УДК 512.547.25

**Ф.Е. Гече, А.Є.Батюк, В.М. Коцовський**

# ВЛАСТИВОСТІ БУЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ, РЕАЛІЗОВНИХ НА ДВОПОРОГОВИХ НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ.

В роботі розглядаються бульові функції в алфавіті {-1, 1} і встановлюються умови їх реалізовності на двопорогових нейронних елементах. На основі вивчення властивостей спектральних параметрів отримано критерії реалізовності, аналогічні до відомих результатів для звичайних нейрофункцій.

Нехай $G = \{-1, 1\}$, $G_n$ – $n$-декартова степінь $G$. Функцію виду

$$f : G_n \to G \tag{1}$$

будемо називати бульовою функцією в алфавіті $G$. Надалі будемо розглядати лише відображення виду (1), називаючи їх скорочено бульовими функціями, і будемо для них використовувати позначення $f(x_1, ..., x_n)$ або $f(\boldsymbol{x})$.

Якщо $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in G_n$, $\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in R^n$ то величину

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$$

будемо називати зваженою сумою, що відповідає вектору $\boldsymbol{x}$.

Кажуть, що двопороговий нейронний елемент зі структурою $s = (\boldsymbol{w}; p_1; p_2)$ і міткою $a$ ($\boldsymbol{w} = (\omega_1, ..., \omega_n) \in R^n$ – ваговий вектор, $p_1, p_2 \in R$ – пороги, $a \in G$) реалізує бульову функцію $f(x_1, ..., x_n)$, якщо

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} -a, & p_1 < (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < p_2 \\ a, & \text{в противному випадку}. \end{cases} \tag{2}$$

Двопороговий нейронний елемент зі структурою $s$ і міткою $a$ будемо скорочено позначати ДНЕ$_{s,\,a}$. Визначимо функціонал $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ таким чином

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = ((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - p_1)\cdot((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) - p_2). \tag{3}$$

Структуру $s$ назвемо допустимою, якщо для всіх векторів $\boldsymbol{x}$ з множини $G_n$ виконується умова $\varphi(s, \boldsymbol{x}) \neq 0$. Аналогічно до [1] можна показати, що клас функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах з допустимими структурами, співпадає з класом бульових функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах з довільними структурами. Надалі будемо розглядати лише двопорогові нейронні елементи з допустимими структурами. В подальших дослідженнях будемо використовувати узагальнення методів, розроблених в [2].

**Лема 1**. *Бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} -a, & \varphi(s, x) < 0 \\ a, & \varphi(s, x) > 0. \end{cases} \tag{4}$$

***Доведення.*** Доведення леми безпосередньо випливає з (2) та (3) та очевидного співвідношення

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0 \Leftrightarrow p_1 < (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < p_2.$$

**Теорема 1.** *Бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх наборів $\boldsymbol{x}$ з множини $G_n$ виконується умова*

$$f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) = a|\varphi(s, \boldsymbol{x})| \tag{5}$$

***Доведення.*** Доведення випливає з еквівалентності формул (4) та (5), яка перевіряється безпосередньо для випадків $\varphi(s, \boldsymbol{x}) < 0$ та $\varphi(s, \boldsymbol{x}) > 0$.

Розглянемо відображення виду $h : G_n \to R$. Для зручності запису аналогічно до [2] будемо використовувати такі позначення

$$<h(\boldsymbol{x})> = \sum_{\boldsymbol{x}\in G_n} h(\boldsymbol{x}).$$

Тоді справедливою є

**Лема 2.** *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція,* $s$ *– допустима структура. Тоді має місце нерівність*

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>| \le <|\varphi(s, \boldsymbol{x})|> \tag{6}$$

*причому у випадку точної рівності в* (6) *бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,1}$ *або* ДНЕ$_{s,-1}$.

***Доведення.*** Справедливі співвідношення

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>| \le <|f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})|> = <|\varphi(s, \boldsymbol{x})|>.$$

Якщо бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на ДНЕ$_{s,\,a}$, то знайдеться вектор $\boldsymbol{x} \in G_n$, на якому порушується умова (5). Тоді в суму $<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>$ входять доданки різних знаків. Тому має місце строга нерівність

$$|<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>| < <|f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})|>.$$

Тоді в (6) рівність неможлива.

