МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ

ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

Факультет інформаційних технологій

Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

В. М. Коцовський

Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина І

Конспект лекцій

Ужгород – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Дискретна математика та теорія алгоритмів" вивчається студентами факультету інформаційних технологій на протязі перших двох семестрів. Актуальність вивчення основних понять та засад дискретної математики майбутніми спеціалістами в галузі інформаційних технологій зумовлена тим фактом, що основні способи подання та обробки інформації в інформаційних системах є дискретними за своєю природою [1, 2]. Тому важливою складовою процесу підготовки фахівців ІТ-сфери є вироблення знань та навичок, які стосуються розуміння та використання сучасних моделей та методів обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації.

Слід зазначити також велике методологічне значення вивчення дисципліни "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Воно, зокрема, полягає у тому, що переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12— "Інформаційні технології", широко використовують позначення, поняття та моделі дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як "Алгоритми та структури даних", "Об’єктно-орієнтоване програмування", "Бази даних та знань", "Системи штучного інтелекту", "Математичне моделювання" тощо.

У конспекті лекцій розглянуто навчальний матеріал, який входить до першої частини курсу "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Наведено відомості з теорії множин, теорії бінарних відношень та математичної логіки, якій присвячено два останні розділи. На початку кожного розділу наведено основні позначення та означення, знання яких є обов’язковим для успішного засвоєння навчальної дисципліни. Важливі поняття та терміни, які уперше зустрічаються у тексті, виділено курсивом. Переважну більшість понять проілюстровано на змістовних прикладах.

Виклад матеріалу є надзвичайно стислим. Додаткові теоретичні відомості, обґрунтування тверджень, а також більш детальний розгляд відповідних розділів дискретної математики читач може знайти у підручниках, які наведені у переліку рекомендованої літератури. Велика кількість додаткових задач різної складності наведена у [9-12].

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини належить до основних понять математики. Воно не має точного визначення і належить до так званих аксіоматичних понять.

Часто використовують інтуїтивне поняття множини, яке дав основоположник теорії множини Г. Кантор:

"Довільна сукупність об’єктів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від іншого і які складають єдине ціле, називається *множиною*. Об’єкти, які входять до складу множини, називаються її *елементами*".

Той факт, що елемент *x* *належить* множині *A*, позначається $x \in A$.

Запис $x \notin A$ означає, що елемент *x* *не належить* множині *A*.

Розглядається також множина, яка не містить жодного елемента. Ця множина називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Згідно до *інтуїтивного принципу об’ємності* дві множини є *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони складаються із однакових елементів. Рівність двох множин *A* та *B* позначається $A = B$.

Властивості відношення рівності множин:

1) $A = A$;

2) якщо $A = B$, то $B = A$;

3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$.

Множина, яка складається із елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позначається $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Приклад. Множина $\{a\}$ — одноелементна множина, єдиним елементом якої є елемент *a*.

Множини $\{1,2,3,4\}$ та $\{3,2,4,1\}$ є рівними, оскільки вони складаються із тих самих елементів.

Множини $\{1,2,3,4\}$ та $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ не є рівними, оскільки перша складається з чотирьох елементів, а друга — з двох.

1.2. Способи задання множин

Розглянемо три основні способи задання множин.

1. Задання множини переліком її елементів

Усі елементи множини записуються у фігурних дужках.

Приклад. $A=\{4,11,20,25,31\}$.

Цей спосіб на практиці використовується для задання скінченних множин, які містять відносно невелику кількість елементів. Він є непридатним для задання нескінченних множин, а також для задання скінченних множин, елементи яких важко перелічити (прикладом може бути множина собак міста Ужгорода).

2. Задання множини вказівкою властивостей її елементів (предикативний)

Під *властивістю* $P(x)$ об'єкта x будемо розуміти розповідне речення, в якому щось стверджується про об'єкт x і яке може бути або істинним, або хибним.

Множина A усіх об'єктів x, які мають властивість $P(x)$, позначається $A=\{x|P(x)\}$.

Приклад. Нехай $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x^2-7x+10=0\}$. Для знаходження елементів множини A потрібно розв'язати квадратне рівняння $x^2-7x+10=0$. Його коренями є числа $x_1=2,\ x_2=5$. Тому $A=\{2,\ 5\}$.

3. Задання множини за допомогою процедури породження елементів.

Приклад. Множина чисел Фібоначчі визначається наступним чином:

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1},\ n=1,2,\ldots$$

Вкажемо перші десять чисел Фібоначчі:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13,\ f_8 = 21,\ f_9 = 34,\ f_{10} = 55.$$

Із заданням множин пов’язаний цілий ряд парадоксів. Розглянемо

Парадокс перукаря. Єдиний перукар у місті N визначає множину A мешканців, яких він повинен голити, як сукупність всіх тих мешканців N, які не голяться самі. Але тоді для самого перукаря виходить протиріччя і при включенні його до множини A, і при віднесенні його до мешканців, які голяться самі.

Парадокс Рассела. Нехай A — множина усіх множин, які не є власними елементами. Тоді обидва можливі твердження про множину A є суперечливими:

1) A є елементом множини A;

2) A не є елементом множини A.

1.3. Основні числові множини. Методи математичної індукції

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносять:

1) Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

2) Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

3) Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

4) Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ (множина усіх чисел числової прямої).

Задача. Довести, що дійсне число $\sqrt{2}$ є ірраціональним (тобто не є раціональним).

1.3.1. Метод математичної індукції

Метод *математичної індукції* заснований на *принципі математичної індукції*, який полягає у наступному: *твердження справедливе для всіх натуральних n, якщо*

1) *твердження справджується при* $n = 1$ *(база індукції);*

2) *із виконання твердження для довільного натурального* $n = k$ *(припущення індукції) випливає його справедливість для* $n = k + 1$ *(індуктивний перехід)*.

Приклад. Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел рівна

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Розв’язок. Нехай $S_2(n)=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $S_2(1)=1^2=\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто $S_2(k)=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ і нехай $n=k+1$. Тоді

$$S_2(n)=S_2(k+1)=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)}{6}=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\big(2(k+1)+1\big)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача. Довести, число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ націло ділиться на 19.

Задача. Довести, що для чисел Фібоначчі справджується рівність

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_n f_{n+1}.$$

1.4. Підмножини

Множина *A* називається *підмножиною* множини *B*, якщо кожний елемент множини *A* є елементом множини *B*. У такому разі пишуть $A \subseteq B$.

Наприклад, $\{2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$.

Символ "$\subseteq$" називається символом операції *включення* множин.

Множина *A* називається *власною підмножиною* множини *B*, якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$.

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Символ "$\subset$" називається символом операції *строгого включення* множин.

Властивості операції включення:

1) $A \subseteq A$;

2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;

3) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

4) для довільної множини *A* $\varnothing \subseteq A$.

Властивості операції строгого включення:

1) $A \not\subset A$;

2) якщо $A \subset B$, то $B \not\subset A$;

3) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;

Множина усіх підмножин множина *A* називається *булеаном* множини *A* і позначається $B(A)$ або 2^A. Наприклад, якщо $A = \{1,2,3\}$, то

$$B(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Теорема. Якщо непорожня скінченна множина містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів.

Доведення. Використаємо індукцію за числом n.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $B(\{a_1\})=\{\varnothing,\{a_1\}\}$. Тому у випадку $n=1$ твердження теореми справджується.

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто у випадку k-елементної множини A кількість елементів булеана $B(A)$ рівна 2^k. Розглянемо випадок $n=k+1$. Нехай $A=\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\}$. Розіб'ємо елементи булеана $B(A)$ на дві групи підмножин. До першої групи віднесемо усі підмножини множини A, які не містять елемента a_{k+1}, до другої — усі інші підмножини. Перша група складається із усіх підмножин k-елементної множини $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$ і тому згідно з припущенням індукції містить 2^k елементів. Кількість елементів другої групи також рівна 2^k, оскільки відкинувши елемент a_{k+1} з довільної підмножини, яка входить до другої групи, отримаємо деяку підмножину, яка входить до першої групи. Тому загальна кількість елементів булеана $B(A)$ рівна $2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}=2^n$, що й треба було довести. Теорема доведена.

1.5. Операції над множинами

До основних операцій над множинами відносяться *доповнення*, *перетин*, *об'єднання*, *різниця*, та *симетрична різниця*, для позначення яких використовуються відповідно символи $^{-}$, $\cap$, $\cup$, $\backslash$, Δ:

$\overline{A}=\{x|x\in U,\ x\notin A\}$ — *доповнення множини A* до універсальної множини U.

$A\cap B=\{x|x\in A,\ x\in B\}$ — *перетин* множин *A* та *B*.

$A\cup B=\{x|x\in A \text{ або } x\in B\}$ — *об'єднання* множин *A* та *B*.

$A\backslash B=\{x|x\in A,\ x\notin B\}$ — *різниця* множин *A* та *B*.

$A\Delta B\overset{\text{def}}{=}(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ — *симетрична різниця множин A* та *B*

(позначення $\overset{\text{def}}{=}$ читається як "рівне за визначенням").

Приклад. Нехай $U=\{5,6,...,30\}$ — універсальна множина,

$A=\{6,8,9,10,12,14,20,21,22,27\}$,

$B=\{3x-6\mid x-\text{непарне}, x\in\mathbb{N}\}$,

$C=\{x\mid x+4-\text{просте число}\}$.

Вказати перелік елементів множини $D=B\backslash(A\Delta\overline{C})$.

Розв'язок.

1) Задамо множини *B* та *C* переліком їх елементів:

$B=\{9,15,21,27\}$, $C=\{7,9,13,15,19,25,27\}$.

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\overline{C}=\{5,6,8,10,11,12,14,16,17,18,20,21,22,23,24,26,28,29,30\}$.

б) Знайдемо симетричну різницю множини *A* та $\overline{C}$ за формулою:

$$A\Delta\overline{C}=\left(A\setminus\overline{C}\right)\cup\left(\overline{C}\setminus A\right).$$

Оскільки $A\setminus\overline{C}=\{9,27\}$, $\overline{C}\setminus A=\{5,11,16,17,18,23,24,26,28,29,30\}$, то

$A\,\Delta\,\overline{C}=\{5,9,11,16,17,18,23,24,26,27,28,29,30\}$.

в) Знайдемо різницю множин B та $A\Delta\overline{C}$:

$B\setminus\left(A\Delta\overline{C}\right)=\{15,21\}$.

Відповідь: $D=\{15,21\}$.

Часто для ілюстрації операцій над множинами використовують *діаграми Венна*. При цьому універсальну множину позначають прямокутником, усі інші множини — овалами (або іншими фігурами) у ньому. Результат операції виділяється кольором або штрихуванням.

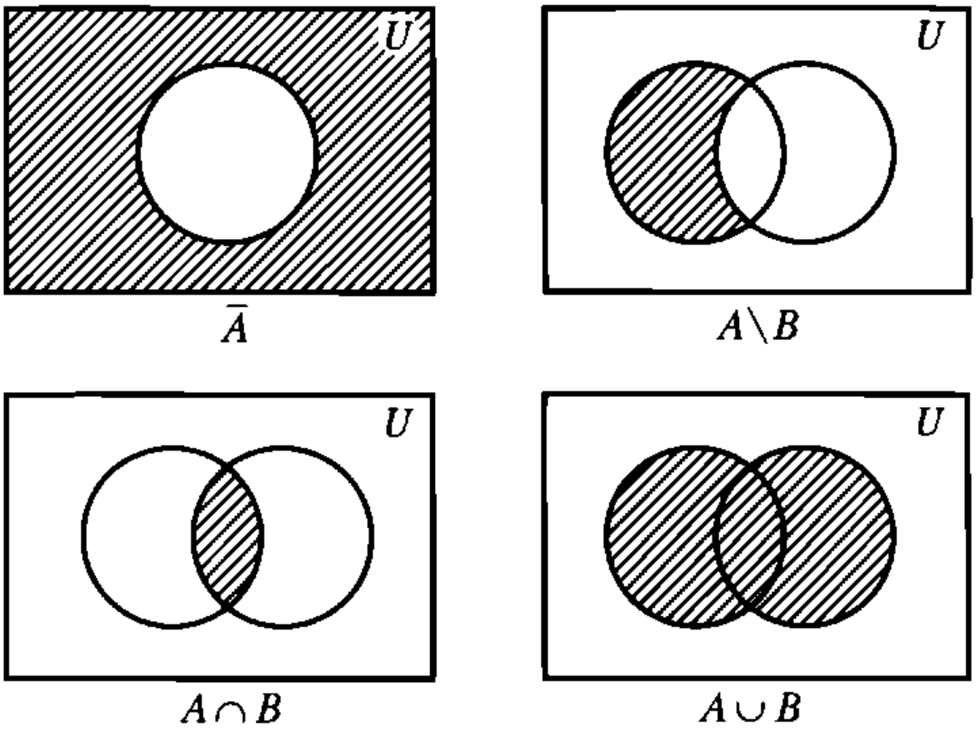
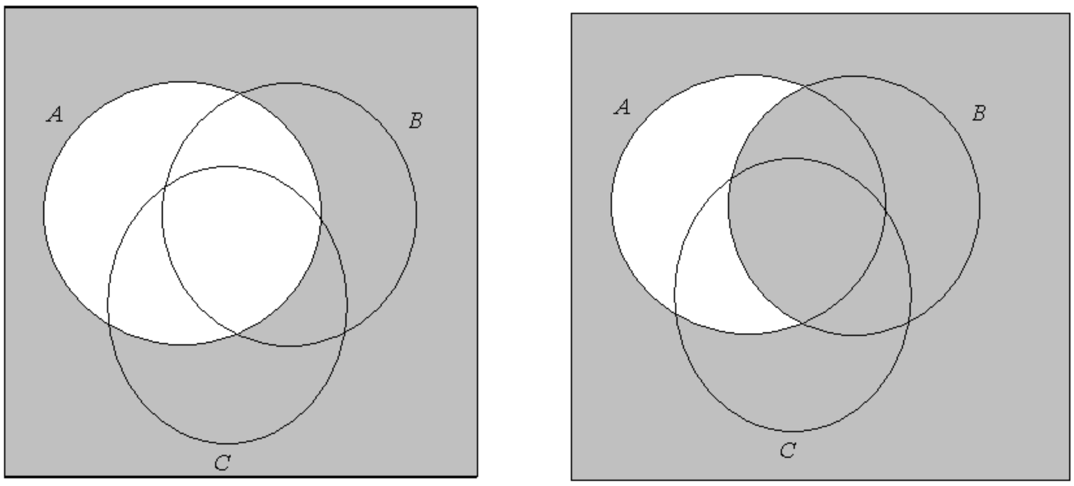


Рис. 1. Діаграми Венна основних операцій над множинами

Приклад. На *діаграмі Венна* зобразити множину $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$.

