УДК 681.14

Ф.Е. Гече, В.М. Коцовський (Ужгородський національний університет)

ОЦІНКА ЧИСЛА БУЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ, РЕАЛІЗОВНИХ НА НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТАХ.

В роботі встановлюються верхні й нижні оцінки числа функцій, реалізовних на порогових та двопорогових нейронних елементах, та вивчається їх асимптотична поведінка.

In the current work we obtain upper and lower bounds of the number of the threshold and double-threshold functions. We also treat here asimptotical behavoir.

Двопороговий нейронний елемент з міткою α (ДНЕ$_\alpha$) [1] – функціональний елемент з n входами $x_1, \ldots x_n$, одним виходом y, поведінка якого описується співвідношеннями:

$$y = \alpha, \text{ якщо } (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \le p_1 \text{ або } (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \ge p_2,$$
$$y = \overline{\alpha}, \text{ якщо } p_1 < (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < p_2,$$

де змінні x_i і α приймають значення 0, 1, параметри w_i, p_1, p_2 – дійсні числа,

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i,$$

w_i називаються вагами, p_1, p_2 ($p_1 < p_2$) – порогами. Вектор $[\boldsymbol{w}, p_1, p_2]$ називається вектором структури (або просто структурою) двопорогового нейронного елемента. Будемо розглядати y як бульову функцію входів.

Нехай E_n – n-вимірний евклідів простір, M - його скінченна m-елементна підмножина, $\boldsymbol{w} \in E_n$, $p_1, p_2 \in R$, $p_1 < p_2$. Нехай

$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in M \mid (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) \le p_1\},$$
$$M_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{M} \mid p_1 < (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) < p_2\},$$
$$M_3 = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{M} \mid p_2 \le (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})\}.$$

Упорядковану трійку (M_1, M_2, M_3) назвемо 3-розбиттям множини M.

Лема 1. *Якщо* $m \ge 3n-2$, $n > 2$, *то число всіх* 3-*розбиттів множини* M *менше, ніж* m^{n+1}.

Доведення. З робіт [2, 3, 4] випливає, що число всіх 3-розбиттів не перевищує

$$2\sum_{i=0}^{n} C_{m-1}^{i}(m+1-i).$$

Тоді з

$$C_{m-1}^{k-1} = \frac{k}{m-k-1} C_{m-1}^{k} \le \frac{1}{2} C_{m-1}^{k},\ k \le n$$

отримаємо, що число 3-розбиттів менше за

$$2\left(1 + 2\frac{m(m-1)\ \ldots (m-n)}{n!}\right) < m^{n+1}.$$

Нехай $N(n, 2)$ – число n-місних бульових функцій, реалізовних на ДНЕ.

Теорема 1. *Для всякого натурального n*

$$N(n, 2) < 2^{n^2+n+1} \tag{1}$$

Доведення. Застосуємо лему 1, взявши в якості M n-вимірний одиничний гіперкуб. Отримаємо, що число функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах із міткою 1 менше за 2^{n^2+n}. Врахувавши, що класи бульових функцій, реалізовних на ДНЕ з мітками 0 і 1 рівнопотужні, отримаємо твердження теореми. Зараз ми побудуємо $(n+1)$-місні бульові функції з n-місних бульових функцій наступним чином:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_{n+1} \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\overline{x_{n+1}}.$$

Лема 2. *Функція* $h(\boldsymbol{x})$ *реалізується на* $ДНЕ_1$ *тоді і тільки тоді, коли функції* $f(\boldsymbol{x})$ *і* $g(\boldsymbol{x})$ *реалізуються на* $ДНЕ_1$, *що мають один і той самий ваговий вектор, причому різним парам* $(f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}))$ *відповідають різні функції* $h(\boldsymbol{x})$.

Доведення леми безпосередньо випливає з теореми 3 [1].

Нехай $N_1(n, 2)$ - число n-місних бульових функцій, реалізовних на $ДНЕ_1$. Число бульових функцій не більше ніж від n змінних реалізовних на $ДНЕ_1$, які мають однаковий ваговий вектор із функцією $f(\boldsymbol{x})$, будемо позначати $s_n(f, 2)$. З леми 2 випливає наступна рівність:

$$N_1(n+1, 2) = \sum_{i=1}^{N_1(n,2)} s_n(f, 2),$$

де f_i пробігає множину всіх n-місних бульових функцій, які можна реалізувати на $ДНЕ_1$.

Подальші наші міркування будуть присвячені пошуку нижніх оцінок для $s_n(f, 2)$.

Ми почнемо з майже очевидної леми, доведення якої легко отримати, модифікувавши доведення леми 1 [5] або леми 1 [6].

Лема 3. *Якщо булькова функція* $f(\boldsymbol{x})$ *реалізується на деякому* ДНЕ, *то знайдеться такий* ДНЕ, *який реалізує* $f(\boldsymbol{x})$, *і для якого всі скалярні добутки* $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ *приймають різні значення.*

Незважаючи на свою простоту, лема 3 дозволяє встановити досить задовільну (в асимптотичному розумінні) нижню оцінку росту $s_n(f, 2)$.

Лема 4. *Для всякого натурального n і для всякої n-місної, реалізовної на* ДНЕ$_1$ *булькової функції* $f(\boldsymbol{x})$

$$s_n(f, 2) \geq 2^{2n-1} + 2^{n-1} + 1.$$

Доведення. Для даної $f(\boldsymbol{x})$ покладемо в якості вагового вектор $\boldsymbol{w}$, отриманий за лемою 3, і розмістимо на числовій осі 2^n різних значень зважених сум $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$. Вибираючи для порогів p_1, p_2 два різні інтервали з $2^n + 1$ можливих отримаємо $C^2_{2^n+1}$ різних n-місних булькових функцій, реалізовних на ДНЕ$_1$, кожна з яких $\neq 1$. Врахувавши функцію, рівну 1, отримаємо нерівність, яку й потрібно було довести.