**Теорема 2.** *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})> = a <|\varphi(s, \boldsymbol{x})|> \tag{7}$$

***Доведення.*** Необхідність можна легко отримати, просумувавши обидві частини рівності (5) по всім $\boldsymbol{x} \in G_n$. Для доведення достатньої частини теореми досить помітити, що з рівності (7) випливає рівність у співвідношенні (6), що згідно леми 2 є достатньою умовою реалізовності бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ на ДНЕ$_{s,\,a}$.

**Наслідок.** *Якщо бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, $g(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, то*

$$|<g(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>| \le |<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>|,$$

*причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли*

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ або } g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}).$$

***Доведення.*** Доведення наслідку безпосередньо випливає з леми 2 з врахуванням теореми 2.

Задамо на множині $G_n$ довільний лінійний порядок і будемо вважати, що елементи множини $G_n$ занумеровані згідно цього порядку. Виходячи з довільної бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ визначимо бульові функції $f_i(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., 2^n$ таким чином

$$f_i(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}_j), \text{при } j \ne i \\ -f(\boldsymbol{x}_j), \text{при } j = i \end{cases} \tag{8}$$

**Теорема 3.** *Нехай* $f(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, бульові функції* $f_i(\boldsymbol{x})$ *визначені згідно* (8), $s$ *– допустима структура. Тоді якщо для всіх* $\boldsymbol{x} \in G_n$ *виконується одна з умов*

1) $f_i(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., 2^n$;
2) $f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}) \le f_i(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, ..., 2^n$;

*то бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,1}$ (ДНЕ$_{s,-1}$ *відповідно*).

***Доведення.*** Якщо бульова функція $f(\boldsymbol{x})$ не реалізується на ДНЕ$_{s,\,a}$, то знайдеться $i \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ таке, що $\boldsymbol{x}_i$ не задовольняє (5). Тоді

$$f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) > f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) \text{ або } f_i(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i) < f(\boldsymbol{x}_i)\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x}_i),$$

тобто для $f_i(\boldsymbol{x})$ не виконується умова 1(умова 2 відповідно).

Визначимо для бульової функції $f(\boldsymbol{x})$ набір спектральних параметрів

$$b_{ij} = <x_i(\boldsymbol{x})\cdot x_j(\boldsymbol{x})\, f(\boldsymbol{x})>, \quad b_i = <x_i(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{x})>, \quad b_0 = <f(\boldsymbol{x})> \tag{9}$$

і визначимо функцію $\Phi(s, f)$ так

$$\Phi(s, f) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\omega_i\omega_j - (p_1 + p_2)\sum_{i=1}^{n} b_i\omega_i + p_1 p_2 b_0 \tag{10}$$

**Теорема 4.** *Бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi(s, f) = a<|\,\varphi(s, \boldsymbol{x})|> \qquad (11)$$

***Доведення.*** Для доведення теореми покажемо, що

$$\Phi(s, f) = <f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>.$$

Для цього використаємо рівність

$$\varphi(s, \boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\omega_j x_i(\boldsymbol{x})x_j(\boldsymbol{x}) - (p_1+p_2)\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i(\boldsymbol{x}) + p_1p_2\,,$$

яка яляє собою розгорнутий запис (3), і змінимо в формулі для $<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})>$ порядок сумування

$$<f(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(s, \boldsymbol{x})> = <(\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\omega_j x_i(\boldsymbol{x})x_j(\boldsymbol{x}) - (p_1+p_2)\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i(\boldsymbol{x}) + p_1p_2)f(\boldsymbol{x})> =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n}<x_i(\boldsymbol{x})x_j(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})>\omega_i\omega_j - (p_1+p_2)\sum_{i=1}^{n}<x_i(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})>\omega_i + p_1p_2<f(\boldsymbol{x})>.$$

Враховуючи вигляд спектральних параметрів (9) отримаємо потрібну рівність. Тоді з еквівалентності умов (7) і (11) та з теореми 2 випливає справедливість твердження теореми 4.

**Наслідок.** *Якщо бульова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, $g(\boldsymbol{x})$ *– довільна бульова функція, то*

$$|\Phi(s, g)| \le |\Phi(s, f)|,$$

*причому рівність досягається тоді ітільки тоді, тільки тоді, коли*

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \text{ або } g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}).$$

***Доведення.*** Доведення безпосередньо випливає з наслідку до теореми 1 та попередньої теореми.

Для функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах можна навести теореми, аналогічні до відомих теорем Чоу, які наведені в [2] для однопорогових елементів.