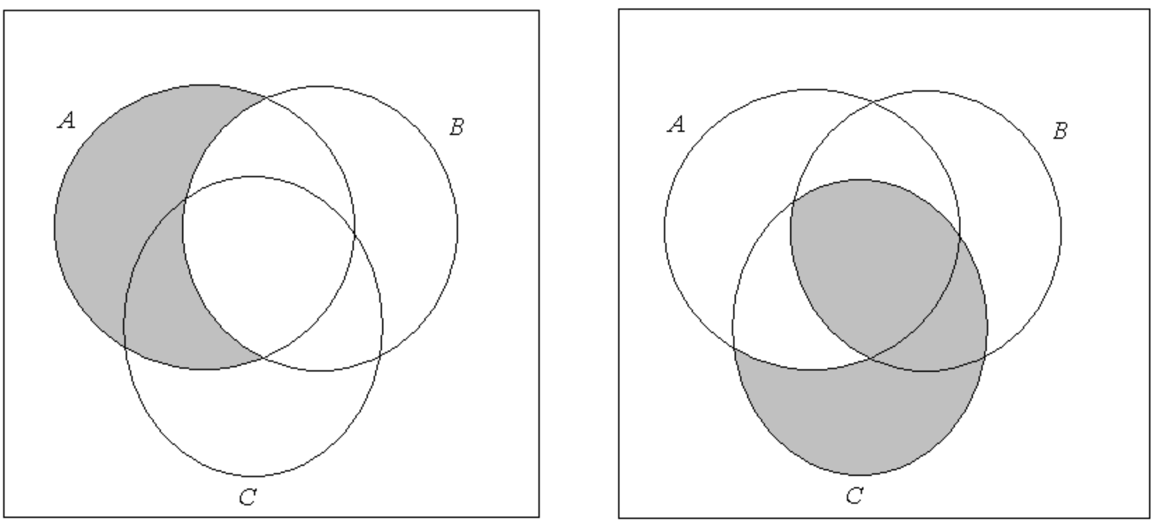
Розв’язок.

Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$, у порядку їх виконання:



$\overline{A}$ $\qquad\qquad$ $\overline{A} \cup B$

Рис. 2.



$\overline{\overline{A} \cup B}$ $\qquad\qquad$ $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$

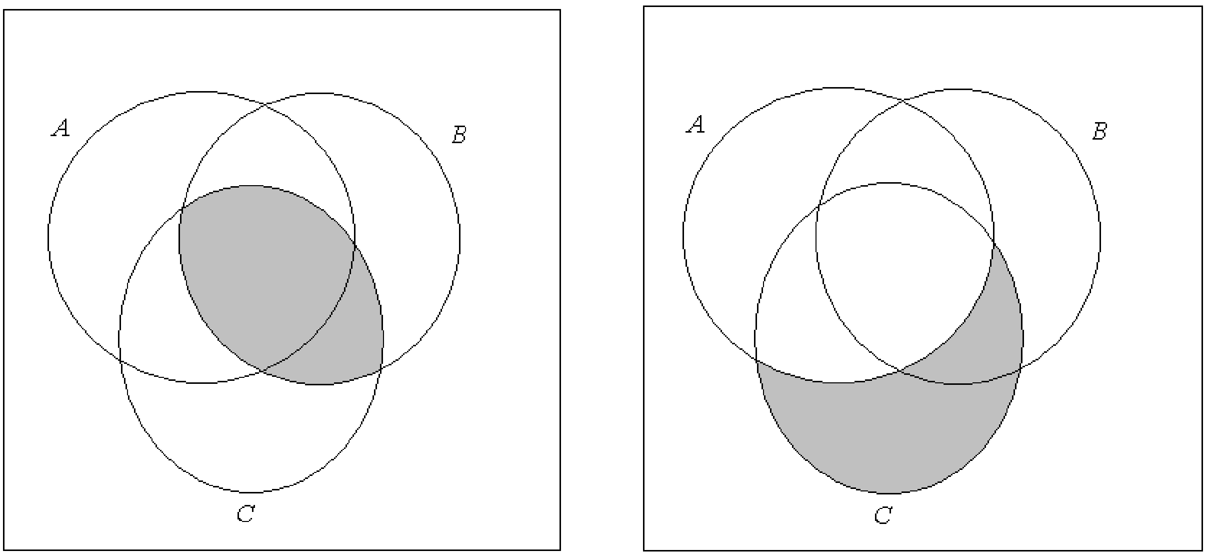
Рис. 3.

На правій діаграмі на рис. 3. зображена шукана множина.

Приклад. Довести, що для довільних множин *A*, *B* та *C* справджується рівність $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Розв’язок.

Перший спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 3. Побудуємо діаграму для множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$:



$B \cap C$ $\qquad\qquad$ $C \setminus A$

Рис. 4.

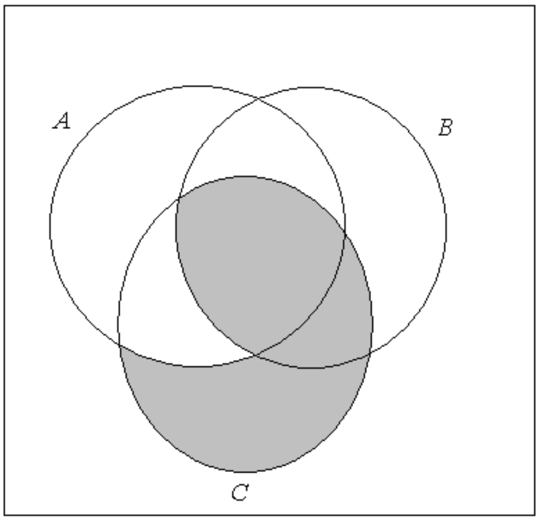


Рис. 5. Діаграма Ейлера-Венна множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 3 (справа) та рис. 5. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб. Використаємо *інтуїтивний принцип об'ємності*, згідно до якого для доведення потрібної рівності достатньо довести, що

$$C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A)$$

та

$$B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$. Тоді

$$\begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right. \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент *x* множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент x множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Задача. Перевірити, чи є одна із двох множин $(A \setminus C) \cup B \cap (C \setminus \overline{A})$ та $A \setminus \overline{B \cup \overline{C}}$ підмножиною іншої.

Приклад. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Pascal, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Pascal і C++, 7 — Pascal і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Pascal, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язок. У якості універсальної множини U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Pascal, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

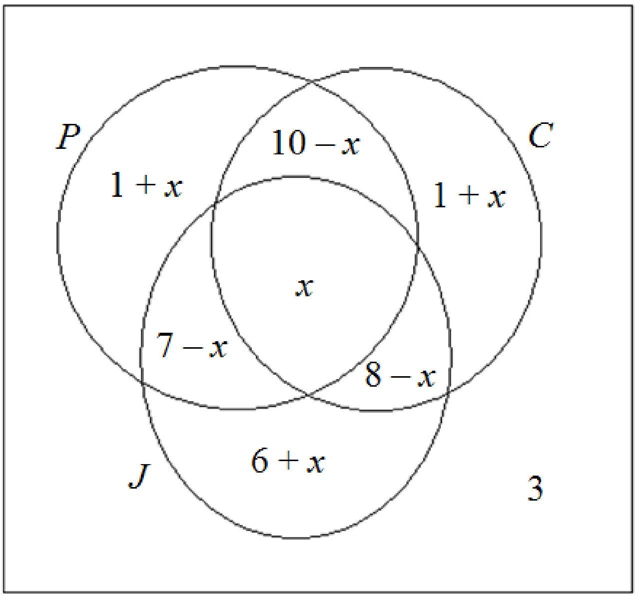


Рис 6. Діаграма до задачі

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Pascal, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10-x$ програмістів знають лише Pascal і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 5, яка відповідає множині $(P \cup C) \setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7-x$ програмістів знають лише мови Pascal і Java, $8-x$ — лише мови C++ та Java.

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Pascal, C++ та Java. Оскільки мову Pascal знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Pascal рівна

$$18-(10-x)-(7-x)-x=1+x.$$

Аналогічно отримуємо, що $19-(10-x)-(8-x)-x=1+x$ програмістів знають лише мову C++, $21-(7-x)-(8-x)-x=6+x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 6).

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18+(8-x)+(1+x)+(6+x)+3=40.$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини *P*, останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36+x=40$. Звідси $x=4$.

Приклад. Нехай

A — множина трикутників,

B — множина чотирикутників,

C — множина правильних многокутників,

D — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут,

E — множина рівносторонніх трикутників.

Вказати множину:

$$((D\cap A)\Delta E)\setminus(A\cap C).$$

Розв'язок.

Виконаємо операції по черзі:

а) $D\cap A$ — множина прямокутних трикутників. Позначимо цю множину через *F*.

б) $(F\,\Delta\,E)=(F\setminus E)\cup(E\setminus F)$. Оскільки $E\cap F=\varnothing$, то

$$(F\setminus E)\cup(E\setminus F)=E\cup F.$$

в) $A\cap C=E$.

г) $\big((D\cap A)\Delta E\big)\setminus(A\cap C)=(E\cup F)\setminus E$. Оскільки множини F та E не перетинаються, то $(E\cup F)\setminus E=F$.

Відповідь: $\big((D\cap A)\Delta E\big)\setminus(A\cap C)=F$, де F — множина прямокутних трикутників.

1.6. Алгебра множин

Множина усіх підмножин деякої універсальної множини U разом із заданими на ній операціями $\bar{\ }$, $\cap$, $\cup$ називається *алгеброю множин*.

Основні *закони алгебри множин*:

1) Закони *комутативності*:

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

2) Закони *асоціативності*:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3) Закони *ідемпотентності*:

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

4) Закони *дистрибутивності*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

5) Властивості універсальної множини:

$$A \cap U = A,$$

$$A\cup U=U,$$

$$A\Delta U=\overline{A}.$$

6) Властивості порожньої множини:

$$A\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$A\cup\varnothing=A,$$

$$A\Delta\varnothing=A.$$

7) Закон подвійного доповнення:

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

8) Властивості доповнення:

$$A\cap\overline{A}=\varnothing,$$

$$A\cup\overline{A}=U,$$

$$A\Delta\overline{A}=U.$$

9) Закони де Моргана:

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

10) Властивості різниці:

$$A\setminus B=A\cap\overline{B},$$

$$A\setminus A=\varnothing,$$

$$U\setminus A=\overline{A}.$$

11) Властивості симетричної різниці:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A),$$

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B),$$

$$\overline{A\Delta B} = \bar{A}\Delta B = A\Delta \bar{B},$$

$$A\Delta A = \varnothing.$$

Приклад. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $A \cup A \cap B = A$ (закон поглинання);

б) $A \cup \bar{A} \cap B = A \cup B$;

в) $\overline{\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A)} = A \setminus B$.

Розв'язок.

а) Використаємо перший дистрибутивний закон та властивості універсальної множини:

$$A \cup A \cap B \overset{5}{=} (A \cap U) \cup (A \cap B) \overset{4}{=} A \cap (U \cup B) \overset{5}{=} A \cap U \overset{5}{=} A.$$

Над рівностями у попередньому рядку вказані номери законів алгебри множин, які використовуються при переході від множини у лівій частині рівності до множини у правій частині.

б) Використаємо другий дистрибутивний закон, властивості доповнення та універсальної множини:

$$A \cup \bar{A} \cap B \overset{4}{=} (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \overset{7}{=} U \cap (A \cup B) \overset{5}{=} A \cup B.$$

в) Використаємо закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості операції віднімання та закон ідемпотентності:

$$\overline{\bar{A}\cup B\cup\left(C\setminus A\right)}\overset{9}{=}A\cap\overline{B\cup\left(C\setminus A\right)}\overset{2,9,10}{=}A\cap\bar{B}\cap\overline{C\cap\bar{A}}\overset{1,9}{=}\bar{B}\cap A\cap\left(\bar{C}\cup A\right)\overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=}\bar{B}\cap\left(A\cap\bar{C}\cup A\cap A\right)\overset{3}{=}\bar{B}\cap\left(A\cap\bar{C}\cup A\right)\overset{\text{а)}}{=}\bar{B}\cap A\overset{10}{=}A\setminus B.$$

Задача. Довести, що $\left(A\Delta\left(A\cap\bar{B}\right)\right)\cap\left(\bar{B}\Delta\bar{C}\right)=\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right)$

Використаємо закон асоціативності, комутативності, дистрибутивності та ідемпотентності, властивості універсальної та порожньої множин а також властивості операції віднімання та симетричної різниці множин:

$$\left(A\Delta\left(A\cap\bar{B}\right)\right)\cap\left(\bar{B}\Delta\bar{C}\right)\overset{3}{=}\left(A\cap\bar{B}\right)\Delta\left(A\cap\bar{C}\right)\Delta\left(\left(A\cap\bar{B}\right)\cap\bar{B}\right)\Delta\left(\left(A\cap\bar{B}\right)\cap\bar{C}\right)\overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}\left(A\cap\bar{B}\right)\Delta\left(A\cap\bar{C}\right)\Delta\left(A\cap\left(\bar{B}\cap\bar{B}\right)\right)\Delta\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)\overset{2,3}{=}\left(A\cap\bar{C}\right)\Delta\left(A\cap\bar{B}\right)\Delta\left(A\cap\bar{B}\right)\Delta$$

$$\Delta\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)\overset{11}{=}\left(A\cap\bar{C}\right)\Delta\varnothing\Delta\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)\overset{5,6}{=}\left(A\cap\bar{C}\cap U\right)\Delta\left(A\cap\bar{C}\cap\bar{B}\right)\overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=}\left(A\cap\bar{C}\right)\cap\left(U\Delta\bar{B}\right)\overset{5}{=}\left(A\cap\bar{C}\right)\cap\bar{\bar{B}}\overset{1,2,3,7}{=}A\cap\bar{C}\cap B\cap\bar{C}\overset{10}{=}\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right).$$

1.7. Потужність множини

Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. У протилежному випадку множина називається *нескінченною*.

Кількість елементів скінченної множини називається *потужністю множини*.

Потужність множини A позначається $|A|$.

Теорема. Якщо A, B та C — скінченні множини, то

а) $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$;

б) $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$.

Доведення.

а) Нехай

$$A\cap B = \{c_1,\ldots,c_k\},\ A = \{a_1,\ldots,a_l,c_1,\ldots,c_k\},\ B = \{b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_k\},$$

де $a_i \notin B,\ i = 1,\ldots,l,\ b_j \notin A,\ j = 1,\ldots,m$. Тоді

$$A\cup B = \{a_1,\ldots,a_l,b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_k\}.$$

Тому

$$|A\cup B| = l + m + k = (l+k) + (m+k) - k = |A| + |B| - |A\cap B|,$$

що й треба було довести.

