{існує таке}\ y \in B, \text{що}\ (x,y) \in R, (y,z) \in S\} \subseteq A \times C$ називається *добутком* (композицією) відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Наприклад, для відношень *R* та *S*, зображених на рис. 7 $S \circ R = \{(1,x),(1,y)\}$.

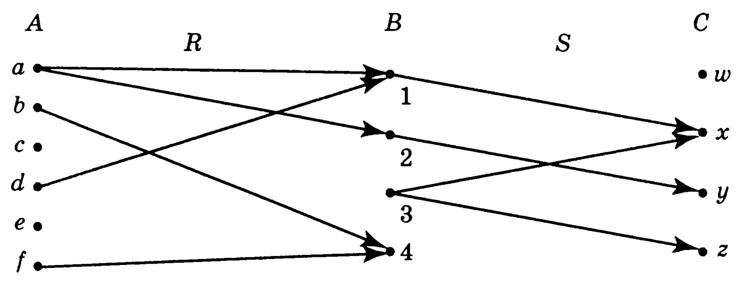


Рис. 7. Граф відношень *R* та *S*

Приклад 2.1. Нехай $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{23,24,25,26,27\}$, $C = \{a,b,c,d,e,f\}$, бінарне відношення *R* визначене на множинах *A* та *B* наступним чином: xRy тоді і тільки тоді, коли *y* націло ділиться на *x*, $S = \{(23,f),(24,b)(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\} \subseteq B \times C$.

Знайти першу та другу проекції бінарного відношення $T=S\cdot R$ та вказати $T^{-1}\left[\{a,c,d,f\}\right]$.

Розв’язок.

Задамо бінарне відношення R переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні: $R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$. Тоді

$$T=\{(2,b),(2,d),(3,a),(3,b),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,e)\}.$$

Тому $\mathrm{pr}_1 T=\{2,3,4,5,6,8,9\}$, $\mathrm{pr}_2 T=\{a,b,d,e\}$. Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:

$$T^{-1}=\{(b,2),(d,2),(a,3),(b,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b,8),(e,9)\}.$$

Тоді $T^{-1}\left[\{a,c,d,f\}\right]=\{2,3,5\}$.

2.3. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення.*

Бінарне відношення $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині *A*.

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *рефлексивним*, якщо для кожного $x\in R$ має місце xRx, тобто кожний елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* сам із собою.

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *антирефлексивним*, якщо для жодного $x\in R$ не має місце xRx.

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *симетричним*, якщо з того, що xRy випливає, що yRx. Умова $R^{-1}=R$ може використовуватися у якості критерію симетричності.

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *асиметричним*, якщо з того, що xRy випливає, що не виконується yRx. Умова $R^{-1}\cap R=\varnothing$ може використовуватися у якості критерію асиметричності.

Бінарне відношення *R* на множині *A* називається *антисиметричним*, якщо з того, що $x\neq y$ та xRy випливає, що не виконується yRx. Умова $R^{-1}\cap R\subseteq I_A$ може використовуватися у якості критерію антисиметричності.

Бінарне відношення *R* називається *транзитивним* на множині *A*, якщо з того, що xRy та yRz випливає, що xRz. Умова $R^2\subseteq R$ може використовуватися у якості критерію транзитивності.

Бінарне відношення *R* називається *лінійним* на множині *A*, якщо для довільних відмінних один від одного $a\in A, b\in B$ хоча би одна із пар (a,b), (b,a) є елементом відношення *R*.

Замиканням бінарного відношення *R* за властивістю *P* називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення *R* і задовольняє властивість *P*.

Наприклад, транзитивне замикання $\left[R\right]_{\text{trans}}$ відношення R може бути знайдено за допомогою наступного співвідношення

$$\left[R\right]_{\text{trans}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n .$$

Приклад. 2.2. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R=\left\{(x,y)\middle| |x-y|\le 1\right\}$, заданого на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розв'язок.

Оскільки $|x-x|=0<1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є антирефлексивним.

Оскільки $|x-y|=|y-x|$, то з того, що $|x-y|\le 1$ випливає, що $|y-x|\le 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1,0)$).

Оскільки $(0,1)\in R$ та $(1,2)\in R$, а $(0,2)\notin R$, то відношення R не є відношенням транзитивності.

Оскільки $(0,2)\notin R$, то відношення не є лінійним.

Приклад. 2.3. Задати за допомогою матриці мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке не є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R\cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $R\cup R^2$.

Розв'язок.

Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A, яка задовольняє умови $(x,y)\in R$ та $(y,x)\notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів $(x,y)\in R$ та $(y,z)\in R$, такі, що $(x,z)\notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R'=\{(a,b),(b,c)\}$. Але відношення R' є також і антирефлексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару, яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a,a). Отримуємо $R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. Відношення R є шуканим і має наступну матрицю:

$$M(R)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2=\{(a,a),(a,b)(a,c)\}$.

Тому $R\cap R^2=\{(a,a),(a,b)\}$. Звідси $\text{pr}_1\left(R\cap R^2\right)=\{a\}$, $\text{pr}_2\left(R\cap R^2\right)=\{a,b\}$.

$S = R \cup R^2 = \{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

Отже, $S[a] = \{a,b,c\}$, $S[b] = \{c\}$, $S[c] = S[d] = S[e] = \varnothing$.

Тому $A/S = \{\{a,b,c\},\{c\},\varnothing\}$.

Приклад. 2.4. Для однорідного бінарного відношення $R = \{(2,1),(3,1),(2,2),(4,6)\}$, визначеного на множині $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання *S*. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,2,5\}]$.

Розв'язок. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні *S* з самим собою. Тому пари $(1,1),(3,3),(4,4),(6,6)$ потрібно обов'язково додати. Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2),(1,3)$, $(2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу *S*. Отже остаточно маємо $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),(3,1),(3,2), (3,3), (4,4), (4,6), (6,4), (6,6)\}$. Тоді

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та $S[\{1,2,5\}] = \{1,2,3\}$.

2.4. Відношення еквівалентності

Бінарне відношення називається відношенням *еквівалентності* на множині *A*, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Бінарне відношення еквівалентності *розбиває* множину *A* на множини, які не мають спільного перетину (*класи еквівалентності*).

Граф відношення еквівалентності $R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\}$ наведено на рис. 8 (у випадку однорідних відношень кожний елемент множини, на якій визначене відношення, достатньо зображати один раз).

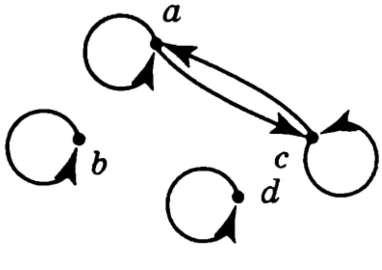


Рис. 8. Граф відношення еквівалентності

Приклад 2.5. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;

в) відношення "знаходитися один від одного на відстані не меншій за 100" на площині;

г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв’язок.

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним.

Симетричність також виконується по тій самій причині.

Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина людей зросту k см.

в) Відношення не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 50. Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи А та В є родичами і нехай В та С також є родичами, причому А предок В по батьківській лінії, а С — предок В по материнській лінії. Тоді жоден із людей А та С не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад 2.6. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u),(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u),(w,y),(w,z),$ $(x,x),(v,v),(t,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину A/R.

Розв’язок.

Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення: $R^{-1}=\{(x,u),(u,u),$ $(z,y),(w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w),(z,w),(x,x),(v,v),(t,t)\}$. Легко переконатися, що $R^{-1}=R$, а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення *R*: $R^2=\{(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u),(v,v),(w,y),(w,z),(w,w)\}$. Нескладно перевірити, що $R^2=R$. Тому відношення *R* є транзитивним.

Отже, бінарне відношення *R* є відношенням еквівалентності. Знайдемо тепер класи еквівалентності. Для цього потрібно вказати одноелементні зрізи відношення *R*.

$R[x]=\{x,u\}$, $R[y]=\{y,z,w\}$, $R[z]=\{y,z,w\}$, $R[t]=\{t\}$, $R[u]=\{x,u\}$, $R[v]=\{v\}$, $R[w]=\{y,z,w\}$. Отже, $A/R=\{\{x,u\},\{y,z,w\},\{t\},\{v\}\}$.

2.5. Відношення порядку

Бінарне відношення *R* називається *відношенням порядку (порядком) на множині A*, якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A,R) називається *впорядкованою множиною*. Якщо *a* та *b* — елементи впорядкованої множини (A,R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент *a* передує елементу *b*.

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел.

Антирефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин). Відношення *R* є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Якщо *R* — відношення строгого порядку на множині *A*, то відношення $R'=R\cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню *R*.

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням *лінійного* порядку. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення ">" на числовій множині.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою діаграм Хассе. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них.

На рис. 9 зображено діаграму Хассе для відношення подільності ($(x,y)\in R$ тоді і тільки тоді, коли число *x* є дільником числа *y*) на множині $\{2,4,5,10,12,20,25\}$.

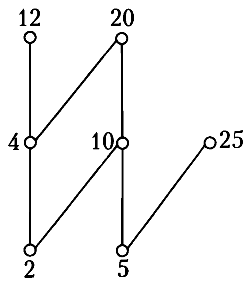


Рис. 9. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}

Елемент *a* називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо не існує такого елемента $b\in A$, що виконуються умови $b\neq a$ і bRa.

Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 9 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо для довільного елемента $b\in A$ $(a,b)\in R$.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають *екстремальними елементами* впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 10, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A, C та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).

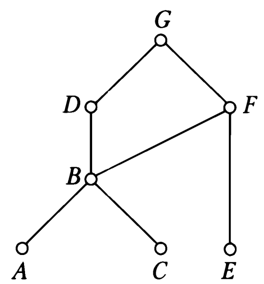


Рис. 10. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент a впорядкованої множини (A,R) називається *нижньою гранню множини* $M\subseteq A$, якщо для усіх елементів $b\in M$ виконується умова aRb.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Так, наприклад для відношення, діаграма якого наведена на рис. 10, $\sup\{D,E\}=G$, $\inf\{D,F\}=B$, а $\inf\{B,E\}$ не існує.

Частково впорядкована множина (A,R) називається ґраткою, якщо для довільних $a\in A, b\in A$ існують $\inf\{a,b\}$ та $\sup\{a,b\}$.

Приклад 2.7. Перевірити, чи є бінарне відношення $R=\{(b,d),(a,e),(a,b),(a,d),(c,d),(b,e),(a,c)\}\cup I_A$ відношенням часткового порядку на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A,R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A,R) ґраткою. Крім того, знайти $\inf\{b,c\}$ та $\sup\{b,c\}$.

Розв'язок.

Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене йому відношення $R^{-1}=\{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(e,b),(c,a)\}\cup I_A$. Тоді $R^{-1}\cap R=I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\}=R.$$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Зобразимо діаграму Хассе частково впорядкованої множини (A,R). Відповідна діаграма наведена на рис. 11.

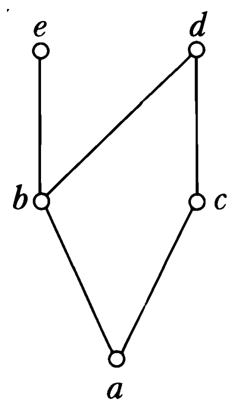


Рис. 11. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A,R), а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A,R), а найбільший елемент не існує.

Оскільки $\sup\{e,d\}$ не існує, то впорядкована множина (A,R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b,c\}=a$, $\sup\{b,c\}=d$.

2.6. Задачі для самостійного розв'язування

1. Операції над відношеннями

1) Нехай $A=\{k,l,m,n\}$, $B=\{1,2,5,7,8\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $R=\{(k,1),(n,2),(n,1),(l,5),(l,8),(m,2),(m,8),(k,7)\}$, $S=\{(2,b),(7,c),(8,b),(5,e)\}$, $T=S\circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $\left(A\setminus T^{-1}\left[\{c,e\}\right]\right)\times\left(C\setminus \mathrm{pr}_2 T\right)$.

2) Нехай $A=\{k,l,m,n\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{x,y,z,t,u,v\}$, $S=\{(1,u),(2,x),(2,z),(2,t),(4,x),(4,v)\}$, $T=S\circ R$ і матриця відношення R має вигляд

$$M(R)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задати відношення T за допомогою графу і знайти $\left(C \setminus T\left[\{l,n\}\right]\right)\times\left(A \setminus \text{пр}_2 T^{-1}\right)$.

3) Нехай $A=\{k,l,m,n,p\}$, $B=\{1,2,5,7,8\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $R=\{(k,1),(n,2),(n,1),(l,5),(l,8),(m,2),(m,8),(k,7)\}$, $S=\{(2,b),(7,c),(8,b),(5,c)\}$, $T=S\circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $\left(A \setminus T^{-1}[b]\right)\times\left(C \setminus \text{pr}_2 T\right)$.

4) Нехай $A=\{k,l,m,n\}$, $B=\{1,2,5,7,8\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $R=\{(k,2),(n,1),(n,2),(l,1),(m,2),(m,8),(k,8)\}$, відношення $S\subseteq B\times C$ задане за допомогою матриці

$$M(S)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$T=S\circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $\left(C \setminus T\left[\{2,5\}\right]\right)\times\left(A \setminus \text{pr}_1 T\right)$.

5) Нехай $A=\{k,l,m,n,p\}$, $B=\{1,2,5,7,8\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $R=\{(1,k),(2,n),(1,n),(5,l),(8,l),(2,m),(8,m),(7,k)\}$, $S=\{(2,b),(7,c),(8,b),(5,c)\}$, $T=S\circ R^{-1}$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $\left(A \setminus T\left[\{k,p\}\right]\right)\times\left(C \setminus \text{pr}_1 T^{-1}\right)$.

6) Нехай R — однорідне бінарне відношення на множині $A=\{1,2,4,5,7,8\}$, задане за допомогою матриці

$$M(S)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задати відношення $R^2 \setminus R$ за допомогою матриці та графу та вказати його проекції.

7) Нехай R — бінарне відношення "<", визначене на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^m, де $m\in\mathbb{N}$.

8) Нехай R — бінарне відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$. Знайти R^m, де $m\in\mathbb{N}$.

9) Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.

10) Навести приклад бінарного відношення R, такого що $R^2 \neq \varnothing$, $R^2 \cap R = \varnothing$.

2. Властивості однорідних бінарних відношень

1) Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$.
2) Встановити властивості наступних однорідних бінарних відношень на множині дійсних чисел
   а) $R = \{(x, y) \mid x \neq y\}$;
   б) $R = \{(x, y) \mid xy \leq 1\}$;
   в) $R = \{(x, y) \mid xy > 0\}$;
   г) $R = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$.
3) Задати однорідні бінарні відношення, діаграми яких наведені на рис. 12, переліком їх елементів та встановити їх властивості.

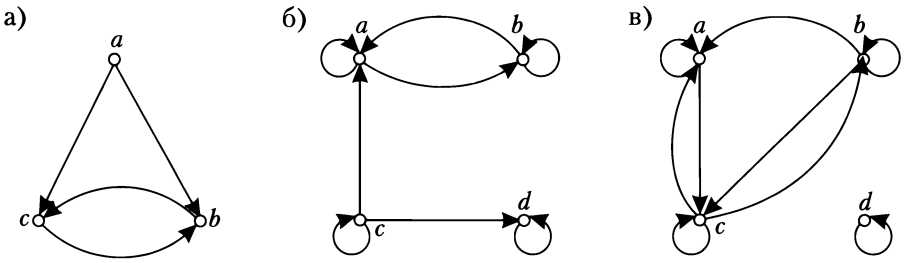


Рис. 12.

4) Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.
5) Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.
6) Для однорідного бінарного відношення $R = \{(1,2), (1,3), (2,5)\}$, визначеного на множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, побудувати його замикання S, яке є симетричним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,4\}]$.
7) Для однорідного бінарного відношення $R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,b)\}$, визначеного на множині $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S[\{b, d, f\}]$.

8) Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, визначеного на множині $\{a,b,c,d\}$.
9) Зобразити графи
   1) симетричного;
   2) рефлексивного та транзитивного;
   3) лінійного

   замикань бінарних відношень, графи яких зображені на рис. 13.

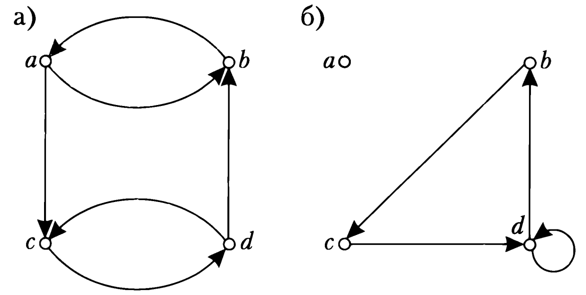


Рис. 13.

10) Для однорідного бінарного відношення $R=\{(d,b),(a,a),(a,b),(b,d),(c,f)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання S. Вказати матрицю відношення $T=S\setminus R^{-1}$ та знайти $T\left[\{a,e,f\}\right]$.

3. Відношення еквівалентності

1) З’ясувати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:
   а) паралельність площин у просторі;
   б) відношення знайомства на множині людей;
   в) відношення бути "одногрупниками";
   г) відношення рівнопотужності.
2) Задати за допомогою графа та матриці бінарне відношення еквівалентності R на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, якщо фактор-множина A/R рівна $\{\{a,e,f\},\{b,d\},\{c\},\{g\}\}$.
3) Визначити, які з графів, наведених на рис. 14, відповідають відношенням еквівалентності.

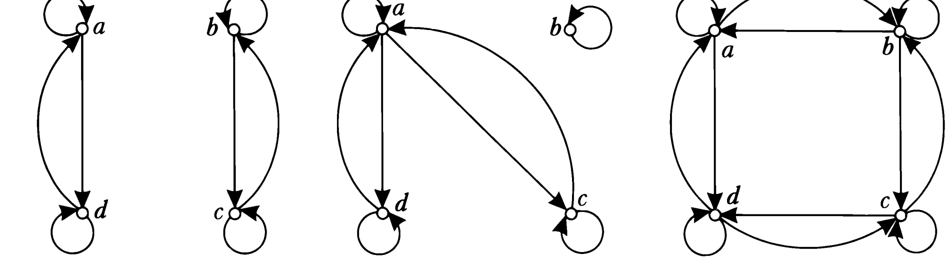


Рис. 14.

4) Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u),(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u),(w,y),(w,z),(x,x)$ $(v,v),(t,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину *A*/*R* множини *A* за відношенням *R*.
5) Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ бінарне відношення $R=\{(b,f),(a,g),(b,b),(f,c),(d,d),(b,c),(g,a),(c,c),(g,g),(c,f),(f,f),(c,b),(e,e),(a,a),(f,b)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину *A*/*R*.
6) Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ бінарне відношення $R=\{(b,f),(a,g),(b,b),(d,d),(b,c),(g,a),(c,c),(g,g),(c,f),(f,f),(c,b),(e,e),(f,c),$ $(a,a),(f,b)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину *A*/*R*.
7) Навести приклад визначеного на множині $[0,1]$ бінарного відношення еквівалентності, яке має рівно 5 класів еквівалентності.
8) Навести приклад визначеного на множині $\mathbb{Z}$ бінарного відношення еквівалентності, яке має рівно 13 класів еквівалентності.
9) Вказати найменше за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке є відношенням еквівалентності на множині $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ та містить у собі відношення $R=\{(2,1),(1,5),(3,6),(7,5),(3,3)\}$. Знайти фактор-множину *A*/*S*.
10) Вказати найменше за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке є відношенням еквівалентності на множині $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ та містить у собі відношення $R=\{(6,6),(5,2),(1,5),(6,3),(5,7)\}$. Знайти фактор-множину *A*/*S*.

4. Відношення порядку

1) Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового строгого та лінійного порядку. Відповідь обґрунтувати.
   а) відношення знайомства на множині людей; б) відношення "бути старшим"; в) відношення "бути сином"; г) відношення "бути предком".
2) Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового строгого та лінійного порядку. Відповідь обґрунтувати.
   а) відношення "бути нащадком"; б) відношення "бути молодшим"; в) відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини; г) відношення "бути родичем" на множині людей.
3) Задати переліком елементів бінарне відношення часткового порядку, якому відповідає впорядкована множина (A,R), діаграма Хассе якої наведена на рис. 15. Вказати екстремальні елементи відповідних множин. Знайти $\sup\{2,4,5\}$, $\inf\{4,25\}$ та визначити множину усіх нижніх граней множини $\{12,20\}$ і множину усіх верхніх граней множини, яка складається з максимальних елементів впорядкованої множини (A,R).

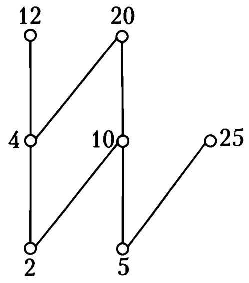


Рис. 15.

4) На рис. 16 наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками?

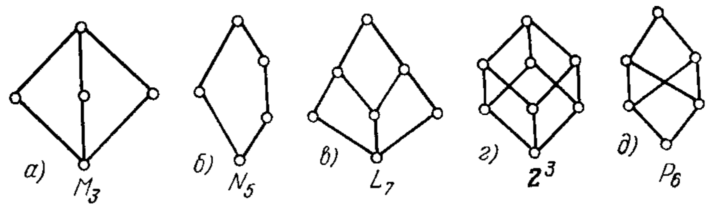


Рис. 16.

5) Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{1,2,3,4\}$, яке було би відношенням:
   а) порядку;
   б) нестрогого порядку;
   в) строгого порядку;
   г) лінійного порядку
   та вказати екстремальні елементи множини A за побудованим відношенням.
6) Для однорідного бінарного відношення $R = \{(c,a),(b,d),(d,c)\}$, визначеного на множині $A = \{a,b,c,d,e\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S, яке б було відношенням:
   а) порядку;
   б) нестрогого порядку;
   в) строгого порядку;
   г) лінійного порядку
   та містило у собі відношення S. Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A,S).
7) Перевірити, чи є бінарне відношення $R = I_A \cup \{(2,1),(4,1),(1,3),(5,1),(4,3)\} \cup \cup \{(2,3),(5,3),(5,4)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A = \{1,2,3,4,5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A,R) та вказати її екстремальні елементи.
8) Перевірити, чи є бінарне відношення R з матрицею

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A=\{x,y,z,u,v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення *R* та вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню *R*.

9) Перевірити, чи є відношення $S=R\circ(R\cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, якщо $R=\{(b,g),(a,e),(c,g),(b,c),(a,b),(c,e),(d,f)\}$. Якщо так, то
а) зобразити діаграму Хассе відношення *S*;
б) вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням *S*;
в) знайти $\inf\{b,g,e\}$ та $\sup\{a,b,h\}$.

10) Знайти екстремальні елементи частково впорядкованої множини, діаграма Хассе якої наведена на рис. 17, знайти $\sup\{e,i\}$ та $\inf\{i,m\}$.

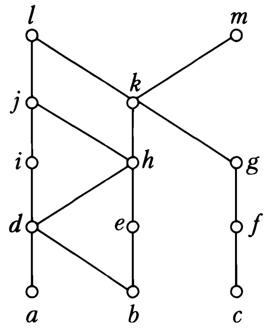


Рис. 17. Діаграма Хассе

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.1. Основні означення та позначення

Під *висловлюванням* розуміють розповідне речення, у якому щось стверджується, і про яке у даних умовах місця та часу можна сказати, *істинне* вони чи *хибне*.

Для позначення *змінних висловлювань* використовують великі латинські літери. Будемо вважати, що істинне висловлювання приймає значення істинності 1, хибне висловлювання — 0.

Із простих висловлювань (*атомів*), дужок та *логічних зв'язок* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, які позначають відповідно операції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквівалентності, можна будувати складні висловлювання (формули). Наприклад, висловлюванню "Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики і не опрацює матеріал самостійно, то він погано напише модуль" відповідає формула $A \wedge \bar{B} \Rightarrow C$, де A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики", B — "Іван опрацює матеріал самостійно", C — "Іван напише модуль погано".

Значення операцій логіки висловлювань наведені у таблиці 1.

Таблиця 1. Таблиця значень операцій логіки висловлювань

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

При використанні логічних зв'язок вважають, що логічні операції мають наступний пріоритет (від найвищого до найнижчого): $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Приклад 3.1. Розв'язати логічне рівняння $P \wedge \bar{Q} \Rightarrow \bar{R} \vee Q = 0$.

Розв'язок.

Оскільки імплікація набуває значення 0 лише для одного набору значень аргументів, то рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} = 1, \\ \bar{R} \vee Q = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему, отримаємо

$$\begin{cases} P = 1, \\ \bar{Q} = 1, \\ \bar{R} = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1, \\ Q = 0, \\ R = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1,0,1)\}$.

Приклад 3.2. Розв'язати логічне рівняння $P \wedge \bar{Q} \vee R = \bar{R} \Leftrightarrow P$.

Розв'язок.

Оскільки логіка висловлювань двозначна, то можливими є два випадки:

1-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 0, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases}$$

2-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 1, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку першу систему:

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 0, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge \bar{Q} = 0, \\ R = 0, \\ 1 \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \wedge \bar{Q} = 0, \\ R = 0, \\ P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0, \\ R = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що перше рівняння передостанньої системи перетворюється у правильну рівність при всіх значеннях невідомої Q. Отже, у першому випадку ми отримали два розв'язки $(0,0,0)$ та $(0,1,0)$.

Розв'яжемо другу систему. Для цього спочатку проаналізуємо її друге рівняння. Еквівалентність приймає значення 0 у двох випадках. Тому

$$\begin{cases} P \wedge \bar{Q} \vee R = 1, \\ \bar{R} \Leftrightarrow P = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \bar{R} = 0, \\ P = 0, \\ 0 \wedge \bar{Q} \vee 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \bar{R} = 1, \\ P = 1, \\ 1 \wedge \bar{Q} \vee 0 = 1. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} R = 1, \\ P = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} R = 0, \\ P = 1, \\ \bar{Q} = 1. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P = 0, \\ R = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} P = 1, \\ Q = 0, \\ R = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, ми отримали ще три розв'язки $(0,0,1),(0,1,1)$ та $(1,0,0)$.

Відповідь: $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$,

Під формальною *інтерпретацією* формули логіки висловлювань розуміють присвоєння змінним висловлюванням, з яких побудована формула, деяких значень істинності 0 або 1.

Приклад 3.3. Вказати значення формули $\varphi = \overline{A \wedge \bar{B}} \Leftrightarrow \bar{C} \Rightarrow B \vee A$ на інтерпретації $(1,0,1)$.

Розв'язок.

$$\varphi(1,0,1) = \overline{1 \wedge \bar{0}} \Leftrightarrow \bar{1} \Rightarrow 0 \vee 1 = \overline{1 \wedge 1} \Leftrightarrow 0 \Rightarrow 1 = \bar{1} \Leftrightarrow 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0.$$

Таблиця, які містить значення формули логіки висловлювань на всіх її інтерпретаціях змінних, називається *таблицею істинності формули*.

Приклад 3.4. Вказати таблицю істинності формули $\varphi = \overline{\bar{A} \vee B} \Rightarrow (C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A})$.

Розв’язок.

Поставимо у відповідність кожній підформулі формули φ окремий стовпчик таблиці.

Таблиця 2. Таблиця істинності формули $\varphi = \overline{\bar{A} \vee B} \Rightarrow (C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A})$

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

Формула логіки висловлювань називається *загальнозначущою* (тотожно істинною або тавтологією), якщо вона є істинною на всіх своїх інтерпретаціях.