**Теорема 5.** *Якщо в бульових функцій* $g(\boldsymbol{x})$ *і* $f(\boldsymbol{x})$ *співпадають параметри* (9), *то вони одночасно реалізуються або не реалізуються на* ДНЕ$_{s,\,a}$.

***Доведення.*** У випадку співпадання параметрів (9) для бульових функцій $g(\boldsymbol{x})$ і $f(\boldsymbol{x})$ відповідні функції $\Phi(s, f)$ та $\Phi(s, g)$ також співпадають. Звідси, фраховуючи (11), отримуємо твердження теореми.

**Теорема 6.** *Якщо виконуються умови попередньої теореми і принаймі одна з бульових функцій* $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\,a}$, *то* $g(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x})$(*бульова функція* $g(\boldsymbol{x})$ тотожньо рівна бульовій функції $f(\boldsymbol{x})$).

***Доведення.*** Для доведення теореми використаємо попередню теорему, згідно якої бульові функції $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ реалізується на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_{s,\,a}$. Але якщо функції реалізуються на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі ДНЕ$_{s,\,a}$, то вони очевидно співпадають.

***Приклад.*** Покажемо, що вже при $n = 3$, знайдеться така функція $f(x_1, x_2, x_3)$, яка не реалізується на жодному двопороговому нейронному елементі. Покладемо

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\cdot x_2\cdot x_3, \quad g(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_2, x_3).$$

Тоді безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що відповідні спектральні параметри (9) для функціїй $f(x_1, x_2, x_3)$ і $g(x_1, x_2, x_3)$ співпадають і рівні 0. Тоді згідно теореми 5 бульові функції $f(x_1, x_2, x_3)$ і $g(x_1, x_2, x_3)$ одночасно реалізуються або не реалізуються на одному і тому самому двопороговому нейронному елементі. Припустивши реалізовність бульової функції на деякому ДНЕ$_{s,\,a}$, за теремою 6 отримаємо, що

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$$

Але оскільки $f(x_1, x_2, x_3) \neq g(x_1, x_2, x_3)$, то бульова функція $f(x_1, x_2, x_3)$ не реалізується на жодному двопороговому нейронному елементі.

З формули (11) легко отримуються співвідношення, наведені в [3].

Нехай $\pi$ – елемент симетричної групи підстановок $S_n$, $\boldsymbol{g} = (g_1, ..., g_n) \in G_n$, $s = ((\omega_1, ..., \omega_n); p_1; p_2)$ – деяка допустима структура.

**Теорема 7.** *Бульова функція* $f(x_1, ..., x_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\, a}$ *тоді і тільки тоді, коли*

1) *Бульова функція* $f_\pi(x_1, ..., x_n) = f(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$ *реалізується на* ДНЕ$_{t,\, a}$, *де* $t = ((\omega_{\pi(1)}, ..., \omega_{\pi(n)}); p_1; p_2)$
2) *Бульова функція* $f_{\boldsymbol{g}}(x_1, ..., x_n) = f(g_1x_1, ..., g_nx_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{t,\, a}$, *де* $t = ((g_1\omega_1, ..., g_n\omega_n); p_1; p_2)$
3) *Бульова функція* $f_-(x_1, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_{s,\, -a}$.

***Доведення.*** Для доведеня досить використати теорему 4, властивості функції $\varphi(s, \boldsymbol{x})$ та формули для спектральних параметрів функцій $f_\pi(x_1, ..., x_n)$, $f_{\boldsymbol{g}}(x_1, ..., x_n)$ і $f_-(x_1, ..., x_n)$, наведені в [2].

**Зауваження 1.** Потрібно відмітити, що властивості звичайних нейрофункцій, наведені в [2], і властивості функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах, багато в чому є аналогічними. Ця аналогія зберігається і для функцій, реалізовних на більш складних структурах. Зокрема, всі отримані результати можна легко узагальнити, якщо ввести в розгляд поняття так званого $n$-порогового нейронного елемента або якщо розглядати замість бульових функцій дискретні функції більш загального вигляду.

**Зауваження 2.** Для перевірки реалізовності бульових функцій на двопорогових нейронних елементах можна аналогічно до [2] використовувати широке коло методів, які базуються на апроксимації функціоналу $<|\varphi(s, \boldsymbol{x})|>$.


1. *Яджима С., Ибараки Т.* Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969. – Вып.6. – С. 72–81.
2. *Дертоузос М.* Пороговая логика. – М.: Мир, 1967. – 342 с.
3. *Ф. Е. Гече*. Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. мат. Вип. 4. – 1999. – С. 17–24.