б) Використаємо результат пункту а):

$$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| =$$

$$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$$

$$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - \left(|A\cap C| + |B\cap C| - |A\cap B\cap C|\right) =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|.$$

Відповідність між елементами множин A та B називається *взаємно однозначною*, якщо кожному елементу множини A відповідає *єдиний елемент* множини B і кожному елементу множини B відповідає єдиний елемент множини A.

Приклад. Відображення $f : x \to 3x+1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A=\{1,2,5\}$ та $B=\{4,7,16\}$.

Дві множини A та B називаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді $|A|=|B|$.

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. $|A|=|A|$.
2. Якщо $|A|=|B|$, то $|B|=|A|$.
3. Якщо $|A|=|B|$ і $|B|=|C|$, то $|A|=|C|$.

Приклад. Множини $A=\{1,2,\ldots,n\}$ та $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f : k \to a_k$.

З попереднього прикладу випливає, що скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад. Множина парних цілих чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f : 2n \to n \ (n \in \mathbb{Z})$.

Множина A називається *зліченною*, якщо вона є рівнопотужною множині натуральних чисел.

Теорема 1. Множина цілих чисел є зліченною.

Доведення. Покажемо, що множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ рівнопотужна множині цілих чисел $\mathbb{Z}$. Побудуємо відповідне відображення $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ наступним чином:

$$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=-1,\ f(4)=2,\ f(5)=-2,\ f(6)=3,\ f(7)=-3,\ldots$$

Легко переконатися, що $f(2k-1)=-(k-1),\ f(2k)=k,\ k=1,2,\ldots$ і відображення f є взаємно однозначним і обернене до нього відображення $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ визначається наступним чином:

$$g(n)=2n, \text{ якщо } n>0 \text{ та } g(n)=1-2n, \text{ якщо } n\le 0.$$

Отже, множини $\mathbb{N}$ та $\mathbb{Z}$ є рівнопотужними.

Теорема 2. Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є зліченною.

Доведення. Висотою раціонального дробу $\frac{a}{b},\ (a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N})$ назвемо число $|a|+b$. Запишемо раціональні числа у порядку зростання висот відповідних їм правильних нескоротних дробів:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{3}{1},\frac{-3}{1},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{3}{2},\frac{-3}{2},\frac{4}{1},\frac{-4}{1},\ldots.$$

Кожне раціональне число зустрінеться у цій послідовності рівно один раз. Тому елементи множини $\mathbb{Q}$ можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел. Встановлена за допомогою нумерації відповідність є взаємно однозначною. Отже, множина раціональних чисел — зліченна.

Теорема 3. Для множин справджуються наступні твердження:

а) для кожної нескінченної множини можна вказати її зліченну підмножину.

б) будь-яка підмножина зліченної множина або скінченна, або зліченна.

в) об'єднання скінченної та зліченної множин є зліченної множинною.

г) об'єднання скінченної кількості зліченних множин — зліченна множина.

Теорема 4. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Множина $\mathbb{R}$ та будь-яка рівнопотужна їй множина називається континуальною.

Задача. Довести, що континуальними множинами є

а) відрізок $[0, 1]$;

б) інтервал (a,b), де $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

в) одиничний квадрат.

2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартів добуток множин

Декартовим добутком множин A та B називається множина $A \times B$ усіх упорядкованих пар, перша координата (компонента) яких належить множині A, а друга — множині B. Тобто, $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$. При цьому *порядок множників є суттєвим*.

Приклад. Знайти $A \times B$, якщо $A = \{1,3,8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язання. $A \times B = \{(1,x),(1,y),(3,x),(3,y),(8,x),(8,y)\}$.

Поняття декартового добутку поширюється на довільну скінченну кількість множників:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Елементи декартового добутку n множин називаються *кортежами* довжини n (впорядкованими n-ками).

Приклад. Знайти $B \times A \times B$, якщо $A = \{1,3,8\}$, $B = \{x, y\}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $B \times A$.

$$B \times A = \{(x,1),(x,3),(x,8),(y,1),(y,3),(y,8)\}.$$

Тоді

$$B \times A \times B = \{(x,1,x),(x,1,y),(x,3,x),(x,3,y),(x,8,x),(x,8,y),$$
$$(y,1,x),(y,1,y),(y,3,x),(y,3,y),(y,8,x),(y,8,y)\}.$$

Властивості декартового добутку множин:

1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;

2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

3) $\left(A\cap B\right)\times C=\left(A\times C\right)\cap\left(B\times C\right)$;

4) якщо $A\subseteq B$, то $A\times C\subseteq B\times C$;

5) якщо $A\neq B$, то $A\times B\neq B\times A$;

6) якщо множини A та B — скінченні, то $\left|A\times B\right|=\left|A\right|\cdot\left|B\right|$ — *комбінаторне правило множення*.

7) якщо множини A та B — зліченні, то множина $A\times B$ також є зліченною.

Задача. Навести формулу для $\overline{A\times B}$.

2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень

Бінарним відношенням, визначеним на множинах *A* та *B*, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні *R* позначається як aRb або $(a,b) \in R$. Якщо відповідні елементи не перебувають у відношенні *R*, то це записується як $a\bar{R}b$ або $(a,b) \notin R$.

Множини *A* та *B* називаються *базисними множинами* бінарного відношення.

Бінарне відношення називається *однорідним,* якщо його базисні множини співпадають.

Приклад. Розглянемо *R* — бінарне відношення подільності, визначене на множинах $A = \{3,5,6\}$ та $B = \{1,2,4\}$. Вважаємо, що

xRy тоді і тільки тоді, коли *x* націло ділиться на *y*.

Тоді

$$R = \{(3,1),(5,1),(6,1),(6,2)\}.$$

Так як $A \neq B$, то відношення *R* — неоднорідне.

Приклад. Однорідне бінарне відношення *R* — "навчатися у одній групі", визначене на множині студентів УжНУ.

xRy тоді і тільки тоді, коли студенти *x* та *y* — одногрупники.

n-арним *відношенням*, визначеним на множинах $A_1, \ldots, A_n$, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Якщо $n = 1$, то маємо *унарне* відношення, якщо $n = 2$ — бінарне відношення, якщо $n = 3$ — *тернарне* відношення.

Приклад. Деякі підприємства, які займаються дизайном інтер'єру приміщень, використовують продукцію деяких виробничих фірм, що розташовані в інших містах. Для аналізу необхідно скласти "відношення" реальних комбінацій трьох параметрів: назви фірми, місця її знаходження (місто), виду продукції, що пропонується.

Нехай відомо, що АП "Orion" (Одеса) продає меблі, ТОВ "День" (Харків) продає світильники, ПП "Sit" (Одеса) торгує меблями та світильниками, ТОВ "House" (Харків) продає світильники та матеріали.

В цьому відношенні беруть участь три множини:

Фірми = {АП "Orion", ТОВ "День", ПП "Sit", ТОВ "House"}.

Міста = {Одеса, Харків}.

Продукція = {меблі, світильники, матеріали}.

Це тернарне відношення можна формально зобразити списком елементів:

{(АП "Orion", Одеса, меблі), (ТОВ "День", Харків, світильники),
(ЧКП "Sit", Одеса, меблі), (ПП "Sit", Одеса, світильники),
(ТОВ "House" Харків, світильники), (ТОВ "House", Харків, матеріали)}.

Оскільки n-арні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *графів* (діаграм) відношень.

При матричному способі задання відношення елементам множини A ставляться у відповідність рядки матриці $M(R)$, елементам множини B — стовпці. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні R, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин A та B ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a, з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b.

Приклад. Відношення $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$ визначене на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ та $B=\{1,2,3,4\}$. Задати його за допомогою матриці та діаграми (графічно).

Розв'язання. Матриця відношення R має вигляд

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Граф відношення наведено на рис. 7.

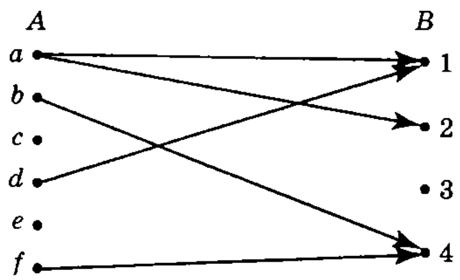


Рис. 7. Граф відношення R

Множини $\mathrm{pr}_1 R=\{x|(x,y)\in R\}$ та $\mathrm{pr}_2 R=\{y|(x,y)\in R\}$ відповідно називаються *першою* та *другою проекціями* відношення R.

Для відношення R із попереднього прикладу $\mathrm{pr}_1 R = \{a, b, d, f\}$, $\mathrm{pr}_2 R = \{1, 2, 4\}$.

Множина $R[C] = \{y \mid (c, y) \in R, c \in C\}$ називається *перерізом* бінарного відношення R за підмножиною C першої базисної множини A.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[\{a, d\}] = \{1, 2\}$.

Переріз $R[\{a\}]$ називається *перерізом бінарного відношення за елементом a.* Часто для одноелементних зрізів використовують позначення $R[a]$.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[b] = \{4\}$, $R[c] = \varnothing$.

Множина усіх одноелементних перерізів бінарного відношення R, визначеного на множинах A та B, називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B / R.

Тобто, $B / R = \{R[x] \mid x \in A\}$.

Наприклад, для відношення R із діаграмою, наведеною на рис. 7,

$$R[a] = \{1, 2\},\ R[b] = R[f] = \{4\},\ R[c] = R[e] = \varnothing,\ R[d] = \{1\}.$$

Тому $B / R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}, \varnothing\}$.

У випадку однорідних бінарних відношень на діаграмі відношення зображується лише одна множина точок.

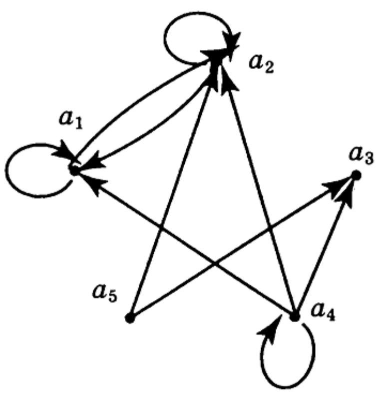


Рис. 8. Приклад діаграми однорідного відношення

Діаграмі, зображеній на рис. 8, відповідає однорідне бінарне відношення $R=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_4,a_1),(a_4,a_2),(a_4,a_3),(a_4,a_4),(a_5,a_2),$ $(a_5,a_3)\}$, визначене на множині $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$.

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$, визначене на множинах B та A, називається *оберненим* до відношення $R \subseteq A \times B$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 7,

$R^{-1} = \{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$, а для бінарного відношення "<", визначеного на довільній числовій множині, оберненим буде відношення ">".

Бінарне відношення

$$S \circ R = \{(x,z) | \text{ існує таке } y \in B, \text{що} (x,y) \in R, (y,z) \in S\} \subseteq A \times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$.

Приклад. Знайти добуток бінарних відношень R та S, діаграми яких зображені на рис. 9.

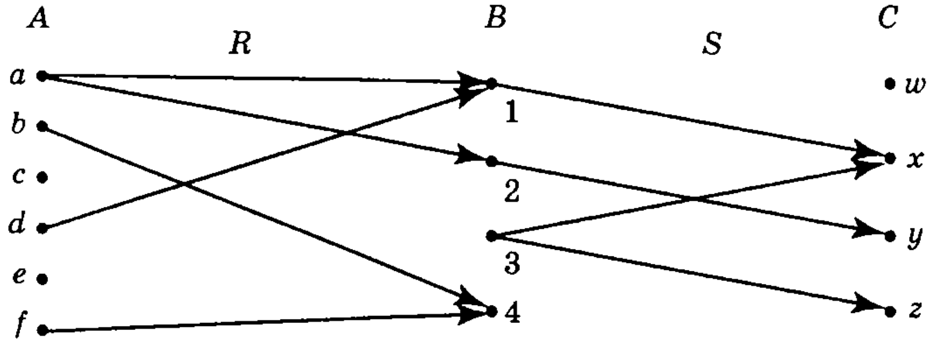


Рис. 9. Діаграми відношень *R* та *S*

Розв’язок. $S \circ R = \{(a,x),(a,y),(d,x)\}$.

Приклад. Нехай

$A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{23,24,25,26,27\}$, $C = \{a,b,c,d,e,f\}$,

бінарне відношення R визначене на множинах A та B наступним чином: xRy тоді і тільки тоді, коли y націло ділиться на x, S — бінарне відношення між елементами множин B та C:

$S = \{(23,f),(24,b),(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\}$.

Знайти проекції відношення $T = S \circ R$ та вказати $T^{-1}\left[\{a,c,d,f\}\right]$.

Розв’язок. Задамо бінарне відношення R переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:

$R = \{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$.

Тоді з використанням рис. 9 отримаємо

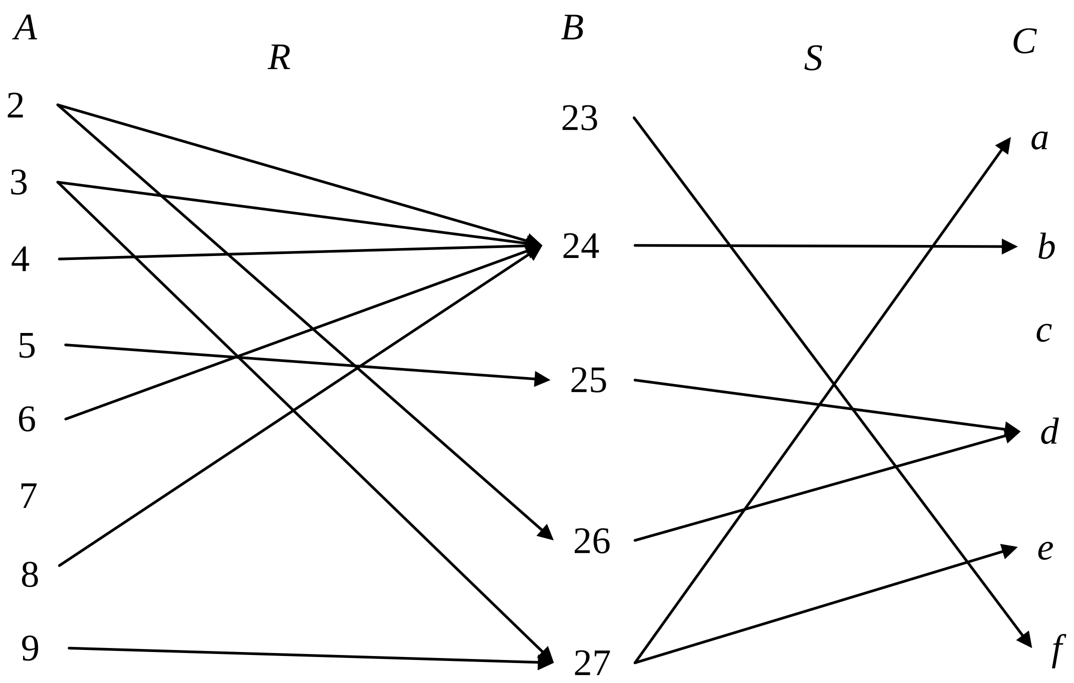


Рис. 10. Діаграма відношень *R* та *S*.

$$T=\{(2,b),(2,d),(3,a),(3,b),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,a),(9,e)\}.$$

Тому

$$\operatorname{pr}_1 T=\{2,3,4,5,6,8,9\},\ \operatorname{pr}_2 T=\{a,b,d,e\}.$$

Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:

$$T^{-1}=\{(b,2),(d,2),(a,3),(b,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b,8),(a,9),(e,9)\}.$$

Тоді $T^{-1}\left[\{a,c,d,f\}\right]=\{2,3,5,9\}$.