Формула логіки висловлювань називається *суперечливою* (тотожно фальшивою), якщо вона є хибною на всіх своїх інтерпретаціях.

Формула логіки висловлювань називається *виконуваною*, якщо вона є істинною принаймні на одній своїй інтерпретації.

Приклад 3.5. Довести, що формула $\varphi = \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ є загальнозначущою.

Розв’язок. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що формула φ не є загальнозначущою. Тоді рівняння $\varphi = 0$ повинно мати хоча б один розв’язок. Перевіримо це.

$$\overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{\bar{B} \Rightarrow \bar{C}} = 1, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{B} \Rightarrow \bar{C} = 0, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{B} = 1, \\ \bar{C} = 0, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ (1 \Leftrightarrow A \vee 1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ 1 \Leftrightarrow 1 = 0. \end{cases}$$

У результаті ми отримали систему, останнє рівняння якої є неправильною рівністю, оскільки $1 \Leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$. Отже рівняння $\varphi = 0$ не має розв’язків. Тому формула φ є загальнозначущою.

3.2. Рівносильні перетворення формул

Формули φ та ψ називаються *рівносильним (еквівалентними) формулами* логіки висловлювань, якщо на всіх спільних інтерпретаціях змінних вони приймають однакові значення істинності. Той факт, що формули φ та ψ *рівносильні*, позначається як $\varphi \equiv \psi$.

Рівносильні перетворення ґрунтуються на *законах логіки висловлювань*, основні з яких наведені у таблиці 3.

Таблиця 3. Основні закони логіки висловлювань

№	**Назва**	**Формулювання закону**
1.	Закон комутативності кон'юнкції	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
2.	Закон комутативності диз'юнкції	$A \vee B \equiv B \vee A$
3.	Закон асоціативності кон'юнкції	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
4.	Закон асоціативності диз'юнкції	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
5.	Перший закон дистрибутивності	$A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$
6.	Другий закон дистрибутивності	$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
7.	Закон подвійного заперечення	$\bar{\bar{A}} \equiv A$
8.	Закон суперечності	$A \wedge \bar{A} \equiv 0$
9.	Закон виключення третього	$A \vee \bar{A} \equiv 1$
10.	Перший закон де Моргана	$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$
11.	Другий закон де Моргана	$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$
12.	Закон ідемпотентності кон'юнкції	$A \wedge A \equiv A$
13.	Закон ідемпотентності диз'юнкції	$A \vee A \equiv A$
14.	Властивості нуля	$A \wedge 0 \equiv 0,\ \ A \vee 0 \equiv A$
15.	Властивості одиниці	$A \wedge 1 \equiv A,\ \ A \vee 1 \equiv 1$
16.	Перший закон поглинання	$A \vee A \wedge B \equiv A$
17.	Другий закон поглинання	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
18.	Модифікований закон поглинання	$A \vee \bar{A} \wedge B \equiv A \vee B$
19.	Закон усунення імплікації	$A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$
20.	Перший закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
21.	Другий закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv \bar{A} \wedge \bar{B} \vee A \wedge B$

Приклад 3.6. Для формули $\varphi = \bar{A} \wedge B \Rightarrow (C \Leftrightarrow \bar{A})$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій заперечення та диз'юнкції.

Розв'язок.

$$\bar{A} \wedge B \Rightarrow (C \Leftrightarrow \bar{A}) \overset{19}{\equiv} \overline{\bar{A} \wedge B} \vee (C \Leftrightarrow \bar{A}) \overset{4,10}{\equiv} \bar{\bar{A}} \vee \bar{B} \vee (C \Leftrightarrow \bar{A}) \overset{4,7,21}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge \bar{\bar{A}} \vee C \wedge \bar{A} \overset{7}{\equiv}$$

$A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge A \vee C \wedge \bar{A} \overset{7}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \overline{\overline{\bar{C} \wedge A}} \vee \overline{\overline{C \wedge \bar{A}}} \overset{7,10}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \overline{C \vee \bar{A}} \vee \overline{\bar{C} \vee A}$ (над знаком рівносильності формул вказано номер закону, який використовується).

Приклад 3.7. Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = (Q \Rightarrow P) \vee (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R)$ та $\varphi_2 = (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R) \vee (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q})$.

Розв'язок.

Спростимо формули та спробуємо їх звести до одного і того самого вигляду.

$$\varphi_1 = (Q \Rightarrow P) \vee (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \overset{4,7,19,21}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee P \wedge \overline{Q \wedge R} \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \overset{16}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \overset{18}{\equiv}$$

$$\overset{18}{\equiv}\bar{Q}\vee P\vee Q\wedge R\overset{18}{\equiv}\bar{Q}\vee P\vee R\overset{2}{\equiv}P\vee\bar{Q}\vee R.$$

$$\varphi_2=\left(\bar{P}\Rightarrow Q\wedge R\right)\vee\left(Q\Rightarrow P\wedge\bar{Q}\right)\overset{4,7,19}{\equiv}P\vee Q\wedge R\vee\bar{Q}\vee P\wedge\bar{Q}\overset{16}{\equiv}P\vee Q\wedge R\vee\bar{Q}\overset{18}{\equiv}P\vee\bar{Q}\vee R\equiv\varphi_1.$$

Отже, формули φ_1 та φ_2 є рівносильними.

Приклад 3.8. З використанням рівносильних перетворень довести, що формула φ з прикладу 3.5 є загальнозначущою.

Розв'язок.

Покажемо, що формула $\varphi=\overline{\bar{B}\Rightarrow\bar{C}}\Rightarrow\left(C\Leftrightarrow A\vee C\right)$ рівносильна 1.

$$\overline{\bar{B}\Rightarrow\bar{C}}\Rightarrow\left(C\Leftrightarrow A\vee C\right)\overset{19,21}{\equiv}\left(\bar{B}\Rightarrow\bar{C}\right)\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\vee C\wedge\left(A\vee C\right)\overset{7,17}{\equiv}B\vee\bar{C}\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\vee C\overset{2,4}{\equiv}$$

$$\equiv\bar{C}\vee C\vee B\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\overset{9}{\equiv}1\vee B\vee\bar{C}\wedge\overline{A\vee C}\overset{15}{\equiv}1.$$

Отже, формула φ загальнозначуща.

3.3. Логічне слідування. Аналіз міркувань

Формула φ називається *логічним наслідком* формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ (позначається $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\vDash\varphi$), якщо на усіх спільних інтерпретаціях змінних, на яких кожна з формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ є істинною, формула φ також є істинною.

Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли

1. Формула $\psi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\Rightarrow\varphi$ є загальнозначущою.
2. Формула $\psi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\wedge\bar{\varphi}$ є суперечливою.

Приклад 3.9. Перевірити, чи є формула $\varphi=P\vee Q\wedge R$ логічним наслідком формул $\varphi_1=P\Leftrightarrow\bar{P}\wedge R$ та $\varphi_2=\bar{R}\Rightarrow Q$.

Розв'язок.

Перевіримо, чи є суперечливою формула $\psi=\left(P\Leftrightarrow\bar{P}\wedge R\right)\wedge\left(\bar{R}\Rightarrow Q\right)\wedge\overline{P\vee Q\wedge R}$.

$$\left(P\Leftrightarrow\bar{P}\wedge R\right)\wedge\left(\bar{R}\Rightarrow Q\right)\wedge\overline{P\vee Q\wedge R}\equiv\left(\bar{P}\wedge\overline{\bar{P}\wedge R}\vee P\wedge\bar{P}\wedge R\right)\wedge\left(R\vee Q\right)\wedge\bar{P}\wedge\overline{Q\wedge R}\equiv$$

$$\equiv\left(\bar{P}\wedge\left(P\vee\bar{R}\right)\vee 0\wedge R\right)\wedge\left(R\vee Q\right)\wedge\bar{P}\wedge\left(\bar{Q}\vee\bar{R}\right)\equiv\left(\bar{P}\wedge P\vee\bar{P}\wedge\bar{R}\right)\wedge\left(R\vee Q\right)\wedge\bar{P}\wedge\left(\bar{Q}\vee\bar{R}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(0\vee\bar{P}\wedge\bar{R}\right)\wedge\bar{P}\wedge\left(R\vee Q\right)\wedge\left(\bar{Q}\vee\bar{R}\right)\equiv\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge\left(R\wedge\bar{Q}\vee R\wedge\bar{R}\vee Q\wedge\bar{Q}\vee Q\wedge\bar{R}\right)\equiv\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge$$

$$\wedge\left(R\wedge\bar{Q}\vee 0\vee 0\vee Q\wedge\bar{R}\right)\equiv\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge\left(R\wedge\bar{Q}\vee Q\wedge\bar{R}\right)\equiv\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge R\wedge\bar{Q}\vee\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge Q\wedge\bar{R}\equiv 0\vee$$

$$\vee\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}\equiv\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}.$$

Формула $\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}$ не є суперечливою, оскільки вона є істинною на наборі $\left(0,1,0\right)$. Тому формула φ не є логічним наслідком формул φ_1, φ_2.

Аналіз міркувань засобами логіки висловлювань полягає у перевірці того, чи є висновок міркування *логічним наслідком* його *засновків (гіпотез)*.

Приклад 3.10. Проаналізувати міркування
1) сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора;
2) ми підемо сьогодні купатися тоді і тільки тоді, якщо сьогодні сонячний день;
3) якщо ми не підемо сьогодні купатись, то будемо кататися на човні;
4) якщо ми будемо кататися на човні, то повернемося пізно ввечері.
Отже, ми повернемося пізно ввечері.

