УДК 681.14

Коцовський В. М.
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

РЕАЛІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ НА ДВОПОРОГОВИХ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ З ЦІЛОЧИСЛОВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нейромережі, побудовані з нейронних елементів (НЕ), успішно використовуються для розв'язування широкого кола практичних задач [1]. При цьому в залежності від специфіки задачі вибирається та чи інша активаційна функція НЕ. З огляду на ефективну апаратну чи програмну реалізацію найбільший інтерес становить вивчення НЕ з цілочисловими ваговими коефіцієнтами. В зв'язку з цим виникає питання про обмеження на величину цілочислових вагових коефіцієнтів. Для випадку НЕ з пороговою функцією активації Мурога [2] встановив, що для випадку реалізації *n*-місних порогових булевих функцій (ПБФ) у базисі $\mathrm{Z}_2 = \{0,1\}$ досить обмежитися НЕ, цілочислові вагові коефіцієнти яких задовольняють умову $|w_i| \le (n+1)^{(n+1)/2}$. Пізніше для базису $E_2 = \{-1,1\}$ цю оцінку було покращено до

$$|w_i| \le 2^{-n}(n+1)^{(n+1)/2}. \tag{1}$$

У 1994 році Хастад [3] навів приклад *n*-місних ПБФ, усі цілочислові вагові коефіцієнти якої задовольняють нерівність

$$|w_i| \ge \frac{1}{2n} e^{-4n^{\beta}} 2^{(n\log_2 n)/2-n}, \tag{2}$$

де $\beta = \log_2 \frac{3}{2}$, а n — степінь двійки ($n \ge 8$). Також у роботі [4] було показано, що середнє (по усім ПБФ) значення найбільшого за модулем вагового коефіцієнта оптимального цілочислового НЕ обмежене знизу величиною $2^{n/2}$.

У даній роботі розглядається питання реалізації БФ на двопорогових нейронних елементах (ДНЕ) і показано, що для вагових коефіцієнтів двопорогових нейронних елементів (ДНЕ) мають місце оцінки, аналогічні до (1)-(2). Також буде показано, що для довільного $\alpha \in (0,1)$, починаючи з деякого n середнє значення цілочислових коефіцієнтів оптимального НЕ або ДНЕ не менше ніж $2^{\alpha n}$, що є покращенням результату роботи [4].

Двопороговим дійсним нейронним елементом з ваговим вектором $\mathbf{w} \in \mathrm{R}^n$ і порогами $t_1, t_2 \in \mathrm{R}$ $(t_1 < t_2)$ будемо називати логічний елемент з n дійсними входами $x_1, x_2, ..., x_n$ та одним виходом $y \in \{a,b\}, (a < b)$, поведінка якого описується співвідношеннями:

$$y = \begin{cases} a, & \text{якщо } t_1 < (\mathbf{w},\mathbf{x}) < t_2, \\ b, & \text{якщо } (\mathbf{w},\mathbf{x}) \le t_1 \text{ або } (\mathbf{w},\mathbf{x}) \ge t_2. \end{cases}$$

Надалі ми будемо обмежуватися випадками $\{a,b\} = \mathrm{Z}_2$ або $\{a,b\} = E_2$. Якщо вважати, що $t_1 = -\infty$, то ми отримуємо звичайний НЕ.

Нехай A — довільна скінченна множина у просторі R^n. Тоді кожному ДНЕ із вектором структури $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$ можна поставити у відповідність розбиття (A^+, A^-) множини A наступним чином: $A^- = \{\mathbf{x} \in A \mid t_1 < (\mathbf{w},\mathbf{x}) < t_2\}$, $A^+ = A \setminus A^-$. Розбиття такого вигляду ми будемо називати д-розбиттями. Для практичних застосувань важливим є випадок $A = \mathrm{Z}_2^n$ або $A = E_2^n$. Будемо казати, що булева функція $f(x_1, ..., x_n)$ є двопороговою (ДПБФ), якщо знайдеться такий ДНЕ із структурою $(\mathbf{w}, t_1, t_2)$, що $f(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow t_1 < (\mathbf{w},\mathbf{x}) < t_2$.