Задача 1. Нехай $R=\{(x,y)\,|\,x<y\}$ — однорідне бінарне відношення на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^n $(n\in\mathbb{N})$.

Задача 2. Нехай R — таке однорідне бінарне відношення на множині точок площини, що $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли відстань від точки x до точки y рівна 1. Знайти $R^3\left[(0,0)\right]$.

Задача 3. Нехай A — множина усіх людей, R — відношення батьківства на множині A: $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли x є батьком або матір'ю y. Записати відношення S “брат-сестра” ($x\,S\,y \Leftrightarrow$ x є братом або сестрою y), використовуючи R та операцій над відношеннями.

2.4. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення*.

Бінарне відношення $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині *A* (відношенням *тотожності, діагоналлю* множини *A*).

Бінарне відношення *R* називається *рефлексивним* на множині *A*, якщо для кожного $x \in A$ має місце xRx, тобто кожний елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* сам із собою.

Наприклад, відношення "=", "≤" рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a \in \mathbb{R}$ $a = a, a \le a$, відношення "||" (паралельність прямих) є рефлексивним на множині усіх прямих площини, а відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" не є рефлексивними на тих самих множинах.

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з’єднана петлею із самою собою.

Наприклад, рефлексивним є бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 11.

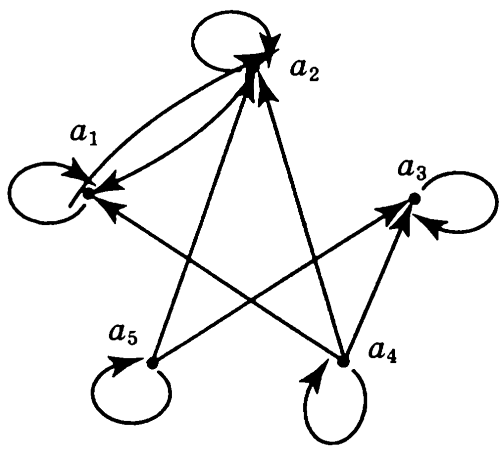


Рис. 11. Рефлексивне бінарне відношення

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 8 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

Критерієм (необхідною і достатньою умовою) рефлексивності є умова $I_A \subseteq R$.

Бінарне відношення R називається *іррефлексивним (антирефлексивним)* на множині A, якщо для жодного $x \in R$ не має місце xRx.

Наприклад, відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" — іррефлексивні.

Критерієм іррефлексивності є умова $I_A \cap R = \varnothing$.

Бінарне відношення R називається *симетричним* на множині A, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що yRx.

Наприклад, відношення рівності та подібності на множині трикутників площини, відношення "навчатися у одній групі" — симетричні.

Відношення "$\leq$" не є симетричним, оскільки якщо $a \leq b$ і $a \neq b$, то нерівність $b \leq a$ не виконується.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 12, є симетричним.

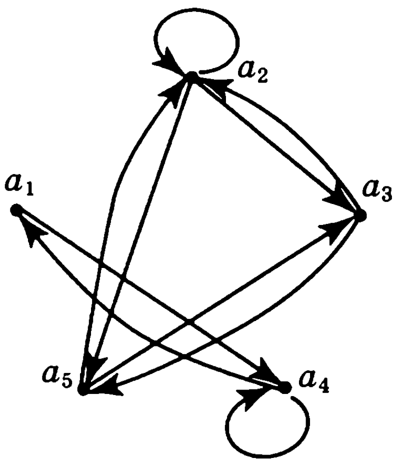


Рис. 12. Приклад діаграми симетричного бінарного відношення

Критерієм симетричності є виконання рівності $R^{-1} = R$.

Бінарне відношення R називається *асиметричним* на множині A, якщо для довільних (необов'язково різних) $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що не виконується yRx $\left(x R y \Rightarrow y \bar{R} x\right)$.

Приклад асиметричного відношення — відношення ">" на множині дійсних чисел.

Умова $R^{-1} \cap R = \varnothing$ може використовуватися у якості *критерію асиметричності*.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним* на множині A, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \neq y$ та $x R y$ випливає, що не виконується $y R x$ (з $x R y$ та $y R x$ випливає, що $x = y$).

Кожне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним, але не навпаки. Наприклад, відношення "≥" є антисиметричним, але воно не є асиметричним (умова асиметричності порушується для пар однакових елементів).

Умова $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$ може використовуватися у якості *критерію антисиметричності*.

Бінарне відношення R називається *транзитивним* на множині A, якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що $x R y$ та $y R z$ випливає, що $x R z$.

Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості *критерію транзитивності*.

Приклад. Відношення $"=", ">", "<", "\geq", "\leq"$ є транзитивними, а відношення $"\perp"$ не є транзитивним.

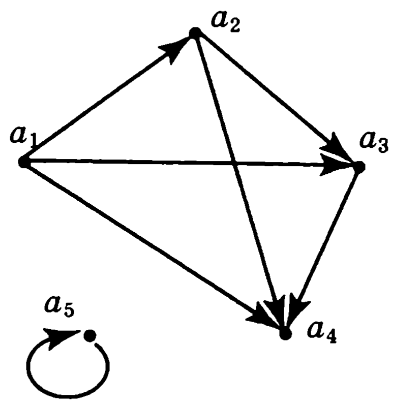


Рис. 13. Приклад діаграми транзитивного відношення

Бінарне відношення R називається *лінійним* на множині A, якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A, b \in A$ хоча би одна із пар (a,b), (b,a) є елементом відношення R.

Наприклад, відношення "$\le$" є лінійним, а відношення "$\subseteq$" — ні $(\{1,2\} \not\subseteq \{3\}, \{3\} \not\subseteq \{1,2\})$.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P.

Наприклад, якщо R — однорідне відношення на множині A, то

його рефлексивне замикання $[R]_{\text{ref}}$ може бути знайдене за формулою $[R]_{\text{ref}} = R \cup I_A$,

його симетричне замикання $[R]_{\text{sym}}$ — за формулою $[R]_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$,

його транзитивне замикання $[R]_{\text{trans}}$ — за формулою $[R]_{\text{trans}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$.

Приклад. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x,y) \,\|\, x - y| \le 1\}$, заданого на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Оскільки $|x-x|=0<1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є іррефлексивним.

Оскільки $|x-y|=|y-x|$, то з того, що $|x-y|\le 1$ випливає, що $|y-x|\le 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1,0)$).

Оскільки $(0,1)\in R$ та $(1,2)\in R$, але $(0,2)\notin R$, то відношення R не є транзитивним.

Оскільки $(0,2)\notin R, (2,0)\notin R$, то відношення не є лінійним.

Приклад. Задати за допомогою матриці мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке не є іррефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R\cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $S=R\cup R^2$.

Розв'язок. Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A, яка задовольняє умови $(x,y)\in R$ та $(y,x)\notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів $(x,y)\in R$ та $(y,z)\in R$, такі, що $(x,z)\notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R'=\{(a,b),(b,c)\}$. Але відношення R' є іррефлексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару, яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a,a). Отримуємо $R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. Діаграма відношення R наведена на рис. 14.

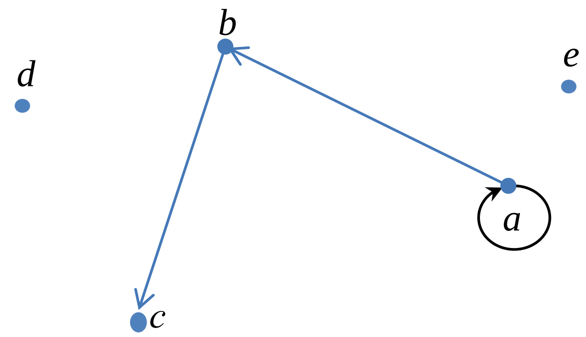


Рис. 14. Діаграма відношення *R*

Відношення *R* є шуканим і має наступну матрицю:

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2=\{(a,a),(a,b)(a,c)\}$.

Тому $R\cap R^2=\{(a,a),(a,b)\}$. Звідси

$\mathrm{pr}_1\left(R\cap R^2\right)=\{a\}$, $\mathrm{pr}_2\left(R\cap R^2\right)=\{a,b\}$.

$S=R\cup R^2=\{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

Отже, $S[a]=\{a,b,c\}$, $S[b]=\{c\}$, $S[c]=S[d]=S[e]=\varnothing$.

Тому $A/S=\{\{a,b,c\},\{c\},\varnothing\}$.

Приклад. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(2,1),(3,1),(2,2),(4,6)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання *S*. Вказати матрицю замикання та знайти $S\left[\{1,2,5\}\right]$.

Розв'язок. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини A перебуває у відношенні R з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні S з самим собою (наприклад, з того, що $(3,1)\in R$ та симетричності S випливає, що $(1,3)\in S$. Тоді з транзитивності S отримуємо, що $(1,1)\in S$ та $(3,3)\in S$). Тому пари $(1,1),(3,3),(4,4),(6,6)$ обов'язково потрібно включити у відношення S. Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2),(1,3)$, $(2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу S. Отже остаточно маємо $S=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),(3,1),(3,2), (3,3), (4,4), (4,6), (6,4),$ $(6,6)\}$. Легко переконатися, що S — симетричне та $S^2=S$. Отже, відношення S — транзитивне. Тоді

$$M(S)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та $S\left[\{1,2,5\}\right]=\{1,2,3\}$.

2.5. Відношення еквівалентності

Однорідне бінарне відношення E називається відношенням *еквівалентності* на множині A, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Якщо E — відношення еквівалентності, $a \in A, b \in A$ і aEb, то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення "народитися у один день", тощо.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності E для елемента $a \in A$ називається множина усіх елементів множини A, які еквівалентні елементу a.

Клас еквівалентності, який відповідає елементу a, співпадає із перерізом $E[a]$.

Теорема 1. Два класи еквівалентності множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються.

Доведення. Нехай $a,b \in A$ Припустимо, що $E[a] \cap E[b] \neq \varnothing$. Покажемо, що тоді $E[a] = E[b]$.

Доведемо спочатку, що $E[a] \subseteq E[b]$. Нехай x — довільний елемент множини $E[a]$. Тоді $(a,x) \in E$. Нехай $c \in E[a] \cap E[b]$. Тоді $(a,c) \in E$ та $(b,c) \in E$. З симетричності відношення E випливає, що $(c,a) \in E$. Тоді із того, що $(b,c) \in E$, $(c,a) \in E$ та транзитивності відношення E отримуємо, що $(b,a) \in E$ та $(b,x) \in E$. Тому $x \in E[b]$. Отже, $E[a] \subseteq E[b]$.

Обернене включення доводиться аналогічно. Отже, якщо два класи еквівалентності мають спільні елементи, то вони співпадають. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ — деяка система підмножин множини *A*, де *I* — множина індексів.

Система $\mathcal{C}$ називається *покриттям множини A*, якщо для довільного $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система $\mathcal{C}$ називається *розбиттям множини A*, якщо вона є покриттям множини *A* і крім того множини C_i та C_j не перетинаються для довільних відмінних між собою $i \in I,\ j \in I$, тобто $C_i \cap C_j = \varnothing$ у випадку $i \neq j$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тоді

1) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\}, \{1,2,5\}, \{3,5\}\}$ не є покриттям множини *A*, оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до $\mathcal{C}$.

2) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\}, \{1,2,5\}, \{4,5\}\}$ є покриттям множини *A*, але не є її розбиттям оскільки $\{1,3\} \cap \{1,2,5\} \neq \varnothing$.

3) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\}, \{2,5\}, \{4\}\}$ є розбиттям множини *A*.

Теорема 2. Якщо *E* — відношення еквівалентності на множині *A*, множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям множини *A*. І навпаки, для довільного розбиття $\mathcal{C}$ множини *A* можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з $\mathcal{C}$.

Наслідок. Якщо однорідне бінарне відношення *E* є рефлексивним на множині *A* і одноелементні перерізи множини *A* за відношенням *E* або співпадають, або не перетинаються, то *E* — відношення еквівалентності.

На рис. 15 наведена діаграма відношення еквівалентності

$$E = \{(a,a), (a,c), (b,b), (c,a), (c,c), (d,d)\},$$

визначеного на множині $A = \{a, b, c, d\}$.

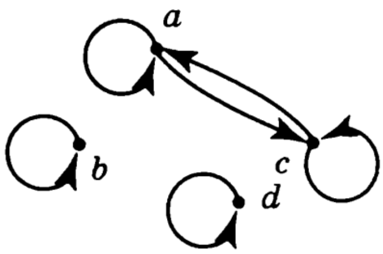


Рис. 15. Діаграма відношення еквівалентності

З діаграми добре видно, що класами еквівалентності є множини $\{a,c\},\{b\}$ та $\{d\}$, які породжують розбиття множини A.

Приклад. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;

в) відношення R: "знаходитися один від одного на відстані не більшій за 100" на площині;

г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв’язок.

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним.

Симетричність також виконується по тій самій причині.

Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина усіх людей, зріст яких рівний k см.

в) Відношення R не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 150 (див рис. 16).

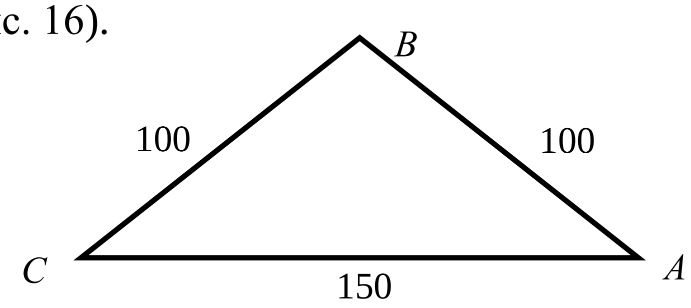


Рис. 16. Рівнобедрений трикутник

Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє. Тобто, $(A,B)\in R$, $(B,C)\in R$, але $(A,C)\notin R$.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи A та B є родичами і нехай B та C також є родичами, причому A предок B по батьківській лінії, а C — предок B по материнській лінії. Тоді жоден із людей A та C не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u),(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u),$ $(w,y),(w,z),(x,x),(v,v),(t,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину *A*/*R*.