Розв’язок.

Введемо атоми:
A — сьогодні сонячний день;
B — сьогодні холодніше, ніж учора;
C — ми підемо сьогодні купатися;
D — ми будемо кататися на човні;
E — ми повернемося пізно ввечері.

Тоді міркування можна записати у вигляді
1) $\bar{A} \wedge B$;
2) $A \Leftrightarrow C$;
3) $\bar{C} \Rightarrow D$;
4) $D \Rightarrow E$.
E.

Перевіримо, чи є висновок міркування логічним наслідком засновків, тобто чи

$$\bar{A} \wedge B,\ A \Leftrightarrow C,\ \bar{C} \Rightarrow D,\ D \Rightarrow E \vDash E.$$

Для цього розглянемо формулу $\psi = \bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E}$ і перевіримо її суперечливість.

$$\bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge (\bar{A} \wedge \bar{C} \vee A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge (\bar{D} \vee E) \wedge$$

$$\wedge \bar{E} \equiv (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{A} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge B \wedge A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge (\bar{D} \wedge \bar{E} \vee E \wedge \bar{E}) \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \vee D) \wedge$$

$$\wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \wedge \bar{D} \vee D \wedge \bar{D}) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \wedge \bar{D} \vee 0) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge C \wedge$$

$$\wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge 0 \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv 0.$$

Отже, формула ψ є суперечливою. Тому міркування є вірним.

3.4. Задачі для самостійного розв’язування

1. Розв’язати логічні рівняння

   1) $P \vee \bar{Q} \wedge R \Rightarrow \bar{P} \wedge R = 0$.

   2) $\bar{R} \vee P \Leftrightarrow Q \wedge R = 1$.

   3) $\overline{\overline{Q \Rightarrow P \wedge \bar{R}} \Rightarrow R \wedge \bar{P}} = 1$.

   4) $P \wedge Q \Rightarrow \bar{P} \vee R = R \Rightarrow \bar{Q}$.

5) $R \Leftrightarrow \bar{P} = \overline{Q \Rightarrow R}$.

6) $\overline{\bar{P} \wedge (R \Rightarrow Q)} \Rightarrow \overline{\bar{R} \vee P} = 0$.

7) $\overline{Q \wedge R \Leftrightarrow R \Rightarrow P} = 0$.

8) $(R \Rightarrow P) \Rightarrow (P \wedge \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}) = 0$.

9) $Q \Rightarrow \bar{R} = P \wedge Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

10) $\bar{R} \Rightarrow \bar{Q} = \overline{\bar{P} \Leftrightarrow R}$.

2. Побудувати таблиці істинності формул та встановити, до якого класу вони належать (загальнозначущі, виконувані, суперечливі)

1) $\varphi = (\bar{A} \Leftrightarrow B \wedge \bar{C}) \Rightarrow \bar{C} \vee B$.

2) $\varphi = \overline{C \vee \bar{A}} \Leftrightarrow B \wedge \bar{A} \Rightarrow \bar{C}$.

3) $\varphi = \bar{P} \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{R \vee P} \wedge Q$.

4) $\varphi = (P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow R) \vee \overline{\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}}$.

5) $\varphi = \bar{Z} \wedge X \Leftrightarrow Z \Rightarrow \bar{Y} \vee X$.

6) $\varphi = \overline{B \vee \bar{C}} \Rightarrow \overline{B \wedge \bar{C} \Leftrightarrow \bar{A}}$.

7) $\varphi = C \Rightarrow \overline{B \wedge \bar{A}} \Leftrightarrow \overline{C \vee \bar{A}}$.

8) $\varphi = \overline{Q \Rightarrow P \vee R} \Leftrightarrow \bar{R} \Rightarrow \overline{\bar{P} \vee Q}$.

9) $\varphi = (\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow (R \Leftrightarrow Q \Rightarrow \bar{P})$.

10) $\varphi = \overline{Z \Rightarrow \bar{Y} \vee X} \Leftrightarrow X \Rightarrow Z \wedge \bar{X}$.

3. Рівносильні перетворення формул

1) Для формули $\varphi = (\bar{Q} \Leftrightarrow P) \Rightarrow P \wedge \bar{R}$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми та символи операцій диз'юнкції і заперечення.
2) Для формули $\varphi = (\bar{R} \vee P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, дужки і символи операцій кон'юнкції та заперечення.
3) Для формули $\varphi = (Q \Rightarrow R \wedge \bar{P}) \Leftrightarrow (\bar{R} \vee P)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.
4) Для формули $\varphi = (\bar{P} \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R \wedge \bar{P})$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.
5) Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \vee (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})$ та $\varphi_2 = (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R)$.

6) Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = (Q \wedge P \Rightarrow R \vee Q) \wedge (\bar{P} \Leftrightarrow P \wedge Q)$ та $\varphi_2 = \overline{P \wedge \bar{Q} \Rightarrow \overline{\overline{R \Rightarrow P}}}$.

7) З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{P \Rightarrow \bar{\bar{R}}} \Rightarrow (P \vee \bar{Q} \Leftrightarrow P)$.

8) З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = \overline{Q \wedge P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R) \wedge P}$.

9) З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{\bar{\bar{P}} \Rightarrow P \wedge Q} \Rightarrow \bar{R} \vee (\bar{P} \Leftrightarrow R)$.

10) Довести, що формула $\varphi = P \wedge \bar{Q} \Rightarrow R \wedge \bar{Q} \Leftrightarrow (\bar{R} \vee Q) \wedge P \Rightarrow Q$ є тотожно істинною.

4. Перевірити, чи є формула φ логічним наслідком формул φ_1, φ_2.

1) $\varphi = \bar{Q} \wedge R \vee \bar{P}$, $\varphi_1 = \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}$, $\varphi_2 = R \wedge P \Leftrightarrow \bar{P}$.

2) $\varphi = \overline{\bar{Q} \Leftrightarrow R}$, $\varphi_1 = \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$, $\varphi_2 = \bar{P} \Leftrightarrow Q$.

3) $\varphi = P \vee \bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$, $\varphi_1 = \bar{R} \wedge \bar{P} \Leftrightarrow P$, $\varphi_2 = R \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$.

4) $\varphi = \bar{R} \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \bar{\bar{Q}}}$, $\varphi_1 = \bar{Q} \wedge \bar{R} \Leftrightarrow Q$, $\varphi_2 = P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow Q \wedge R$.

5) $\varphi = P \Rightarrow R, \varphi_1 = Q \wedge \bar{R} \Rightarrow R, \varphi_2 = P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

6) $\varphi = P \Rightarrow \bar{R} \wedge Q$, $\varphi_1 = \bar{Q} \Rightarrow \bar{R}$, $\varphi_2 = \bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge P$.

7) $\varphi = R \Leftrightarrow P$, $\varphi_1 = P \vee \bar{R} \Rightarrow P$, $\varphi_2 = \overline{Q \Leftrightarrow P}$.

8) $\varphi = R \vee Q \Rightarrow \bar{P}$, $\varphi_1 = P \wedge \bar{R} \Leftrightarrow \bar{P}$, $\varphi_2 = \overline{\bar{Q} \wedge R} \Rightarrow \bar{R}$.

9) $\varphi = \bar{P} \Rightarrow \overline{R \Rightarrow \bar{\bar{Q}}}$, $\varphi_1 = Q \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge \bar{P}$, $\varphi_2 = Q \wedge P \Leftrightarrow Q \Rightarrow \bar{R}$.

10) $\varphi = P \Rightarrow R, \varphi_1 = Q \wedge \bar{R} \Rightarrow R, \varphi_2 = P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

5. Проаналізувати міркування

1) а) Якщо програміст володіє мовою PHP або мовою Java, то він може розробляти серверне ПЗ.
б) Програміст може підтримувати сайт тоді і тільки тоді, коли він може розробляти серверне ПЗ.
в) Програміст не може підтримувати сайт.
Отже, програміст не володіє ні PHP, ні Java.

2) а) Якщо Сергій оволодіє німецькою мовою, то він зможе читати твори Гете та Кафки в оригіналі.
б) Сергій оволодіє німецькою мовою, якщо почне її вивчати.
в) Для того, щоб Сергій почав вивчати німецьку мову достатньо подарувати йому словник.
Отже, Сергій зможе читати Гете в оригіналі тоді і тільки тоді, коли йому подарують словник.

3) а) Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0 або 5;
б) Рівність останньої цифри числа 0 є достатньою для його парності;

в) Число ділиться на 5 і є непарним.
Отже, остання цифра цього числа не рівна 0.

4) а) Якщо ціле число більше за одиницю, то воно є простим або складеним.
б) Якщо ціле число більше за два, то воно більше за один.
в) Якщо ціле число більше двох і парне, то воно складене.
Отже, якщо ціле число більше за два і парне, то воно є складеним.

5) а) Якщо падає сніг або на дорозі ожеледиця, то машиною важко керувати.
б) Якщо машиною важко керувати, то я спізнюся або зовсім не приїду.
в) Сніг не падає.
Отже, я спізнюся або на дорозі ожеледиця.