Теорема 1. *Довільне д-розбиття* $\left(A^{+}, A^{-}\right)$ *скінченної множини* $A \subset \mathrm{Z}^{n}$ *можна здійснити за допомогою ДНЕ з таким цілочисловим вектором структури* $\left(\mathbf{w}, t_1, t_2\right) \in \mathrm{Z}^{n+2}$, *що*

$$\left\|\left(\mathbf{w}, t_1, t_2\right)\right\|_{\infty} = \max\left\{\left|w_1\right|, \ldots, \left|w_n\right|, \left|t_1\right|, \left|t_2\right|\right\} \leq \left(\max_{\mathbf{x} \in A}\|x\|^{2} + 2\right)^{(n+1)/2},$$

де $\|\mathbf{x}\|$ *— звичайна евклідова норма вектора* **x**.

Для довільної n-місної ДПБФ в алфавіті Z_2

$$\max\left\{\left|w_1\right|, \ldots, \left|w_n\right|\right\} \leq \sqrt{(n+1) n^{n+1}}, \max\left\{\left|t_1\right|, \left|t_2\right|\right\} \leq \sqrt{(n+2)(n+1)^{(n+1)}}.$$

Для довільної n-місної ДПБФ в алфавіті E_2

$$\max\left\{\left|w_1\right|, \ldots, \left|w_n\right|, \left|t_1\right|, \left|t_2\right|\right\} \leq 2^{-n}(n+2)^{(n+2)/2}.$$

Теорема 2. *Якщо* $n = 2^{k}, k \geq 3$ *то для довільного ДНЕ із цілочисловим вектором структури* $\left(\mathbf{w}, t_1, t_2\right)$, *який реалізує ПБФ Хастада [3], виконується нерівність*

$$\|\mathbf{w}\|_{\infty} \geq \frac{1}{2n} e^{-4n^{\beta}} 2^{\left(n \log_2 n\right)/2-n},$$

де $\beta = \log_2 \frac{3}{2}$.

Виникає питання про середній об’єм пам’яті, необхідний для збереження цілочислових вагових коефіцієнта НЕ і ДНЕ. Зараз ми покажемо, що в середньому для цього необхідно щонайменше $\Omega\left(n^{2}\right)$ біт. Для цього розглянемо сумарне та середнє значення коефіцієнтів цілочислового вектора структури НЕ:

$$S(\mathbf{w}, t) = \sum_{i=1}^{n}\left|w_i\right| + |t|, \quad E(\mathbf{w}, t) = \frac{S(\mathbf{w}, t)}{n+1}$$

і нехай $E\left(LT_n\right) = \frac{1}{\operatorname{Card} LT_n} \sum_{f \in LT_n} E\left(\mathbf{w}_f, t_f\right)$, де LT_n — множина усіх *n*-місних ПБФ, $\left(\mathbf{w}_f, t_f\right)$ — «мінімальний цілочисловий вектор структури» *n*-місної ПБФ f (тобто такий вектор структури, для якого $S(\mathbf{w}, t)$ приймає найменше значення). Величина $E\left(LT_n\right)$ — математичне сподівання середнього арифметичного коефіцієнтів мінімальних цілочислових векторів структури *n*-місних ПБФ. Має місце наступна теорема

Теорема 3. *Для довільного* $\alpha \in (0,1)$ *знайдеться таке натуральне* $n_0(\alpha)$, *що для всіх* $n \geq n_0(\alpha)$ *справджується нерівність* $E\left(LT_n\right) > 2^{\alpha n}$.

Список використаних джерел

1. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – 2-е изд. – М.: Вильямс-Телеком, 2006. – 1104 с.
2. Muroga, S. Threshold Logic and its Applications / S. Muroga. – New York: Wiley, 1971.
3. Hastad, J. On the size of weights for threshold gates / J. Hastad // SIAM Journal on Discrete Mathematics. – 1994, 7(3). – PP. 484-492.
4. Hampson, S. E. Linear Function Neurons: Structure and Training / S. E. Hampson & D. J. Volper // Biol. Cyber. – 1986 vol. 53. – PP. 203-217.