Розв’язок.

Перший спосіб. Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення *R* є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення: $R^{-1}=\{(x,u),(u,u),(z,y),(w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w),(z,w),$ $(x,x),(v,v),(t,t)$ Легко переконатися, що $R^{-1}=R$, а отже, відношення *R* є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення *R*: $R^2=\{(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u),(v,v),$ $(w,y),(w,z),(w,w)\}$. Легко перевірити, що $R^2=R$. Тому відношення *R* є транзитивним.

Отже, відношення *R* є відношенням еквівалентності.

Другий спосіб. Скористаємося наслідком до теореми 2. Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи множини *A* за відношенням відношення *R*.

$R[x]=\{x,u\}$, $R[y]=\{y,z,w\}$, $R[z]=\{y,z,w\}$, $R[t]=\{t\}$, $R[u]=\{x,u\}$, $R[v]=\{v\}$, $R[w]=\{y,z,w\}$.

Оскільки, для довільного $a\in A$ виконується умова $a\in R[a]$, то *R* — рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення *R* є відношенням еквівалентності.

Тоді $A/R=\{\{x,u\},\{y,z,w\},\{t\},\{v\}\}$ — фактор-множина множини A за відношенням R.

2.6. Відношення порядку

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком) на множині A*, якщо воно є антисиметричним та транзитивним.

Пара (A, R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A, R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент a *передує* елементу b.

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел.

Іррефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин).

Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Якщо R — відношення строгого порядку на множині A, то відношення $R' = R \cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R.

Наприклад, відношення "$\leq$" є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку "$<$".

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням *лінійного* порядку. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення "$>$" на числовій множині.

Нехай a та b — різні елементи впорядкованої множини (A, R). Елемент a називається *безпосереднім попередником* елемента b, якщо елемент a передує елементу b і не існує жодного елемента c такого, що a передує c і c передує b.

Аналогічно дається означення *безпосереднього наступника*.

Приклад 1. Розглянемо відношення включення, визначене на множині підмножин множини $\{1,2,3,4\}$. Тоді множини $\{1\}$ та $\{2\}$ є безпосередніми попередниками множини $\{1,2\}$, а множина $\{3\}$ не є безпосереднім попередником множини $\{1,2,3\}$, оскільки $\{3\} \subseteq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Приклад 2. Елемент 1 є безпосереднім наступником елемента 0 множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, впорядкованої відношенням "$\le$". Якщо розглядати це саме відношення на множині $\mathbb{Q}$, то у елемента 0 немає безпосереднього наступника, оскільки для довільного додатного $a \in \mathbb{Q}$ виконується умова $0 < \frac{a}{2} < a$.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою *діаграм Хассе*. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них.

На рис. 17 зображено діаграму Хассе для відношення подільності:

$x R y$ тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y,

визначеного на множині $\{2,4,5,10,12,20,25\}$.

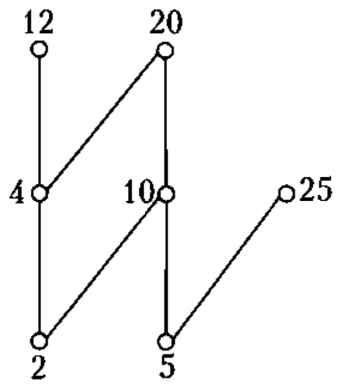


Рис. 17. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}

Елемент a називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо йому не передує жодний інший елемент множини (A,R).

Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 17 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо для довільного іншого елемента $b \in A$ $(a,b) \in R$. Тобто, найменший елемент впорядкованої множини передує усім іншим елементам.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають *екстремальними елементами* впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 18, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи A, C та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).

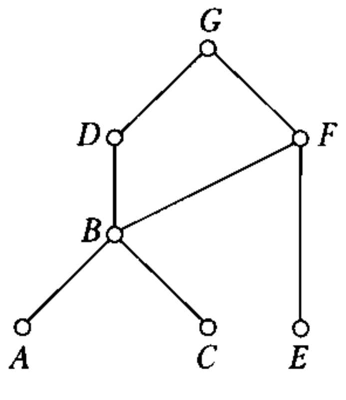


Рис. 18. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент a впорядкованої множини (A, R) називається *нижньою гранню множини* $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова aRb.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Так, наприклад для відношення, діаграма якого наведена на рис. 18, $\sup\{D, E\} = G$, $\inf\{D, F\} = B$, а $\inf\{B, E\}$ не існує.

Теорема 1. Якщо впорядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то він є єдиним її максимальним (мінімальним) елементом.

Теорема 2. Кожна непорожня скінченна впорядкована множина містить хоча би один мінімальний та максимальний елементи.

Теорема 3. Якщо у скінченній впорядкованій множині є єдиний максимальний (мінімальний) елемент, то він є її найбільшим (найменшим) елементом.

Частково впорядкована множина (A, R) називається *ґраткою*, якщо для довільних $a \in A$, $b \in A$ існують $\inf\{a, b\}$ та $\sup\{a, b\}$.

Наприклад, множина усіх підмножин деякої універсальної множини разом із заданим на ній відношенням включення множин є ґраткою. Для довільних двох множин A та B $\inf\{A, B\} = A \cap B$, $\sup\{A, B\} = A \cup B$.

Приклад. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = \{(b,d),(a,e),(a,b),(a,d),\ (c,d),(b,e),(a,c)\} \cup I_A$$

відношенням часткового порядку на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A,R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A,R) ґраткою. Крім того, знайти $\inf\{b,c\}$ та $\sup\{b,c\}$.

Розв'язок. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене до нього відношення:

$$R^{-1}=\{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(e,b),(c,a)\}\cup I_A.$$

Тоді $R^{-1}\cap R=I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\}=R.$$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Зобразимо діаграму Хассе частково впорядкованої множини (A,R). Відповідна діаграма наведена на рис. 19.

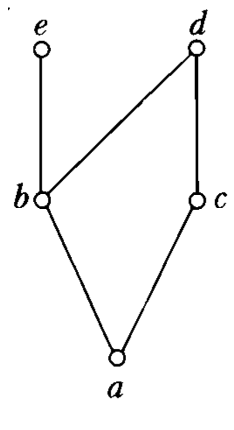


Рис. 19. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A,R), а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A,R), а найбільший елемент не існує.

Оскільки $\sup\{e,d\}$ не існує, то впорядкована множина (A,R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b,c\}=a$, $\sup\{b,c\}=d$.

2.7. Функціональні відношення

2.7.1. Основні означення

Бінарне відношення *f*, визначене на множинах *A* та *B*, називається *функціональним*, якщо для довільного $x \in A$ існує не більше ніж один $y \in B$, такий що $(x, y) \in f$.

З означення функціонального відношення випливає, що для довільного $x \in A$ $\left| f[x] \right| \le 1$. Якщо базисні множини функціонального відношення скінченні, то кожний рядок матриці $M(f)$ містить не більше однієї одиниці та з кожної вершини на діаграмі відношення виходить не більше однієї дуги.

Приклад. Відношення, діаграми яких зображені на рис. 20 а)-в), — функціональні, а відношення з діаграмою на рис. 20 г) — не є функціональним.

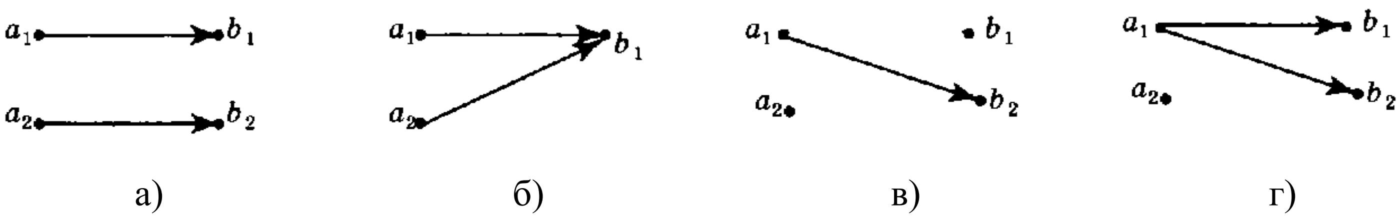


Рис. 20. Приклади функціональних та нефункціональних відношень

Функціональне відношення *f*, визначене на множинах *A* та *B*, називається *функцією* (відображенням) із *A* у *B* і позначається у вигляді

$$f : A \to B \text{ або } A \xrightarrow{f} B.$$

Якщо $f : A \to B$, то той факт, що $(x, y) \in f$ записують у вигляді $y = f(x)$.

Нехай *f* — функціональне відношення на множинах *A* та *B*. Тоді множина $\mathrm{Dom}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_1 f$ називається *областю визначення* відношення *f* (часто також використовується позначення D_f), а множина $\operatorname{Im} f \overset{\text{def}}{=} \operatorname{pr}_2 f$ — областю значень відношення *f* (також позначається як E_f).

Так, наприклад, для функції з рис. 20 б) $\operatorname{Dom} f = \{a_1, a_2\}$, $\operatorname{Im} f = \{b_1\}$, а для функції рис. 20 в) $\operatorname{Dom} f = \{a_1\}$, $\operatorname{Im} f = \{b_2\}$.

Теорема 1. *Нехай* $f: A \to B$, $g: B \to C$. *Тоді* $g \circ f$ *— функція із A у C, причому* $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

2.7.2. Види функцій

Функція $f: A \to B$ називається *цілком визначеною (тотальною)*, якщо $\operatorname{Dom} f = A$. У протилежному випадку функція називається *частковою*.

Функція $f: A \to B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\operatorname{Im} f = B$.

Приклад діаграми часткового сюр'єктивного відображення між елементами множин $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та $B = \{y_1, y_2\}$ наведено на рис. 21

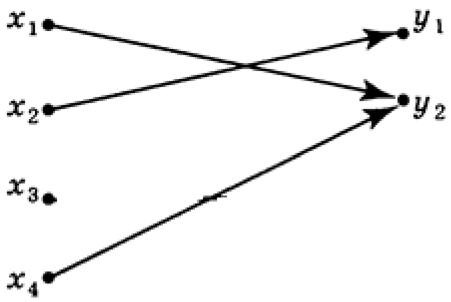


Рис. 21. Приклад сюр'єктивного відображення

На діаграмі сюр'єктивної функції у кожну вершину, яка відповідає елементам множини *B*, заходить принаймні одна дуга.

Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, якщо з того що $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

На діаграмі, яка відповідає ін'єктивній функції, у кожну вершину заходить не більше однієї дуги (див. рис. 22).

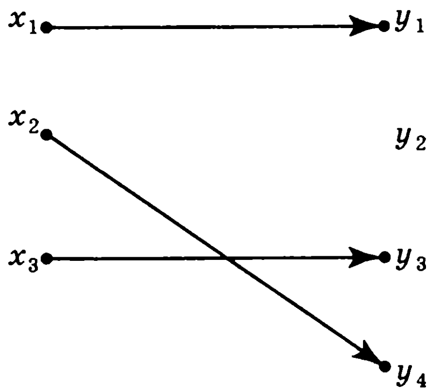


Рис. 22. Приклад ін'єктивної функції

Функція називається *бієктивною (взаємно однозначною або бієкцією)*, якщо вона є сюр'єктивною та ін'єктивною.

Приклад бієктивного відображення наведено на рис. 23.

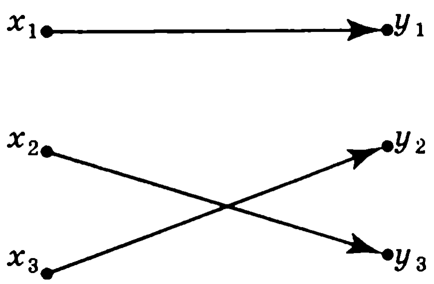


Рис. 23. Приклад бієктивної функції

Теорема 2. *Функція* $f: A \to B$ *є бієкцією тоді і тільки тоді, коли відношення* f^{-1} *є цілком визначеною функцією. Якщо f — бієкція, то* f^{-1} *— також бієкція, причому для довільних* $x \in A,\ y \in B$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Приклад. Перевірити властивості та вказати обернені функції до функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за умови, що

а) $f(x) = 3x + 6$;

б) $f(x) = x^2 - 4$.

в) $f(x) = x^3 - 1$.

Задача 1. Чи вірно, що для довільної функції $f: A \to B$ та довільних множин $A_1 \subset A,\ A_2 \subset A$ справджуються рівності:

а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

б) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$?

Задача 2. Довести, що якщо функції $f: A \to B$ та $g: B \to C$ є бієкціями, то $g \circ f$ — також бієкція.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.7. Основні поняття логіки висловлювань

Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи основну увагу на їх форму і відволікаючись від змісту. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або *логікою висловлювань.*

Під *висловлюванням* розуміють розповідне речення, у якому щось стверджується, і про яке у даних умовах місця та часу можна сказати, *істинне* вони чи *хибне*.

Значення "істина" чи "хибність", яких набуває висловлювання, називають його *значенням істинності*. Значення "істина" часто позначають 1, "хибність" — 0.

Приклад 1. Розглянемо речення:

1) Сніг зелений.
2) Київ — столиця України.
3) Якщо семестровий рейтинг студента з дисципліни "Дискретна математика" не менший за 60, то він отримає залік автоматом.
4) $x + 1 = 3$.
5) Котра година?
6) Читай уважно!

Три перші речення — висловлювання, решта три — ні, бо четверте речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, п'яте та шосте речення — не розповідні. Перше висловлювання є хибним, друге та третє — істинними.

Для позначення *змінних висловлювань* використовують великі латинські літери.

Висловлювання поділяються на *прості* (*елементарні*) та *складні*.

Атомами (елементарними висловлюваннями) називаються висловлювання, які відповідають простим розповідним реченням, які не мають складових частин.

Складні висловлювання утворюють із простих висловлювань за допомогою *логічних операцій* (*логічних зв'язок*).

Перші два висловлювання прикладу 1 є простими, третє — складне.

3.1.1. Логічні операції

Запереченням висловлювання A називається висловлювання $\neg A$ (читається "не A"), істинне тоді і тільки тоді, коли висловлювання A є хибним.

Кон'юнкцією висловлювань A та B називається нове висловлювання, яке позначається $A \wedge B$ (читається "A і B") і є істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A та B істинні.

Диз'юнкцією висловлювань A та B називається нове висловлювання, яке позначається $A \vee B$ (читається "A або B") і є хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A та B хибні.

