Математика
Прикладна математика

Ю.А. Василенко, Г.Е. Копча

(Закарпатський державний університет)

АЛГЕБРАЇЧНИЙ ОПИС ДЕЯКИХ *К*-МНОГОВИДІВ

Існує аналогія між класами алгебр і алгоритмічними схемами (стосовно операцій), з якої випливає такий висновок: будь-яка сукупність алгоритмічних схем повинна визначати певний клас алгебр. Тому досить цікавою проблемою є проблема вивчення класів алгебр, в основі яких лежать типові алгоритмічні схеми.

Розглянемо деякі алгебри та класи алгебр. K-многовид – це клас алгебр, який визначається певною сукупністю схем. Матимемо на увазі клас всіх алгебр виду $[M,K]$, де K – деяка множина схем, відносно якої система M замкнута, множина K фіксована, і будемо називати його K-многовидом.

В статті [1] одержано алгебраїчне описання K-многовидів виду $[M,K_1]$ і $[M,K_2]$, де $M\subset Z'(G)$ ($Z'(G)=\Phi'(G)\cup R'(G)$, $\Phi'(G)$ – множина всіх всюди визначених операцій на деякій множині G, $R'(G)$ – множина всіх всюди визначених предикатів на цій множині, K – деяка множина схем, $f_i\in\Phi'(G)$, $p_j\in R'(G)$), $K_1=\{p(f_1,f_2)\}$ і $K_2=\{f_1f_2, p(f_1,f_2)\}$.

Алгебри із многовидів $[M,K_1]$ і $[M,K_2]$, відповідно, називатимемо алгебрами і предикатними напівгрупами.

При вивченні предикатних алгебр будемо розглядати замість відображень f_i: $G\to G$ більш загальні відображення f_i: $G\to B$, де G і B – довільні множини.

Нехай $\overline{H_0}$ – множина всіх відображень множини G в B. Будь-який одномісний предикат $p(x)$ над G задає деякий двохмісний оператор на множині $\overline{H_0}$, який визначається таким чином:

$$p(h_1,h_2)=\begin{cases} h_1(x), & \text{якщо } p(x)=0 \ (\text{хибність}) \\ h_2(x), & \text{якщо } p(x)=1 \ (\text{істина}) \end{cases} \qquad (1)$$

Тут $h_1,h_2 \in \overline{H_0},\ x \in G$. Очевидно, що $p(h_1,h_2) \in \overline{H_0}$. Оператор (1) називається предикатним оператором. Будемо вважати, що при записуванні предикатного оператора у виді $p(h_1,h_2)$ символ p означає відповідний предикат.

Система відображень $\overline{H} \subset \overline{H_0}$ замкнута відносно предиката *p*, якщо з $h_1,h_2 \in \overline{H}$ випливає $p(h_1,h_2) \in \overline{H}$. Система H замкнута відносно системи предикатів із $\overline{L}$, якщо *H* замкнута відносно всіх предикатів із $\overline{L}$. Сукупність предикатів $\overline{L}$ і замкнутої відносно $\overline{L}$ системи H утворює деяку алгебру. Цю алгебру назвемо предикатною алгеброю. Опишемо предикатну алгебру.

Розглянемо абстрактну алгебру, яка представляє собою сукупність множин H і заданої на H системи L бінарних операцій $p(h_1,h_2)$ (h_1,h_2, $p(h_1,h_2) \in H$). Операції із *L* задовольняють наступним тотожностям:

а) $p(h_1,h_2)$=*h*,

б) $p(p(h_1,h_2), p(h_3,h_4)) = p(h_1,h_4)$, (2)

в) $p_1(p_2(h_1,h_2), p_2(h_3,h_4)) = p_2(p_1(h_1,h_3), p_1(h_2,h_4))$,

де $h_1,h_2,h_3,h_4 \in H$, $p, p_1, p_2 \in L$.

Таким чином визначену алгебру назвемо *N*-алгеброю. Очевидно, що всяка предикатна алгебра являється *N*-алгеброю.

В [1] доведена така важлива теорема.

<u>Теорема 1</u>. Кожна вільна *N*-алгебра ізоморфна деякій предикатній алгебрі.

Розглянемо вільну *N*-алгебру *A*, породжену деякою системою твірних *H* і системою операцій *L*. Вирази вільної *N*-алгебри *A*, елементи із *H* і *L*, відповідно, будемо називати формулами, *H*-символами і *L*-символами. Формули f_1 і f_2, які зображають один і той же об'єкт вільної *N*-алгебри *A*, називаються еквівалентними. Еквівалентність і нееквівалентність позначаються, відповідно, через $f_1 \approx f_2$ і $f_1 \overline{\approx} f_2$. Формула f належить системі формул *M* ($f \in M$), якщо f еквівалентна одній із формул *M*. Через $f_1 = f_2$ позначимо співпадання формул f_1

і f_2. У вільній *N*-алгебрі *A* для кожного цілого числа $n \geq 0$ визначимо формули такого виду

$F(p_1, p_2, ..., p_n; h_1, h_2, ..., h_{2^n})$, де $h_1, h_2, ..., h_{2^n} \in H$, $p_1, p_2, ..., p_n \in L$, причому $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$.

Формули $F(p_1, p_2, ..., p_n; h_1, h_2, ..., h_{2^n})$ визначаються індукцією по *n*. Для *n*=0 покладаємо $F(0; h_1) = h_1$ (0 – символ пустого кортежу $p_1, p_2, ..., p_n$). Якщо для *n* формули *F* визначені, то для *n*+1 покладаємо

$$F(p_1, p_2, ..., p_{n+1}; h_1, h_2, ..., h_{2^{n+1}}) = p_1(F(p_2, p_3, ..., p_{n+1}; h_1, h_2, ..., h_{2^n}),$$
$$F(p_2, p_3, ..., p_{n+1}; h_{2^n+1}, h_{2^n+2}, ..., h_{2^{n+1}})).$$

Таким чином, маємо

$F(p_1; h_1, h_2) = p_1(h_1, h_2)$, $F(p_1, p_2; h_1, h_2, h_3, h_4) = p_1(p_2(h_1, h_2), p_2(h_3, h_4))$ і т. д.

<u>Наслідок з теореми 1</u>. Сукупність рівностей (2) представляє собою алгебраїчний опис класу всіх предикатних алгебр.

1. *И.В.Витенько*. Схемы, алгоритмы и многообразия. – Ужгород, 1970.
2. *І.В.Вітенько.* Конструктивні операції. – Ужгород. Уж. ун-т, 1970.
3. *Ю.А.Василенко, Ф.Г.Ващук.* Об алгоритмическом понятии вычислительной схемы. – Ужгород: Науковий вісник УжДІЕП, №1, 1997.
4. *Ю.А. Василенко, Г.Е.Копча.* Алгоритмічна схема як алгебраїчний об’єкт // Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції „Динаміка наукових досліджень ‘ 2005”. Том 50. Сучасні інформаційні технології. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. – С. 3-5.
5. *Ю.А. Василенко, Г.Е.Копча.* Деякі види схем з точки зору алгебри // Матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції „Наука та освіта-′2006”. Том 13. Фізика, математика. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2006. – С. 57-59.