Зауваження. Доведена вище оцінка допускає покращення на основі методики, яка наведена в роботі [2].

Наслідок. Для всякого натурального n

$$N_1(n+1, 2) \geq (2^{2n-1} + 2^{n-1} + 1) N_1(n, 2).$$

Теорема 2. *Для* $n > 2$

$$N(n, 2) > 2^{n^2-2n+4}. \tag{2}$$

Доведення. Легко бачити, що $N_1(2, 2) = 16$. Тоді, використовуючи наслідок до леми 4, маємо

$$N(n, 2) \geq N_1(n, 2) > 2^{2n-3} 2^{2n-5} \ldots 2^3 N_1(2, 2) =$$

$$= 2^{(n-1)^2-1} 2^4 = 2^{n^2-2n+4}.$$

Отримані оцінки (1), (2) числа булькових функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах дозволяють сформулювати наступну теорему.

Теорема 3.

$$2^{n^2-2n+4} < N(n, 2) < 2^{n^2+n+1}, \ n > 2;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 N(n, 2)}{n^2} = 1.$$

Доведення випливає з теорем 1, 2.

Зауваження. Твердження теореми 3 є "більш сильним", ніж отримані в [4] оцінки для відповідної границі, де аргументом логарифма було число бульових функцій, реалізовних на однопорогових нейронних елементах.

Виявляється, що нижня оцінка числа бульових функцій, реалізовних на двопорогових нейронних елементах може бути використана для встановлення найкращої з відомих авторам (в асимптотичному розумінні) нижніх оцінок для числа n-місних порогових функцій, яка є суттєвим покращенням оцінок, отриманих в [4, 5, 7].

Лема 4. *Бульова функція* $h(x_1, ..., x_n)$ *реалізується на* ДНЕ$_1$ *із структурою* $[\boldsymbol{w}, p_1, p_2]$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$h(\boldsymbol{x}) = \overline{f(\boldsymbol{x})} \vee g(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

де $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ – n*-місні бульові функції, які реалізуються на нейронних елементах (однопорогових) із структурами* $[\boldsymbol{w}, p_1]$, $[\boldsymbol{w}, p_2]$.

Доведення випливає з означення двопорогового нейронного елемента.

Нехай $N(n)$ - число n-місних порогових функцій, $s_n(f)$ – число n-місних порогових функцій які мають той самий ваговий вектор, що й порогова функція $f(\boldsymbol{x})$.

Лема 5. *Для всякого натурального n*

$$N_1(n,\, 2) \le \frac{N(n+1)}{2}. \tag{4}$$

Доведення. Якщо бульова функція $h(\boldsymbol{x})$ реалізується на ДНЕ$_1$ із структурою $[\boldsymbol{w}, p_1, p_2]$, то вона реалізується і на ДНЕ$_1$ із структурою $[-\boldsymbol{w}, p_1', p_2']$, де p_1', p_2' – деякі нові пороги. Тому для кожної функції $h(\boldsymbol{x})$ (крім 0), реалізовної на ДНЕ$_1$, знайдуться принаймі дві різні пари (f_1, g_1), (f_2, g_2), такі, що справедливою є рівність (3). Тоді з леми 4 отримуємо, що

$$N_1(n,\, 2) \le \frac{\sum_{i=1}^{N(n)} s_n(f)}{2},$$

де сумування проводиться по всім n-місним пороговим функціям. В роботі [5] (формула 12) показано, що права частина попередньої нерівності рівна $N(n+1)$, що й доводить лему.

Теорема 4. *Для натурального n* > 2

$$N(n) > 2^{n^2 - 4n + 8}.$$

Доведення випливає з 2 і леми 5.

Зауваження. Лема 5 дозволяє встановити верхню оцінку для $N(n, 2)$, яка небагато в чому поступається верхній оцінці (1).

Теорема 5. Для натурального $n > 2$

$$2^{n^2-4n+8} < N(n) < 2^{n^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 N(n)}{n^2} = 1.$$

Доведення випливає з теореми 1 [4] та теореми 4.

Зауваження. Отримані результати можна узагальнити на більш широкий клас предикатів, ніж бульові функції, і на функціональні елементи більш загального вигляду (див [8]).

1. *Гече Ф. Е.* Реалізація бульових функцій на двопорогових нейронних елементах // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4 С. 17-24.
2. *Winder R. O.* Bounds of threshold date realizability, *Ttans. IEEE,* EC-12, № 5 (1963).
3. *Winder R. O.* Lower bounds of the number of threshold function, *Trans. IEEE*, EC-14, № 3 (1965).
4. *Блох. М.., Моравек Я.* Оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. –1969. – Вып. 6. – С. 82-88.
5. *Яджима С., Ибараки Т.* Нижняя оценка числа пороговых функций // Киберн. сб. Нов. сер. – 1969. – Вып. 6. – С. 72-81.
6. *Гече Ф .Е., Коцовський В. М.* Про деякі властивості бульових функцій, які реалізуються на одному нейронному елементі // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4 С. 25-29.
7. *Muroga S.* Lower bounds of the number of thteshold function, and a maximum weight, *Trans. IEEE*, EC-14, № 2 (1965).
8. *Гече Ф .Е., Коцовський В. М.* Задання предикатів із скінченою областю визначення за допомогою багатопорогових нейронних елементів // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 6 С. 9-14.

Одержано 11.09.2002