Імплікацією називається висловлювання $A \Rightarrow B$, яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлювання A істинне, а B — хибне. Висловлювання A — *припущення* (*засновок, антецедент*) імплікації, B — *висновок* (*консеквент*) імплікації.

Причинно-наслідковий зв'язок між A і B, що виражається імплікацією, на природній мові описується такими зворотами: "якщо A, то B", "з A випливає B", "A лише тоді, коли B", "A є достатнім для B", "B є необхідним для A".

Еквівалентністю висловлювань A та B називається висловлювання $A \Leftrightarrow B$, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли висловлювання A та B мають однакові значення істинності.

У природній мові цій операції відповідають звороти: "*A* тоді і тільки тоді, коли *B*", "*A* є необхідним і достатнім для *B*", "*A* та *B* є еквівалентними".

Значення операцій логіки висловлювань наведені у таблиці 1.

Таблиця 1. Таблиця значень операцій логіки висловлювань

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

3.1.2. Формули логіки висловлювань

Означення формули логіки висловлювань:

1) кожний атом — це формула;
2) якщо φ та ψ — формули, то

$$(\neg\varphi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \Rightarrow \psi),\ (\varphi \Leftrightarrow \psi) \text{ — формули;}$$

3) формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань вказаних правил.

Для зменшення кількості дужок вважають, що логічні операції мають наступний пріоритет (від найвищого до найнижчого): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і замість $(\neg\varphi)$ пишуть $\overline{\varphi}$.

Приклад 2. Записати формулу, яка відповідає висловлюванням

1) "Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модуль".

2) "Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару"

Розв’язок.

1) Виділимо елементарні висловлювання, які входять до складу нашого першого складного висловлювання:

A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики",

B — "Іван повторить матеріал самостійно",

C — "Іван напише модуль погано".

Тоді структуру складного висловлювання описує формула

$A \vee \bar{B} \Rightarrow C$.

2) Елементарні висловлювання:

A — "Петро пізно ліг спати";

B — "Петро проспав";

C — "Петро встиг на автобус";

D — "Петро спізнився на пару"

Тоді структуру другого складного висловлювання описує формула $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \bar{C} \wedge D$

Під формальною *інтерпретацією* формули логіки висловлювань розуміють присвоєння змінним висловлюванням, з яких побудована формула, деяких значень істинності 0 або 1.

Приклад 3. Вказати значення формули $\varphi = \overline{A \wedge \bar{B}} \Leftrightarrow \bar{C} \Rightarrow B \vee A$ на інтерпретації $(1,0,1)$.

Розв’язок. $\varphi(1,0,1) = \overline{1 \wedge \bar{0}} \Leftrightarrow \bar{1} \Rightarrow 0 \vee 1 = \overline{1 \wedge 1} \Leftrightarrow 0 \Rightarrow 1 = \bar{1} \Leftrightarrow 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$.

Таблиця, які містить значення формули логіки висловлювань на всіх її інтерпретаціях змінних, називається *таблицею істинності формули*.

Приклад 4. Побудувати таблицю істинності формули

$$\varphi = \overline{\overline{A} \vee B} \Rightarrow \left(C \Leftrightarrow B \wedge \overline{A}\right).$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність кожній підформулі формули φ окремий стовпчик таблиці.

Таблиця 2. Таблиця істинності формули $\varphi = \overline{\overline{A} \vee B} \Rightarrow \left(C \Leftrightarrow B \wedge \overline{A}\right)$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{\overline{A} \vee B}$	$B \wedge \overline{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \overline{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

Логічним рівнянням називається рівняння вигляду $\varphi = \psi$, де φ, ψ — формули логіки висловлювань або логічні константи 0 чи 1.

Розв'язати логічне рівняння означає вказати усі набори значень атомів, які перетворюють його на правильну рівність.

Приклад 5. Розв'язати логічне рівняння $P \wedge \overline{Q} \Rightarrow \overline{R} \vee Q = 0$.

Розв'язок. Оскільки імплікація набуває значення 0 лише для одного набору значень аргументів, то рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} P \wedge \overline{Q} = 1, \\ \overline{R} \vee Q = 0. \end{cases}$$

Розв’язуючи останню систему, отримаємо

$$\begin{cases} P = 1, \\ \overline{Q} = 1, \\ \overline{R} = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 1, \\ Q = 0, \\ R = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(1,0,1)\}$**.**

Приклад 6. Розв’язати логічне рівняння $P \wedge \overline{Q} \vee R = \overline{R} \Leftrightarrow P$.

Розв’язок. Оскільки логіка висловлювань двозначна, то можливими є два випадки:

1-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \overline{Q} \vee R = 0, \\ \overline{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases}$$

2-й випадок:

$$\begin{cases} P \wedge \overline{Q} \vee R = 1, \\ \overline{R} \Leftrightarrow P = 1. \end{cases}$$

Розв’яжемо спочатку першу систему:

$$\begin{cases} P \wedge \overline{Q} \vee R = 0, \\ \overline{R} \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P \wedge \overline{Q} = 0, \\ R = 0, \\ 1 \Leftrightarrow P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \wedge \overline{Q} = 0, \\ R = 0, \\ P = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0, \\ R = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що перше рівняння передостанньої системи перетворюється у правильну рівність при всіх значеннях невідомої Q. Отже, у першому випадку ми отримали два розв’язки $(0,0,0)$ та $(0,1,0)$.

Розв’яжемо другу систему. Для цього спочатку проаналізуємо її друге рівняння. Еквівалентність приймає значення 0 у двох випадках. Тому

$$\begin{cases} P\wedge\bar{Q}\vee R=1, \\ \bar{R}\Leftrightarrow P=1. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \bar{R}=0, \\ P=0, \\ 0\wedge\bar{Q}\vee 1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \bar{R}=1, \\ P=1, \\ 1\wedge\bar{Q}\vee 0=1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} R=1, \\ P=0. \end{cases} \\ \begin{cases} R=0, \\ P=1, \\ \bar{Q}=1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} P=0, \\ R=1. \end{cases} \\ \begin{cases} P=1, \\ Q=0, \\ R=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, ми отримали ще три розв’язки $(0,0,1),(0,1,1)$ та $(1,0,0)$.

Відповідь: $\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$.

Формула логіки висловлювань називається *загальнозначущою* (тотожно істинною або тавтологією), якщо вона є істинною на всіх своїх інтерпретаціях. Той факт, що формула φ є загальнозначущою позначається $\vDash\varphi$.

Формула логіки висловлювань називається *суперечливою* (тотожно фальшивою), якщо вона є хибною на всіх своїх інтерпретаціях.

Формула логіки висловлювань називається *виконуваною*, якщо вона є істинною принаймні на одній своїй інтерпретації.

Приклад 7. Перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi=\overline{(\bar{A}\Leftrightarrow B)\vee(A\Rightarrow B)}$.

Розв’язок. Побудуємо таблицю істинності формули φ.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}\Leftrightarrow B$	$A\Rightarrow B$	$(\bar{A}\Leftrightarrow B)\vee(A\Rightarrow B)$	φ
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Оскільки формула φ хибна на усіх інтерпретаціях, то формула φ суперечлива.

Приклад 8. Довести, що формула $\varphi = \overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ є загальнозначущою.

Розв'язок. Використаємо метод від супротивного. Припустимо, що формула φ не є загальнозначущою. Тоді рівняння $\varphi = 0$ повинно мати хоча б один розв'язок. Перевіримо це.

$$\overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} = 1, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{B} \Rightarrow \overline{C} = 0, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{B} = 1, \\ \overline{C} = 0, \\ (C \Leftrightarrow A \vee C) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ (1 \Leftrightarrow A \vee 1) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ C = 1, \\ 1 \Leftrightarrow 1 = 0. \end{cases}$$

У результаті ми отримали систему, останнє рівняння якої є неправильною рівністю, оскільки $1 \Leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$. Отже рівняння $\varphi = 0$ не має розв'язків. Тому формула φ є загальнозначущою $(\vDash \varphi)$.

3.8. Рівносильні перетворення формул

Формули φ та ψ називаються *рівносильним (еквівалентними) формулами* логіки висловлювань, якщо вони приймають однакові значення істинності на всіх інтерпретаціях змінних, кожна з яких входить принаймні у одну з формул φ або ψ. Той факт, що формули φ та ψ *рівносильні*, позначається як $\varphi \equiv \psi$.

Відношення рівносильності формул, побудованих із деякої фіксованої множини атомів, задовольняє умови рефлексивності $(\varphi \equiv \varphi)$, симетричності $(\varphi \equiv \psi \Rightarrow \psi \equiv \varphi)$ та транзитивності $(\varphi \equiv \psi, \psi \equiv \omega \Rightarrow \varphi \equiv \omega)$, а отже є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх формул розбивається на класи, у кожному з яких містяться рівносильні між собою формули.

Приклад 1. Перевірити, чи рівносильні формули $\varphi = \bar{C} \Rightarrow A$ та $\psi = \overline{A \vee C} \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}\right) \wedge C$.

Розв'язок. Побудуємо таблицю істинності формул φ та ψ.

A	B	C	$\bar{C}$	φ	$A \vee C$	$\overline{A \vee C}$	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}$	$\left(A \vee \bar{B} \Rightarrow \bar{C}\right) \wedge C$	ψ
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Оскільки значення формул на усіх інтерпретаціях співпадають, то формули φ та ψ рівносильні.

Рівносильні перетворення формул ґрунтуються на *законах логіки висловлювань*, основні з яких наведені у таблиці 3.

Таблиця 3. Основні закони логіки висловлювань

№	**Назва**	**Формулювання закону**
1.	Закон комутативності кон'юнкції	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
2.	Закон комутативності диз'юнкції	$A \vee B \equiv B \vee A$
3.	Закон асоціативності кон'юнкції	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
4.	Закон асоціативності диз'юнкції	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
5.	Перший закон дистрибутивності	$A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$
6.	Другий закон дистрибутивності	$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
7.	Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{A}} \equiv A$
8.	Закон суперечності	$A \wedge \overline{A} \equiv 0$
9.	Закон виключення третього	$A \vee \overline{A} \equiv 1$
10.	Перший закон де Моргана	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
11.	Другий закон де Моргана	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$
12.	Закон ідемпотентності кон'юнкції	$A \wedge A \equiv A$
13.	Закон ідемпотентності диз'юнкції	$A \vee A \equiv A$
14.	Властивості нуля	$A \wedge 0 \equiv 0, \ \ A \vee 0 \equiv A$
15.	Властивості одиниці	$A \wedge 1 \equiv A, \ \ A \vee 1 \equiv 1$
16.	Перший закон поглинання	$A \vee A \wedge B \equiv A$
17.	Другий закон поглинання	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
18.	Модифікований закон поглинання	$A \vee \overline{A} \wedge B \equiv A \vee B$
19.	Закон усунення імплікації	$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$
20.	Перший закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
21.	Другий закон усунення еквівалентності	$A \Leftrightarrow B \equiv \overline{A} \wedge \overline{B} \vee A \wedge B$

Теорема 1. Формули φ та ψ рівносильні тоді і тільки тоді, коли $\vDash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ (формула $\varphi \Leftrightarrow \psi$ є загальнозначущою).

Теорема 2. Якщо φ_1 — підформула формули ψ_1, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ і формула ψ_2 отримується з формули ψ_1 замінною підформули φ_1 на φ_2, то формули ψ_1 та ψ_2 рівносильні.

Теорема 2 та закони 1-21 використовується для побудови ланцюжків рівносильних формул.

Наприклад, формули $\overline{A \wedge B} \wedge \bar{A} \Rightarrow C$ та $\left(\bar{A} \vee \bar{B}\right) \wedge \bar{A} \Rightarrow C$ рівносильні, оскільки за першим законом де Моргана підформула $\varphi_1 = \overline{A \wedge B}$ першої формули рівносильна формулі $\varphi_2 = \bar{A} \vee \bar{B}$ другої формули.

Приклад 2. Для формули $\varphi = \bar{A} \wedge B \Rightarrow \left(C \Leftrightarrow \bar{A}\right)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій заперечення та диз’юнкції.

Розв’язок.

$$\bar{A} \wedge B \Rightarrow \left(C \Leftrightarrow \bar{A}\right) \overset{19}{\equiv} \overline{\bar{A} \wedge B} \vee \left(C \Leftrightarrow \bar{A}\right) \overset{4,10}{\equiv} \bar{\bar{A}} \vee \bar{B} \vee \left(C \Leftrightarrow \bar{A}\right) \overset{4,7,21}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge \bar{\bar{A}} \vee C \wedge \bar{A} \overset{7}{\equiv}$$

$$\equiv A \vee \bar{B} \vee \bar{C} \wedge A \vee C \wedge \bar{A} \overset{7}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \overline{\overline{\bar{C} \wedge A}} \vee \overline{\overline{C \wedge \bar{A}}} \overset{7,10}{\equiv} A \vee \bar{B} \vee \overline{C \vee \bar{A}} \vee \overline{\bar{C} \vee A}$$

Приклад 3. Перевірити, чи є рівносильними формули

$\varphi_1 = \left(Q \Rightarrow P\right) \vee \left(\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R\right)$ та $\varphi_2 = \left(\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R\right) \vee \left(Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}\right)$.

Розв’язок. Спростимо формули та спробуємо їх звести до одного і того самого вигляду.

$$\varphi_1 = \left(Q \Rightarrow P\right) \vee \left(\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R\right) \overset{4,7,19,21}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee P \wedge \overline{Q \wedge R} \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \overset{16}{\equiv}$$

$$\overset{16}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee \bar{P} \wedge Q \wedge R \overset{18}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee Q \wedge R \overset{18}{\equiv} \bar{Q} \vee P \vee R \overset{2}{\equiv} P \vee \bar{Q} \vee R.$$

$$\varphi_2 = \left(\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R\right) \vee \left(Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}\right) \overset{4,7,19}{\equiv} P \vee Q \wedge R \vee \bar{Q} \vee P \wedge \bar{Q} \overset{16}{\equiv}$$

$$\overset{16}{\equiv} P \vee Q \wedge R \vee \bar{Q} \overset{18}{\equiv} P \vee \bar{Q} \vee R \equiv \varphi_1.$$

Отже, формули φ_1 та φ_2 є рівносильними.

Приклад 4. З використанням рівносильних перетворень довести, що формула $\varphi = \overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ є загальнозначущою.

Розв'язок. Покажемо, що формула $\varphi = \overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C)$ рівносильна 1.

$$\overline{\overline{B} \Rightarrow \overline{C}} \Rightarrow (C \Leftrightarrow A \vee C) \overset{19,21}{\equiv} (\overline{B} \Rightarrow \overline{C}) \vee \overline{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \wedge (A \vee C) \overset{7,17}{\equiv}$$

$$\equiv B \vee \overline{C} \vee \overline{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \overset{2,4}{\equiv} \overline{C} \vee C \vee B \vee \overline{C} \wedge \overline{A \vee C} \overset{9}{\equiv} 1 \vee B \vee \overline{C} \wedge \overline{A \vee C} \overset{15}{\equiv} 1.$$

Отже, формула φ загальнозначуща.