6) а) Якщо Петро поїде до Харкова, то Іван поїде до Києва.
б) Петро поїде чи до Києва, чи до Львова.
в) Якщо Петро поїде до Львова, то Ольга залишиться у Полтаві.
г) Ольга не залишиться у Полтаві.
Отже, Іван поїде до Києва.

7) а) Якщо число націло ділиться на 12, то воно націло ділиться на 2, 3, 4 та 6.
б) Якщо число націло ділиться на 2 та 3, то воно націло ділиться на 6.
в) Подільність на 2 є необхідною для подільності на 4.
Отже, число націло ділиться на 12 тоді і тільки тоді, коло воно націло ділиться на 2 та 3.

8) а) Якщо 2 — просте число, то це найменше просте число.
б) Якщо 2 найменше просте число, то 1 не є простим числом.
в) Число 1 не є простим числом.
Отже 2 є найменшим простим числом тоді і тільки тоді, коли 1 не є простим числом.

9) а) Паралелограм є квадратом тоді і тільки тоді, коли він є ромбом і всі його кути прямі.
б) Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні або ділять кути на рівні частини, то цей паралелограм — ромб.
в) У паралелограмі діагоналі не рівні.
Отже, паралелограм не є квадратом.

10) а) Якщо число натуральне і більше за одиницю, то воно має хоча би один простий дільник.
б) Якщо число складене, то воно натуральне.
в) Умова, що натуральне число більше за одиницю, є необхідною для його парності та складеності.
Отже, якщо число складене і парне, то воно має хоча б один простий дільник.

4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

4.1. Поняття предиката. Основні означення.

Нехай задано деякі множини $A_1,\ldots,A_n$.

Відображення $f: A_1 \times \ldots \times A_n \to \{0, 1\}$ називається n-місним предикатом, *визначеним на множинах* $A_1,\ldots,A_n$.

Множини $A_1,\ldots,A_n$ називаються *базисними множинами* предиката *f*. Якщо $A_1 = \ldots = A_n = A$, то предикат f називається *однорідним предикатом на множині А*.

Якщо у означенні покласти $n=0$, то отримуємо нуль-місний предикат, який є логічною константою (0 або 1).

Якщо базисні множини предиката скінченні, то предикат можна задати за допомогою *таблиці значень*.

Приклад 4.1. Нехай *f*(*x*, *y*) — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A=\{1, 3\}$, для якого

$$f(1,1)=1,\ f(1,3)=0,\ f(3,1)=1,\ f(3,3)=1.$$

Тоді значення предиката *f* можна зобразити у вигляді наступної таблиці:

x	*y*	*f*(*x*, *y*)
1	1	1
1	3	0
3	1	1
3	3	1

Слід зазначити, що можна використовувати іншу структурну форму зображення даних для таблиці значень предиката *f*:

f:

x \ *y*	1	3
1	1	0
3	1	1

Більш універсальним є спосіб задання предикатів за допомогою *пропозиційних форм*.

Пропозиційною формою $F(x_1,\ldots,x_n)$, визначеною на множинах $A_1,\ldots,A_n$ називається вираз, у який входять змінні $x_1,\ldots,x_n$, і який перетворюється у висловлювання при підстановці замість змінних x_i деяких елементів $a_i \in A_i$, $i=1,\ldots,n$.

Пропозиційна форма $F(x_1,\ldots,x_n)$, визначена на множинах $A_1,\ldots,A_n$, однозначно задає предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ наступним чином: для довільного $(a_1,\ldots,a_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$

$$\begin{cases} f(a_1,\ldots,a_n)=1, & \text{якщо висловлювання } F(a_1,\ldots,a_n) \text{ є істинним,} \\ f(a_1,\ldots,a_n)=0, & \text{якщо висловлювання } F(a_1,\ldots,a_n) \text{ є хибним.} \end{cases}$$

Так, предикат *f*(*x*, *y*) із прикладу 4.1 можна задати за допомогою пропозиційної форми $F(x,y)$: "$x \geq y$".

Приклад 4.2. Розглянемо пропозиційну форму $F(x,y,z)$: "У місті *x* проживає від *y* до *z* тисяч мешканців", визначену на множинах A_1 — множина міст світу, A_2 — множина невід'ємних чисел, $A_3 = A_2$. Ця форма задає тримісний предикат $f(x,y,z)$, значення якого можна обчислити використовуючи цю пропозиційну форму. Так, наприклад, *f*(Ужгород, 100, 200) = 1, *f*(Київ, 500, 1000) = 0.

Впорядкований набір значень аргументів $(a_1,\ldots,a_n)\in A_1\times\ldots\times A_n$ *задовольняє* предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$, якщо $f(a_1,\ldots,a_n)=1$.

Множинною істинності предиката $f(x_1,\ldots,x_n)$, визначеного на множинах $A_1,\ldots,A_n$, називається множина усіх наборів значень аргументів, які його задовольняють. Множина істинності позначається наступним чином:

$$T(f)\overset{\text{def}}{=}\left\{(a_1,\ldots,a_n)\,\middle|\,f(a_1,\ldots,a_n)=1\right\}.$$

Так, предикат $f(x,y)$ із прикладу 4.1 має наступну множину істинності:

$$\left\{(a_1,a_2)\,\middle|\,f(a_1,a_2)=1\right\}=\left\{(1,1),(3,1),(3,3)\right\}.$$

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *тотожно істинним* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його задовольняють усі можливі набори значень аргументів $(a_1,\ldots,a_n)\in A_1\times\ldots\times A_n$.

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *виконуваним* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його задовольняє хоча б один набір значень аргументів.

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *тотожно фальшивим* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його множина істинності порожня.

Властивості предиката (наприклад, тотожна істинність, виконуваність чи тотожна фальшивість) залежить від області визначення.

Приклад 4.3. Нехай задано предикат $f(x)$: $x^2\ge x$. Цей предикат є тотожно істинним на множині цілих чисел, виконуваним на множині дійсних чисел та тотожно фальшивим на інтервалі (0; 1).

Оскільки предикати приймають значень із множини $\{0,1\}$, то над предикатами можна *виконувати логічні операції*.

Приклад 4.4. Побудувати таблицю значень предиката $h(x,y)=\overline{f(x,y)}\Leftrightarrow g(x,y)$, якщо $f(x,y)$: $x+2y$ — просте число, $g(x,y)$: $x^2<3$ предикати, визначені на множинах $A_1=\{1,3,4,6,9\}$ та $A_2=\{2,5,8,9\}$. Вказати множину істинності предиката $h(x,y)$.

Розв'язок.

Будуємо таблиці значень предикатів *f* та *g*:

f:

x \ y	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	1	1	1	0
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

g:

x \ y	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	0	0	0	0

$f(1,2)=1$, оскільки 1 + 2·2 = 5 — просте число;
$f(1,5)=1$, оскільки 1 + 2·5 = 11 — просте число;
………………………………………………………
$f(9,9)=0$, оскільки 9 + 2·9 = 27 не є простим числом;
$g(1,2)=1$, оскільки нерівність $1^2<3\cdot 2$ виконується;
$g(1,5)=1$, оскільки нерівність $1^2<3\cdot 5$ виконується;
………………………………………………………
$g(9,9)=0$, оскільки нерівність $9^2<3\cdot 9$ не виконується.

Будуємо таблиці значень предикатів $\overline{f(x,y)}$ та $h(x,y)$:

$\overline{f}$

x \ y	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	0	0	0	1
4	1	1	1	1
6	1	1	1	1
9	0	0	1	1

h:

x \ y	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

$h(3,2)=\overline{f(3,2)}\Leftrightarrow g(3,2)=0\Leftrightarrow 0=1.$
$h(6,5)=\overline{f(6,5)}\Leftrightarrow g(6,5)=1\Leftrightarrow 0=0.$

Знаходимо множину істинності:

$$\{(x,y)\,|\,h(x,y)=1\}=\{(3,2),(3,9),(4,8),(4,9),(9,2),(9,5)\}.$$

Нехай предикати $f(x_1,\dots,x_n)$ та $g(x_1,\dots,x_n)$ визначені на множинах $A_1,\dots,A_n$. Предикат $g(x_1,\dots,x_n)$ називається *логічним наслідком* предиката $f(x_1,\dots,x_n)$, якщо множина істинності предиката $f(x_1,\dots,x_n)$ є підмножиною множини істинності предиката $g(x_1,\dots,x_n)$: $\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,f(x_1,\dots,x_n)=1\}\subseteq\{(x_1,\dots,x_n)\,|\,g(x_1,\dots,x_n)=1\}$.

Приклад 4.5. Нехай $n=2,\ A_1=A_2=\mathbb{Z}$. Предикат $f_2(x,y): x^2>y$ є логічним наслідком предиката $f_1(x,y): x>y$. Якщо ж $A_1=A_2=[0,1]$, то предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2.

Приклад 4.6. Предикати $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ мають наступні таблиці значень:

f_1:

x \ y	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	1	0	0

f_2:

x \ y	a	b	c	d
1	1	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	0	0	0

Перевірити, чи є один з предикатів наслідком іншого.

Розв'язок.

З таблиць значень видно, що

$$\{(x,y) \mid f_2(x,y)=1\} \subset \{(x,y) \mid f_1(x,y)=1\}.$$

Отже, предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2.

4.2. Квантори

Нехай $f(x)$ — одномісний предикат, визначений на множині A.

Універсальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "усі елементи множини A задовольняють предикат $f(x)$", яке є істинним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно істинним. Універсальне висловлювання позначається $\forall x\, f(x)$ і читається для всіх $a \in A$ $f(a)$ є істинним. Знак $\forall$ називається *квантором загальності*.

Екзистенціальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "хоча б один елемент множини A задовольняє предикат $f(x)$" яке є хибним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно фальшивим. Універсальне висловлювання позначається $\exists x\, f(x)$ і читається існує таке $a \in A$, що $f(a)$ є істинним. Знак $\exists$ називається *квантором існування*.

Квантори *впливають* на предикати, які розташовані безпосередньо за *операцією квантифікації*.

Приклад 4.7. Нехай значення предикатів f_1, f_2, f_3 вказані у наступній таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
a	1	1	0
b	1	0	0
c	1	1	0

Тоді

$\forall x\, f_1(x)=1,\ \exists x\, f_1(x)=1$,

$\forall x\, f_2(x)=0,\ \exists x\, f_2(x)=1$,

$\forall x\, f_3(x)=0,\ \exists x\, f_3(x)=0$.

Якщо предикат $f(x)$ визначений на скінченій множині $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, то *операції квантифікації* (навішування кванторів) можна записати наступним чином:

$$\forall x\ f(x)=f(a_1)\wedge f(a_2)\wedge\ldots\wedge f(a_m),$$

$$\exists x\ f(x)=f(a_1)\vee f(a_2)\vee\ldots\vee f(a_m).$$

Після виконання операції квантифікації по змінній ця змінна стає *пов'язаною*. В результаті навішування квантора на одномісний предикат отримується нуль-місний предикат (константа 0 або 1). Якщо змінна не пов'язана ніяким квантором, то вона називається *вільною*. Вільна змінна може приймати усі значення із відповідної базисної множини.

Квантори можна також застосовувати (можливо неодноразово) і до багатомісних предикатів. Кожне застосування операції квантифікації по одному аргументу зменшує кількість вільних змінних (і відповідно місність предиката) на 1.

Приклад 4.8. Двомісний предикат $f(x, y)$ має наступну таблицю значень:

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	0	0
5	1	1	0	0

Вказати таблиці значень предикатів

а) $\forall x\, f(x,y), \exists x\, f(x,y), \forall y\, f(x,y), \exists y\, f(x,y)$,

б) $\forall x \forall y\, f(x,y), \forall x \exists y\, f(x,y), \exists x \forall y\, f(x,y), \exists x \exists y\, f(x,y)$,

в) $\forall y \forall x\, f(x,y), \forall y \exists x\, f(x,y), \exists y \forall x\, f(x,y), \exists y \exists x\, f(x,y)$.

Розв'язок.

а) Позначимо

$$g_1(y) = \forall x\, f(x,y),\ g_2(y) = \exists x\, f(x,y),\quad h_1(x) = \forall y\, f(x,y), h_2(x) = \exists y\, f(x,y).$$

Тоді

$$g_1(a) = \forall x\, f(x,a) = 0,\ g_1(b) = \forall x\, f(x,b) = 1,\ g_1(c) = \forall x\, f(x,c) = 0,\ g_1(d) = \forall x\, f(x,d) = 0.$$

$$g_2(a) = \exists x\, f(x,a) = 1,\ g_2(b) = \exists x\, f(x,b) = 1,\ g_2(c) = \exists x\, f(x,c) = 1,\ g_2(d) = \exists x\, f(x,d) = 1.$$

Предикати $g_1(y)$ та $g_2(y)$ мають наступні таблиці значень:

y	$g_1(y)$	$g_2(y)$
a	0	1
b	1	1
c	0	1
d	0	1

Для предиката $h_1(x)$ маємо:

$$h_1(1) = \forall y\, f(1,y) = 1,\ h_1(2) = \forall y\, f(2,y) = 0,\ h_1(3) = \forall y\, f(3,y) = 0,$$
$$h_1(4) = \forall y\, f(4,y) = 0,\ h_1(5) = \forall y\, h_1(5,y) = 0.$$

Так само обчислюється предикат $h_2(x)$. Значення предикатів $h_1(x)$ та $h_2(x)$ наведені у наступній таблиці:

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$
1	1	1
2	0	1
3	0	1
4	0	1
5	0	1

б)-в) Наведемо лише деякі значення

$$\forall x \forall y\, f(x,y) = \forall x\, h_1(x) = 0,\ \forall x \exists y\, f(x,y) = \forall x\, h_2(x) = 1.$$

$$\exists x \forall y\, f(x,y) = \exists x\, h_1(x) = 1,\ \forall y \exists x\, f(x,y) = \forall y\, g_2(y) = 1.$$

4.3. Властивості операцій квантифікації:

1. Якщо предикат f не залежить від змінної y, то

   $\delta x\, f(x) = \delta y\, f(x),\ \delta \in \{\forall, \exists\}$ — правила *перейменування пов'язаних змінних*.

2. $\delta x \delta y\, f(x,y) = \delta y \delta x\, f(x,y),\ \delta \in \{\forall, \exists\}$ — правила *перестановки однойменних кванторів*.

3. $\left.\begin{array}{l} \delta x\, f(x) \vee g = \delta x\big(f(x) \vee g\big) \\ \delta x\, f(x) \wedge g = \delta x\big(f(x) \wedge g\big) \end{array}\right\}$ — правила *внесення під знак квантора* (g не залежить від x).

4. $\forall x\, f(x) \wedge \forall x\, g(x) = \forall x\big(f(x) \wedge g(x)\big)$ — *пронесення* квантора загальності через кон'юнкцію.

5. $\exists x\, f(x) \vee \exists x\, g(x) = \exists x\big(f(x) \vee g(x)\big)$ — *пронесення* квантора існування через диз'юнкцію.

6. $\left.\begin{array}{l}\overline{\forall x\, f(x)} = \exists x\, \overline{f(x)} \\ \overline{\exists x\, f(x)} = \forall x\, \overline{f(x)}\end{array}\right\}$ — закони де Моргана для кванторів.

Приклад 4.9. Побудувати таблицю значень предиката

$$\overline{\exists x\, \overline{f(x,y)}} \Rightarrow \exists z\, g(x,z),$$

за умови, що таблиці значень предикатів f та g мають вигляд:

f:

x \ y	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	0
e	1	1	1	0

g:

x \ y	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	0
e	0	0	0	0

Розв’язок.

Застосуємо першу та шосту властивості операцій квантифікації. Результатом виконання операцій над предикатами є двомісний предикат

$$h(x,y) = \overline{\exists x\, \overline{f(x,y)}} \Rightarrow \exists z\, g(x,z) = \forall x\, f(x,y) \Rightarrow \exists y\, g(x,y) = f_1(y) \Rightarrow g_1(x),$$

де $f_1(y) = \forall x\, f(x,y)$, $g_1(x) = \exists y\, g(x,y)$ (ми застосували правило перейменування для змінних z та y). Таблиці значень предикатів f_1 та g_1:

y	2	5	8	9
$f_1(y)$	0	0	1	0

x	a	b	c	d	e
$g_1(x)$	1	1	1	0	0

$h(a,2) = f_1(2) \Rightarrow g_1(a) = 0 \Rightarrow 1 = 1$, $\quad h(a,5) = f_1(5) \Rightarrow g_1(a) = 0 \Rightarrow 1 = 1$, …
$h(d,8) = f_1(8) \Rightarrow g_1(d) = 1 \Rightarrow 0 = 0$, … $h(e,9) = f_1(9) \Rightarrow g_1(e) = 0 \Rightarrow 0 = 1$.

Тоді отримуємо наступну таблицю для $h(x,y)$:

x \ y	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	0	1
e	1	1	0	1

4.3. Аналіз міркувань

Засоби логіки предикатів використовуються для формулювання думок та запису тверджень.

Приклад 4.10. Записати речення

а) кожний другокурсник успішно склав іспит з історії або програмування;

б) сума двох додатних чисел — додатне число;

в) кожне дійсне число крім нуля має обернене число, яке визначається однозначно.

за допомогою предикатів та кванторів.

Розв'язок.

а) Нехай A — множина усіх другокурсників. Розглянемо наступні предикати на множині A:

$f(x)$: x склав іспит з історії;
$g(x)$: x склав іспит з програмування.
Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\big(f(x)\vee g(x)\big)$.

Якщо ж нас цікавлять інші особи крім другокурсників, то потрібно додатково розглянути предикат $h(x)$: x — другокурсник. Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\big(h(x)\Rightarrow f(x)\vee g(x)\big)$.

Цей приклад можна розв'язати, замінивши одномісні предикати $f(x)$ та $g(x)$ більш загальним двомісним предикатом $l(x,y)$: x склав іспит з дисципліни y, визначеним, на приклад, на множинах людей та навчальних дисциплін. Тоді отримаємо запис $\forall x\big(h(x)\Rightarrow l(x,\text{історія})\vee l(x,\text{програмування})\big)$

б) Уведемо змінні x та y та перепишемо це речення так: "Два довільні додатні числа x та y дають у сумі додатне число". Тоді отримаємо шуканий запис

$$\forall x\forall y\big((x>0)\wedge(y>0)\Rightarrow(x+y>0)\big).$$

Базисною множиною є множина дійсних чисел.