3.9. Логічне слідування. Аналіз міркувань

Формула φ називається *логічним наслідком* формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ (позначається $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \vDash \varphi$), якщо на усіх спільних інтерпретаціях змінних, на яких кожна з формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ є істинною, формула φ також є істинною.

Приклад 1. Перевірити, чи є формули

а) $\varphi = R \Rightarrow \bar{Q}$;

б) $\psi = Q \Leftrightarrow R$

логічним наслідком формул $\varphi_1 = P \Rightarrow \bar{Q}, \varphi_2 = R \Leftrightarrow P$.

Розв'язок. Побудуємо таблиці істинності формул φ_1, φ_2, φ та ψ.

P	Q	R	$\bar{Q}$	$\varphi_1 = P \Rightarrow \bar{Q}$	$\varphi_2 = R \Leftrightarrow P$	$\varphi = R \Rightarrow \bar{Q}$	$\psi = Q \Leftrightarrow R$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1

На трьох виділених у таблиці інтерпретаціях змінних $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ та $(1,0,1)$ обидві формули φ_1 та φ_2 є істинними. Формула φ також є істинною на цих інтерпретаціях. Тому формула φ є логічним наслідком формул φ_1 та φ_2.

Оскільки $\varphi_1(0,1,0)=1$, $\varphi_2(0,1,0)=1$, а $\psi(0,1,0)=0$, то формула ψ не є логічним наслідком формул φ_1 та φ_2.

Теорема 1. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\Rightarrow\varphi$ є загальнозначущою.

Доведення. Необхідність. Нехай формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\dots,\varphi_m$. Покажемо, що тоді $\psi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\Rightarrow\varphi$ є загальнозначущою.

Будемо вважати, що формули $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ та φ побудовані із атомів $A_1,\dots,A_n$ і нехай $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — довільна інтерпретація формули ψ. Можливими є два випадки:

а) $\varphi_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$ для всіх індексів *i*, які задовольняють умову $(1\le i\le n)$;

б) $\varphi_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ для деякого індексу *i*.

У випадку а) з того, що формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ випливає, що $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$. Тоді

$$\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1\wedge\ldots\wedge1\Rightarrow1=1\Rightarrow1=1.$$

У випадку б) з того, що $\varphi_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ випливає, що

$$\varphi_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge\ldots\wedge\varphi_{i-1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge0\wedge\varphi_{i+1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\wedge\ldots\wedge\varphi_m(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0.$$

Тому

$$\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0\Rightarrow\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\overline{0}\vee\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1\vee\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1.$$

Отже, у обох випадках формула ψ є істинною. Оскільки $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — довільна інтерпретація формули ψ, то ψ — загальнозначуща. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай формула ψ є загальнозначущою. Покажемо, що тоді формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$.

Нехай $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — довільна інтерпретація змінних, на якій кожна із формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ є істинною. Доведемо, що формула φ також є істинною на цій інтерпретації. Із загальнозначущості формули ψ випливає, що

$$1=\psi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\varphi_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\wedge\ldots\wedge\varphi_m(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\Rightarrow\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=$$

$$=1\wedge\ldots\wedge 1\Rightarrow\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1\Rightarrow\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0\vee\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=\varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Отже, формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$. Теорему доведено.

Теорема 2. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi=\overline{\varphi_1}\vee\ldots\vee\overline{\varphi_m}\vee\varphi$ є загальнозначущою.

Теорема 3. Формула φ є логічним наслідком формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ тоді і тільки тоді, коли формула $\psi=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\wedge\overline{\varphi}$ є суперечливою.

Приклад 2. Перевірити, чи є формула $\varphi=P\vee Q\wedge R$ логічним наслідком формул $\varphi_1=P\Leftrightarrow\overline{P}\wedge R$ та $\varphi_2=\overline{R}\Rightarrow Q$.

Розв’язок. Використовуючи теорему 3, перевіримо, чи є суперечливою формула $\psi=(P\Leftrightarrow\overline{P}\wedge R)\wedge(\overline{R}\Rightarrow Q)\wedge\overline{P\vee Q\wedge R}$.

$$(P\Leftrightarrow\overline{P}\wedge R)\wedge(\overline{R}\Rightarrow Q)\wedge\overline{P\vee Q\wedge R}\equiv\left(\overline{P}\wedge\overline{\overline{P}\wedge R}\vee P\wedge\overline{P}\wedge R\right)\wedge(R\vee Q)\wedge\overline{P}\wedge$$

$$\wedge\overline{Q\wedge R}\equiv\left(\overline{P}\wedge(P\vee\overline{R})\vee 0\wedge R\right)\wedge(R\vee Q)\wedge\overline{P}\wedge(\overline{Q}\vee\overline{R})\equiv(\overline{P}\wedge P\vee\overline{P}\wedge\overline{R})\wedge$$

$$\wedge(R\vee Q)\wedge\overline{P}\wedge(\overline{Q}\vee\overline{R})\equiv(0\vee\overline{P}\wedge\overline{R})\wedge\overline{P}\wedge(R\vee Q)\wedge(\overline{Q}\vee\overline{R})\equiv\overline{P}\wedge\overline{R}\wedge$$

$\wedge\left(R\wedge\bar{Q}\vee Q\wedge\bar{R}\right)\equiv\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge R\wedge\bar{Q}\vee\bar{P}\wedge\bar{R}\wedge Q\wedge\bar{R}\equiv 0\vee\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}\equiv\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}$.

Формула $\bar{P}\wedge Q\wedge\bar{R}$ не є суперечливою, оскільки вона є істинною на наборі $(0,1,0)$. Тому формула φ не є логічним наслідком формул φ_1, φ_2.

Аналіз міркувань засобами логіки висловлювань полягає у перевірці того, чи є висновок міркування *логічним наслідком* його *засновків (гіпотез)*.

Приклад 3. Проаналізувати міркування

1) сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора;

2) ми підемо сьогодні купатися тоді і тільки тоді, якщо сьогодні сонячний день;

3) якщо ми не підемо сьогодні купатись, то будемо кататися на човні;

4) якщо ми будемо кататися на човні, то повернемося пізно ввечері.

Отже, ми повернемося пізно ввечері.

Розв'язок. Введемо атоми:

A — сьогодні сонячний день;

B — сьогодні холодніше, ніж учора;

C — ми підемо сьогодні купатися;

D — ми будемо кататися на човні;

E — ми повернемося пізно ввечері.

Тоді міркування можна записати у вигляді

1) $\bar{A}\wedge B$;

2) $A\Leftrightarrow C$;

3) $\bar{C}\Rightarrow D$;

4) $D\Rightarrow E$.

E.

Перевіримо, чи є висновок міркування логічним наслідком засновків, тобто чи

$$\bar{A} \wedge B,\ A \Leftrightarrow C,\ \bar{C} \Rightarrow D,\ D \Rightarrow E \vDash E.$$

Для цього розглянемо формулу $\psi = \bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E}$ і перевіримо її суперечливість.

$$\bar{A} \wedge B \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (\bar{C} \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow E) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge (\bar{A} \wedge \bar{C} \vee A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge$$
$$\wedge (\bar{D} \vee E) \wedge \bar{E} \equiv (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{A} \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \wedge B \wedge A \wedge C) \wedge (C \vee D) \wedge (\bar{D} \wedge \bar{E} \vee E \wedge \bar{E}) \equiv$$

$$\equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \vee D) \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge (C \wedge \bar{D} \vee D \wedge \bar{D}) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge$$

$$\wedge (C \wedge \bar{D} \vee 0) \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge C \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv \bar{A} \wedge B \wedge 0 \wedge \bar{D} \wedge \bar{E} \equiv 0.$$

Отже, формула ψ є суперечливою. Тому міркування є вірним.

4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

4.7. Недостатність засобів логіки висловлювань

У природній мові, з потреб формалізації якої виникла математична логіка, часто зустрічаються умовиводи, для опису яких засоби логіки висловлювань є недостатніми. Розглянемо класичну задачу, яка полягає у аналізі наступного міркування:

1) Усі люди смертні;

2) Сократ — людина;

Отже, Сократ смертний.

Уведемо атоми A — "усі люди смертні", B — "Сократ — людина", C — "Сократ — смертний". Тоді для перевірки правильності міркування треба переконатися, що має місце логічне слідування $A, B \models C$. Формула C є логічним наслідком засновків A та B тоді і тільки тоді, коли формула $A \wedge B \wedge \overline{C}$ є суперечливою. Однак, остання формула не є суперечливою, оскільки вона приймає значення істинності "істина" на інтерпретації (1, 1, 0). Отже, використовуючи засоби логіки висловлювань, одержуємо, що міркування не є вірним. Отриманий результат суперечить "інтуїтивній" правильності міркування. Отримане протиріччя випливає з того, що при використанні логіки висловлювань жодним чином не враховано наявність у атомі A узагальнення "усі", а також відсутній зв’язок між першою гіпотезою та висновком міркування.

У зв’язку з подібними проблемами виникла необхідність удосконалити логіку висловлювань. Розширенням логіки висловлювань є логіка предикатів, у якій введено додаткові поняття "предикат" та "квантор".

4.8. Поняття предиката. Основні означення.

Нехай задано деякі множини $A_1,\ldots,A_n$.

Відображення $f: A_1\times\ldots\times A_n \to \{0, 1\}$ називається n-місним предикатом, *визначеним на множинах* $A_1,\ldots,A_n$.

Множини $A_1,\ldots,A_n$ називаються *базисними множинами* предиката f. Якщо $A_1=\ldots=A_n=A$, то предикат f називається *однорідним предикатом на множині* A.

Якщо у означенні покласти $n=0$, то отримуємо нуль-місний предикат, який є логічною константою (0 або 1).

Якщо базисні множини предиката скінченні, то предикат можна задати за допомогою *таблиці значень*.

Приклад 1. Нехай $f(x, y)$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A=\{1, 3\}$, для якого

$$f(1,1)=1,\ f(1,3)=0,\ f(3,1)=1,\ f(3,3)=1.$$

Тоді значення предиката f можна зобразити у вигляді наступної таблиці:

x	y	$f(x, y)$
1	1	1
1	3	0
3	1	1
3	3	1

Слід зазначити, що можна використовувати іншу структурну форму зображення даних для таблиці значень предиката f:

f:

$x \backslash y$	1	3
1	1	0
3	1	1

Більш універсальним є спосіб задання предикатів за допомогою *пропозиційних форм.*

Пропозиційною формою $F\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, визначеною на множинах $A_1,\ldots,A_n$, називається вираз, у який входять змінні $x_1,\ldots,x_n$, і який перетворюється у висловлювання при підстановці замість змінних x_i деяких елементів $a_i \in A_i$, $i=1,\ldots,n$.

Пропозиційна форма $F\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, визначена на множинах $A_1,\ldots,A_n$, однозначно задає предикат $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ наступним чином: для довільного $\left(a_1,\ldots,a_n\right) \in A_1 \times \ldots \times A_n$

$$\begin{cases} f\left(a_1,\ldots,a_n\right)=1, & \text{якщо висловлювання } F\left(a_1,\ldots,a_n\right) \text{ є істинним,} \\ f\left(a_1,\ldots,a_n\right)=0, & \text{якщо висловлювання } F\left(a_1,\ldots,a_n\right) \text{ є хибним.} \end{cases}$$

Так, предикат $f(x,y)$ із прикладу 1 можна задати за допомогою пропозиційної форми $F\left(x,y\right)$: "$x \geq y$".

Приклад 2. Розглянемо пропозиційну форму

$F\left(x,y,z\right)$: "У місті *x* проживає від *y* до *z* тисяч мешканців",

визначену на множинах A_1 — множина міст світу, A_2 — множина невід’ємних чисел, $A_3 = A_2$. Ця форма задає тримісний предикат $f\left(x,y,z\right)$, значення якого можна обчислити використовуючи цю пропозиційну форму. Так, наприклад,

f(Ужгород, 100, 200) = 1, *f*(Київ, 500, 1000) = 0.

Впорядкований набір значень аргументів $\left(a_1,\ldots,a_n\right) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ *задовольняє* предикат $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, якщо $f\left(a_1,\ldots,a_n\right)=1$.

Множиною істинності предиката $f(x_1,\ldots,x_n)$, визначеного на множинах $A_1,\ldots,A_n$, називається множина усіх наборів значень аргументів, які його задовольняють. Множина істинності позначається наступним чином:

$$T(f)\overset{\text{def}}{=}\{(a_1,\ldots,a_n)|\, f(a_1,\ldots,a_n)=1\}.$$

Так, предикат $f(x,y)$ із прикладу 1 має наступну множину істинності:

$$\{(a_1,a_2)|\, f(a_1,a_2)=1\}=\{(1,1),(3,1),(3,3)\}.$$

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *тотожно істинним* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його задовольняють усі можливі набори значень аргументів $(a_1,\ldots,a_n)\in A_1\times\ldots\times A_n$.

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *виконуваним* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його задовольняє хоча б один набір значень аргументів.

Предикат $f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *тотожно фальшивим* на множинах $A_1,\ldots,A_n$, якщо його множина істинності порожня.

Властивості предиката (наприклад, тотожна істинність, виконуваність чи тотожна фальшивість) залежать від області визначення.

Приклад 3. Нехай задано предикат $f(x)$: $x^2\ge x$. Цей предикат є тотожно істинним на множині цілих чисел, виконуваним на множині дійсних чисел та тотожно фальшивим на інтервалі (0; 1).

Оскільки предикати приймають значень із множини $\{0,1\}$, то над предикатами можна *виконувати логічні операції*.

Приклад 4. Побудувати таблицю значень предиката

$h(x,y)=\overline{f(x,y)}\Leftrightarrow g(x,y)$, якщо предикати

$f(x,y):\ x+2y$ — просте число,

$g(x,y): x^2 < 3y$

визначені на множинах $A_1 = \{1,3,4,6,9\}$ та $A_2 = \{2,5,8,9\}$. Вказати множину істинності предиката $h(x,y)$.

Розв'язок. Будуємо таблиці значень предикатів f та g:

f:

x \ y	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	1	1	1	0
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

g:

x \ y	2	5	8	9
1	1	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	0	0	0	0

$f(1,2)=1$, оскільки 1 + 2·2 = 5 — просте число;

$f(1,5)=1$, оскільки 1 + 2·5 = 11 — просте число;

……………………………………………………………

$f(9,9)=0$, оскільки 9 + 2·9 = 27 не є простим числом;

$g(1,2)=1$, оскільки нерівність $1^2 < 3\cdot 2$ виконується;

$g(1,5)=1$, оскільки нерівність $1^2 < 3\cdot 5$ виконується;

……………………………………………………………

$g(9,9)=0$, оскільки нерівність $9^2 < 3\cdot 9$ не виконується.

Будуємо таблиці значень предикатів $\overline{f(x,y)}$ та $h(x,y)$:

$\overline{f}$

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	0	0	0	1
4	1	1	1	1
6	1	1	1	1
9	0	0	1	1

h:

$x \backslash y$	2	5	8	9
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	1
6	0	0	0	0
9	1	1	0	0

....

$h(3,2)=\overline{f(3,2)} \Leftrightarrow g(3,2)=0 \Leftrightarrow 0=1.$

....

$h(6,5)=\overline{f(6,5)} \Leftrightarrow g(6,5)=1 \Leftrightarrow 0=0.$

Знаходимо множину істинності:

$$T(h)=\{(x,y)\,|\,h(x,y)=1\}=\{(3,2),(3,9),(4,8),(4,9),(9,2),(9,5)\}.$$

Нехай предикати $f(x_1,\ldots,x_n)$ та $g(x_1,\ldots,x_n)$ визначені на множинах $A_1,\ldots,A_n$. Предикат $g(x_1,\ldots,x_n)$ називається *логічним наслідком* предиката $f(x_1,\ldots,x_n)$, якщо множина істинності предиката $f(x_1,\ldots,x_n)$ є підмножиною множини істинності предиката $g(x_1,\ldots,x_n)$: $T(f)\subseteq T(g)$.

Приклад 5. Нехай $n=2,\ A_1=A_2=\mathbb{Z}$. Предикат $f_2(x,y): x^2>y$ є логічним наслідком предиката $f_1(x,y): x>y$. Якщо ж $A_1=A_2=[0,1]$, то предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2.

Приклад 6. Предикати $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)$ мають наступні таблиці значень:

f_1:

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	1	0	0

f_2:

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	1	0	0	0

Перевірити, чи є один з предикатів наслідком іншого.

Розв'язок. З таблиць значень видно, що

$$T(f_2) = \{(x, y) \mid f_2(x, y) = 1\} \subset \{(x, y) \mid f_1(x, y) = 1\} = T(f_1).$$

Отже, предикат f_1 є логічним наслідком предиката f_2.

Задача. Довести, що для довільного однорідного двомісного предиката $f(x, y)$ та довільного одномісного предиката $g(x)$, визначених на множині $A = \{a, b\}$, предикат $h(x, y, z) = f(x, y) \wedge \overline{f(x, z)} \wedge g(x) \wedge \overline{g(y)} \wedge \overline{g(z)}$ є тотожно фальшивим.

4.9. Квантори

Нехай $f(x)$ — одномісний предикат, визначений на множині A.

Універсальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "усі елементи множини A задовольняють предикат $f(x)$", яке є істинним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно істинним. Універсальне висловлювання позначається $\forall x\, f\left(x\right)$ і читається для всіх $a \in A$ $f(a)$ є істинним. Знак "$\forall$" називається *квантором загальності*.

Екзистенціальним висловлюванням, яке відповідає предикату $f(x)$, називається висловлювання "хоча б один елемент множини A задовольняє предикат $f(x)$" яке є хибним тоді і тільки тоді, коли предикат $f(x)$ є тотожно фальшивим. Екзистенціальне висловлювання позначається $\exists x\, f\left(x\right)$ і читається "існує таке $a \in A$, що $f(a)$ є істинним". Знак "$\exists$" називається *квантором існування*.

Квантори *впливають* на предикати, які розташовані безпосередньо за *операцією квантифікації*.

Приклад 1. Значення предикатів f_1, f_2, f_3 вказані у наступній таблиці:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
a	1	1	0
b	1	0	0
c	1	1	0

Тоді

$\forall x\, f_1\left(x\right) = 1,\ \exists x\, f_1\left(x\right) = 1$,

$\forall x\, f_2\left(x\right) = 0,\ \exists x\, f_2\left(x\right) = 1$,

$\forall x\, f_3\left(x\right) = 0,\ \exists x\, f_3\left(x\right) = 0$.

Якщо предикат $f(x)$ визначений на скінченій множині $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_m\right\}$, то *операції квантифікації* (навішування кванторів) можна записати наступним чином:

$$\forall x\ f(x) = f(a_1) \wedge f(a_2) \wedge \ldots \wedge f(a_m),$$

$$\exists x\ f(x) = f(a_1) \vee f(a_2) \vee \ldots \vee f(a_m).$$

Після виконання операції квантифікації по змінній ця змінна стає *пов'язаною*. В результаті навішування квантора на одномісний предикат отримується нуль-місний предикат (константа 0 або 1). Якщо змінна не пов'язана ніяким квантором, то вона називається *вільною*. Вільна змінна може приймати усі значення із відповідної базисної множини.

Квантори можна також застосовувати (можливо неодноразово) і до багатомісних предикатів. Кожне застосування операції квантифікації по одному аргументу зменшує кількість вільних змінних (і відповідно місність предиката) на 1.

Приклад 2. Двомісний предикат $f(x, y)$ має наступну таблицю значень:

$x \backslash y$	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	1	1	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	0	0
5	1	1	0	0

Вказати таблиці значень предикатів

а) $\forall x\, f(x,y),\ \exists x\, f(x,y), \forall y\, f(x,y),\ \exists y\, f(x,y)$,

б) $\forall x \forall y\, f(x,y),\ \forall x \exists y\, f(x,y),\ \exists x \forall y\, f(x,y),\ \exists x \exists y\, f(x,y),$

в) $\forall y \forall x\, f(x,y),\ \forall y \exists x\, f(x,y),\ \exists y \forall x\, f(x,y),\ \exists y \exists x\, f(x,y).$

Розв'язок.

а) Позначимо

$$g_1(y) = \forall x\, f(x,y),\ g_2(y) = \exists x\, f(x,y), \quad h_1(x) = \forall y\, f(x,y), h_2(x) = \exists y\, f(x,y).$$

Тоді

$$g_1(a) = \forall x\, f(x,a) = 0,\ g_1(b) = \forall x\, f(x,b) = 1,\ g_1(c) = \forall x\, f(x,c) = 0,$$

$$g_1(d) = \forall x\, f(x,d) = 0.$$

$g_2(a) = \exists x\, f(x,a) = 1,\;\; g_2(b) = \exists x\, f(x,b) = 1,\;\; g_2(c) = \exists x\, f(x,c) = 1,$

$g_2(d) = \exists x\, f(x,d) = 1.$

Предикати $g_1(y)$ та $g_2(y)$ мають наступні таблиці значень:

y	$g_1(y)$	$g_2(y)$
a	0	1
b	1	1
c	0	1
d	0	1

Для предиката $h_1(x)$ маємо:

$h_1(1) = \forall y\, f(1,y) = 1,\; h_1(2) = \forall y\, f(2,y) = 0,$

$h_1(3) = \forall y\, f(3,y) = 0,\; h_1(4) = \forall y\, f(4,y) = 0,$

$h_1(5) = \forall y\, h_1(5,y) = 0.$

Так само обчислюється предикат $h_2(x)$. Значення предикатів $h_1(x)$ та $h_2(x)$ наведені у наступній таблиці:

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$
1	1	1
2	0	1
3	0	1
4	0	1
5	0	1

б)-в) Наведемо лише деякі значення

$$\forall x \forall y\, f(x,y) = \forall x\, h_1(x) = 0,\;\; \forall x \exists y\, f(x,y) = \forall x\, h_2(x) = 1.$$

$$\exists x \forall y\, f(x,y) = \exists x\, h_1(x) = 1,\;\; \forall y \exists x\, f(x,y) = \forall y\, g_2(y) = 1.$$

4.10. Властивості операцій квантифікації:

1. Якщо предикат f не залежить від змінної y, то

   $\delta x\, f(x) = \delta y\, f(y),\ \delta \in \{\forall, \exists\}$ — правила *перейменування пов'язаних змінних*.

2. $\delta x \delta y\, f(x,y) = \delta y \delta x\, f(x,y),\ \delta \in \{\forall, \exists\}$ — правила *перестановки однойменних кванторів*.

3. $\left.\begin{array}{l} \delta x\, f(x) \vee g = \delta x\big(f(x) \vee g\big) \\ \delta x\, f(x) \wedge g = \delta x\big(f(x) \wedge g\big) \end{array}\right\}$ — правила *внесення під знак квантора* (g не залежить від x).

4. $\forall x\, f(x) \wedge \forall x\, g(x) = \forall x\big(f(x) \wedge g(x)\big)$ — *пронесення* квантора загальності через кон'юнкцію.

5. $\exists x\, f(x) \vee \exists x\, g(x) = \exists x\big(f(x) \vee g(x)\big)$ — *пронесення* квантора існування через диз'юнкцію.

6. $\left.\begin{array}{l} \overline{\forall x\, f(x)} = \exists x\, \overline{f(x)} \\ \overline{\exists x\, f(x)} = \forall x\, \overline{f(x)} \end{array}\right\}$ — закони де Моргана для кванторів.

Приклад 1. Побудувати таблицю значень предиката

$$\overline{\exists x\, \overline{f(x,y)}} \Rightarrow \exists z\, g(x,z),$$

за умови, що таблиці значень предикатів f та g мають вигляд:

f:

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	0
e	1	1	1	0

g:

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	0
e	0	0	0	0

Розв’язок. Застосуємо першу та шосту властивості операцій квантифікації. Результатом виконання операцій над предикатами є двомісний предикат

$$h(x,y)=\overline{\exists x\,\overline{f(x,y)}}\Rightarrow \exists z\,g(x,z)=\forall x\,f(x,y)\Rightarrow \exists y\,g(x,y)=f_1(y)\Rightarrow g_1(x),$$

де $f_1(y)=\forall x\,f(x,y)$, $g_1(x)=\exists y\,g(x,y)$ (ми застосували правило перейменування для змінних z та y). Таблиці значень предикатів f_1 та g_1:

y	2	5	8	9
$f_1(y)$	0	0	1	0

x	a	b	c	d	e
$g_1(x)$	1	1	1	0	0

$h(a,2)=f_1(2)\Rightarrow g_1(a)=0\Rightarrow 1=1,\quad h(a,5)=f_1(5)\Rightarrow g_1(a)=0\Rightarrow 1=1,$

$h(d,8)=f_1(8)\Rightarrow g_1(d)=1\Rightarrow 0=0,\quad h(e,9)=f_1(9)\Rightarrow g_1(e)=0\Rightarrow 0=1.$

Тоді отримуємо наступну таблицю для $h(x,y)$:

$x \backslash y$	2	5	8	9
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	0	1
e	1	1	0	1

4.11. Використання логіки предикатів

Засоби логіки предикатів використовуються для формулювання думок та запису тверджень.

Приклад 1. Записати речення

а) кожний другокурсник успішно склав іспит з історії або програмування;

б) сума двох додатних чисел — додатне число;

в) кожне дійсне число крім нуля має обернене число, яке визначається однозначно.

за допомогою предикатів та кванторів.

Розв'язок.

а) Нехай A — множина усіх другокурсників. Розглянемо наступні предикати на множині A:

$f(x)$: x склав іспит з історії;

$g(x)$: x склав іспит з програмування.

Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\left(f(x) \vee g(x)\right)$.

Якщо ж нас цікавлять інші особи крім другокурсників, то потрібно додатково розглянути предикат $h(x)$: x — другокурсник. Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\left(h(x) \Rightarrow f(x) \vee g(x)\right)$.

Цей приклад можна розв'язати, замінивши одномісні предикати $f(x)$ та $g(x)$ більш загальним двомісним предикатом $l(x,y)$: x склав іспит з дисципліни y, визначеним, на приклад, на множинах людей та навчальних дисциплін. Тоді отримаємо запис

$$\forall x\left(h(x) \Rightarrow l(x,\text{історія}) \vee l(x,\text{програмування})\right)$$

б) Уведемо змінні *x* та *y* та перепишемо це речення так: "Два довільні додатні числа *x* та *y* дають у сумі додатне число". Тоді отримаємо шуканий запис

$$\forall x \forall y\big((x>0)\wedge(y>0)\Rightarrow(x+y>0)\big).$$

Базисною множиною є множина дійсних чисел.

в) Для запису першої частини речення можна спочатку переписати його у вигляді "Для кожного дійсного числа *x*, відмінного від нуля, існує таке дійсне число *y*, що $xy=1$". Для опису однозначності можемо скористатися тим, що для довільного *z*, яке є оберненим до *x* має виконуватися умова $z=y$. Остаточно отримуємо:

$$\forall x\Big((x\neq 0)\Rightarrow \exists y\Big((xy=1)\wedge \forall z\big((xz=1)\Rightarrow z=y\big)\Big)\Big).$$

Приклад 2. Проаналізувати міркування

1) Усі люди смертні;

2) Сократ — людина;

Отже, Сократ смертний.

Розв’язок.

Нехай *A* — множина усіх живих істот. Уведемо у розгляд наступні предикати на множині *A*:

f(*x*): *x* — людина,

g(*x*): *x* — смертний,

і нехай *a* = Сократ. Тоді міркування запишеться у такому вигляді:

1) $\forall x\big(f(x)\Rightarrow g(x)\big)$ (усі люди смертні).

2) *f*(*a*) (Сократ — людина).

Висновок $g(a)$ (Сократ — смертний).

Для перевірки правильності міркування потрібно перевірити, чи випливає висновок міркування із засновків 1) та 2). Для цього потрібно дослідити, чи є тотожно фальшивим предикат

$$\forall x\big(f(x) \Rightarrow g(x)\big) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}.$$

Внесемо $f(a) \wedge \overline{g(a)}$ у область дії квантора. Отримаємо

$$\forall x\big(f(x) \Rightarrow g(x)\big) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = \forall x\Big(\big(\overline{f(x)} \vee g(x)\big) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}\Big) = \forall x h(x),$$

де $h(x) = \big(\overline{f(x)} \vee g(x)\big) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)}$.

Оскільки

$$h(a) = \big(\overline{f(a)} \vee g(a)\big) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = \overline{f(a)} \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} \vee g(a) \wedge f(a) \wedge \overline{g(a)} = 0 \vee$$

,

то предикат $h(x)$ не є тотожно істинним.

Тому $\forall x h(x) = 0$, а отже міркування є вірним.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 580 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Центр навчальної літератури, 2004. — 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група BHV, 2007. — 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. — К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. — 83 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.
9. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.

11. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. — СПб.: Вильямс, 2003. — 958 с.
12. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 269 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
14. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. — Ужгород: УжДУ, 1971. — 224 с.
15. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. — К: Техніка, 1973. — 76 с.
16. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.