в) Для запису першої частини речення можна спочатку переписати його у вигляді "Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що $xy=1$". Для опису однозначності можемо скористатися тим, що для довільного z, яке є оберненим до x має виконуватися умова $z=y$. Остаточно отримуємо:

$$\forall x\Big((x\neq 0)\Rightarrow\exists y\big((xy=1)\wedge\forall z\big((xz=1)\Rightarrow z=y\big)\big)\Big).$$

Приклад 4.11. Проаналізувати міркування

1) Усі люди смертні;
2) Сократ — людина;
Отже, Сократ смертний.

Розв'язок.

Нехай A — множина усіх живих істот. Уведемо у розгляд наступні предикати на множині A:

$f(x)$: x — людина,

$g(x)$: x — смертний,

і нехай a = Сократ. Тоді міркування запишеться у такому вигляді:

1) $\forall x\left(f(x)\Rightarrow g(x)\right)$ (усі люди смертні).

2) $f(a)$ (Сократ — людина).

Висновок $g(a)$ (Сократ — смертний).

Для перевірки правильності міркування потрібно перевірити, чи випливає висновок міркування із засновків 1) та 2). Для цього потрібно дослідити, чи є тотожно фальшивим предикат

$$\forall x\left(f(x)\Rightarrow g(x)\right)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}.$$

Внесемо $f(a)\wedge\overline{g(a)}$ у область дії квантора. Отримаємо

$$\forall x\left(f(x)\Rightarrow g(x)\right)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}=\forall x\left(\left(\overline{f(x)}\vee g(x)\right)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}\right)=\forall x\,h(x),$$

де $h(x)=\left(\overline{f(x)}\vee g(x)\right)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}$.

Оскільки

$$h(a)=\left(\overline{f(a)}\vee g(a)\right)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}=\overline{f(a)}\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}\vee g(a)\wedge f(a)\wedge\overline{g(a)}=0\vee 0=0,$$

то предикат $h(x)$ не є тотожно істинним.

Тому $\forall x\,h(x)=0$, а отже міркування є вірним.

4.4. Задачі для самостійного розв’язування

1. Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим чи виконуваним) предикат $f(x)$, визначений на множині натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

   1) $f(x): x^2+8x+15\geq 0$.
   2) $f(x): \cos x=0$.
   3) $f(x): x^4\geq 16$.
   4) $f(x): x^3>-1$.
   5) $f(x): x^2+10x+24=0$.
   6) $f(x): 3^x\leq\dfrac{1}{9}$.
   7) $f(x): \log_4 x>-2$.
   8) $f(x): \log_5 x=2$.
   9) $f(x)$: x — просте число.

10) $f(x): \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4$.

2. Перевірити, чи є один з предикатів $f(x)$, $g(x)$, визначених на множині цілих чисел, наслідком іншого. Відповідь обґрунтувати.
   1) $f(x)$: x — парне число, $g(x): x^2 - 10 + 16 = 0$.
   2) $f(x): x^2 - 2x - 15 = 0$, $g(x)$: x — непарне число.
   3) $f(x)$: x — просте число, $g(x): x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
   4) $f(x)$: x — просте число, $g(x): x^2 - 7x + 10 \leq 0$.
   5) $f(x)$: x — просте число, $g(x): (x-7)(x^2 - 16x + 39) = 0$.
   6) $f(x)$: x — парне число, $g(x): x^2 - 2x + 4 \geq 0$.
   7) $f(x)$: x — непарне число, $g(x): \frac{x^2 - 9x + 20}{x - 4} = 0$.
   8) $f(x): |x - 1| \leq 3$, $g(x): x^2 - 5x + 7 \leq 0$.
   9) $f(x): 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$, $g(x): 2x - 5 \geq 0$.
   10) $f(x): 2^x \leq -1/2$, $g(x): x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

3. Операції над предикатами
   1) Вказати множину істинності предиката $\exists x\big(f(x,y) \wedge g(x,y)\big)$, якщо $f(x,y): x < y$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $g(x,y)$ — однорідний двомісний предикат на множині *A*, множина істинності якого рівна $\{(2,5),(3,2),(4,7),(7,7),(7,8)\}$.
   2) Знайти множину істинності предиката $\overline{\exists x\big(f(x,y) \Leftrightarrow g(x)\big)}$, якщо предикати $f(x,y): x + y$ — просте число та $g(x)$: остача від ділення $x^2 + 7$ на 4 рівна 1 або 3 визначені на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
   3) Предикати $f(x,y): \frac{y+1}{x-1}$ — ціле число та $g(x)$: $x^2 - 10x + 16 = 0$ визначені на множині *A* = {2, 3, 5, 7, 9, 11}. Перевірити, чи є один із предикатів $\exists y\, f(x,y)$ та $g(x)$ наслідком іншого.
   4) Знайти $\forall x\big(\exists y\, f(x,y) \Rightarrow \overline{g(x)}\big)$, якщо предикати $f(x,y)$: $x^2 + y^2$ — просте число, $g(x): 2x^2 + 3$ кратне 5 визначені на множині $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
   5) Вказати таблицю значень предиката $\exists x\, f(x,y) \Rightarrow \forall y\, \overline{g(x,y)}$, якщо двомісні предикати $f(x,y)$: $y^2 > 2x + 10$ та $g(x,y)$: "$x + y$ кратне 6" визначені на множинах $A_1 = \{1,3,4,7,8,9\}$ та $A_2 = \{-5,0,3,5,7\}$.

6) Вказати множину істинності предиката $f(x,y) \Rightarrow \exists y\left(\overline{g(y)} \wedge h(x)\right)$, якщо предикати $f(x,y)$: $x+y$ — просте число, $g(x)$: x^2+3 кратне 4, $h(x)$: x кратне 3 визначені на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

7) Предикати $f(x,y)$: $\dfrac{y-2}{x+1}$ — ціле число та $g(x)$: $x^2-9x+14 \le 0$ визначені на множині $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Перевірити, чи є один із предикатів $\forall y\, f(x,y)$ та $g(x)$ наслідком іншого.

8) Вказати множину істинності предиката $\forall x\left(f(x,y) \wedge \overline{g(x,y)}\right)$, якщо $f(x,y)$: $x^2 \ge y$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $g(x,y)$ — однорідний двомісний предикат на множині A, множина істинності якого рівна $\{(1,2),(2,4),(3,2),(3,5),(4,7),(5,3),(7,7),(7,8)\}$.

9) Вказати таблицю значень предиката $\exists x\, g(x,y) \Rightarrow \forall y\, \overline{f(x,y)}$, якщо двомісні предикати $f(x,y)$: "$x+y$ кратне 4" та $g(x,y)$: $y^2 > 3x+8$ визначені на множинах $A_1=\{1,3,4,7,8,9\}$ та $A_2=\{-5,0,3,5,7\}$.

10) Знайти $\forall x\left(\exists y\, \overline{f(x,y)} \Leftrightarrow g(x)\right)$, якщо предикати $f(x,y)$: "x^2+y — просте число", $g(x)$: "$2x+3y$ кратне 7" визначені на множині $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$.

4. Проаналізувати міркування

1) а) Кожний атлет сильний.
б) Кожний, хто сильний і розумний, досягне успіху.
в) Петро — розумний атлет.
Отже, Петро досягне успіху.

2) а) Усі хижаки — жорстокі істоти.
б) Усі акули — хижаки і морські істоти.
в) Деякі акули не їдять людей.
Отже, деякі жорстокі істоти не їдять людей або не є морськими істотами.

3) а) Усі, хто успішно склав іспит з програмування, володіють хоча б однією мовою програмування.
б) Степан володіє мовою C++.
в) C++ є мовою програмування.
Отже, Степан успішно склав іспит з програмування.

4) а) Кожний програміст може написати цю програму за один день, якщо хто-небудь може її написати за один день.
б) Тарас програміст.
в) Тарас не може написати цю програму за один день.
Отже, ніхто не може написати цю програму за один день.

5) а) Деякі цілі числа — від’ємні.
б) Усі натуральні числа — цілі.

в) Нема жодного від’ємного натурального числа.
Отже, деякі цілі числа не є натуральними.

6) а) Іван мало вчиться.
б) Кожний, хто мало вчиться, не зможе скласти іспит з вищої математики, хіба що йому пощастить або допоможе товариш.
в) Жодний товариш не допоможе Івану.
Отже, якщо Івану не пощастить, то він не зможе скласти іспит.

7) а) Деякі паралелограми — ромби, а деякі — прямокутники.
б) Усі квадрати одночасно є ромбами і прямокутниками.
в) Усі прямокутники — паралелограми.
Отже, усі квадрати — паралелограми.

8) а) Деякі лікарі розумні.
б) Усі розумні люди вміють читати.
в) Деякі лікарі добре заробляють.
Отже, деякі лікарі вміють читати і добре заробляють.

9) а) Усі чоловіки люблять грати у спортивні ігри.
б) Футбол — спортивна гра.
в) Петро чоловік.
Отже, Петро любить грати у футбол.

10) а) Усі машини коштують дорого або є старими та зламаними.
б) Новий велосипед Сашка недорогий.
в) Велосипед Сашка не є зламаним.
Отже, велосипед Сашка — не машина.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 580 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Центр навчальної літератури, 2004. — 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група BHV, 2007. — 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. — К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. — 83 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.
9. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
11. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. — СПб.: Вильямс, 2003. — 958 с.
12. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 269 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
14. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. — Ужгород: УжДУ, 1971. — 224 с.
15. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. — К: Техніка, 1973. — 76 с.
16. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа; 2003. — 384 с.