УДК 681.14

Geче Ф. Е., Коцовський В. М.
Ужгородський національний університет

ДИСКРЕТНІ НЕЙРОФУНКЦІЇ НАД ПОЛЕМ ГАЛУА

Скінченні поля і групи широко застосовуються в теорії логічних функцій і автоматів [1, 2]. Особливо важливу роль відіграють скінченні поля в теорії кодування [3]. В роботі [4] показано, що будь який скінченний автомат має ізоморфне зображення у вигляді лінійного автомата над деяким скінченним полем. Аналіз і синтез лінійних автоматів над довільним скінченним полем здійснюється традиційним методом спектрального аналізу.

Основні методи спектрального аналізу можуть бути успішно використані і для перевірки реалізованості дискретних функцій одним нейронним елементом над скінченним полем Ґалуа.

У цій роботі вводиться поняття нейроелемента над полем $GF\left(p^m\right)$ відносно довільної системи характерів групи, на якій визначена дискретна функція, а також розроблено метод його синтезу. Отримані в роботі результати узагальнюють поняття нейроелемента над полем Ґалуа і методи синтезу цих елементів [5].

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n, q$ натуральні числа $\left(k_i \geq 2,\ q \geq 2\right)$ і $k = \text{НСК}\left(k_1, k_2, \ldots, k_n, q\right)$. Далі будемо розглядати лише такі поля $F = GF\left(p^m\right)$, які задовольняють умову: $p^m - 1$ націло ділиться на *k*. Це означає, що поле $F = GF\left(p^m\right)$ містить циклічні групи H_{k_i}, H_q із відповідними твірними елементами $\sigma_i = \varepsilon^{(\operatorname{card} F - 1)/k_i}$ $\left(i = 1,2,\ldots,n\right)$, $\sigma = \varepsilon^{(\operatorname{card} F - 1)/q}$, де ε – примітивний елемент поля *F*.

Визначимо на множині $F \setminus \{0\}$ функцію $\operatorname{Fsign} \xi$ наступним чином:

$$\forall \xi \in F \setminus \{0\} \ \operatorname{Fsign} \xi = \sigma^j \text{, якщо } \frac{j(u-1)}{q} \leq \deg \xi < \frac{(j+1)(u-1)}{q},$$

де $u = \operatorname{Card} F$, $\deg \xi$ – степінь елемента ξ $\left(\xi = \varepsilon^{\deg \xi}\right)$, $j \in \{0,1,\ldots,q-1\}$.

Нехай $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ – прямий добуток циклічних груп H_{k_i} і $X\left(G_n\right)$ – група характерів групи G_n над полем *F*. З елементів групи $X\left(G_n\right)$ утворюємо множину $X^*\left(G_n\right) = \left\{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}, \chi_0\right\}$ і відносно $X^*\left(G_n\right)$ розглянемо наступну модель нейронного елемента:

$$f(\boldsymbol{g}) = \operatorname{Fsign}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\boldsymbol{g}) + \omega_0\right),$$

де χ_0 – головний характер групи G_n, $\boldsymbol{w} = \left(\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0\right)$ – вектор структури нейроелемента відносно системи $X^*\left(G_n\right)$ і $\boldsymbol{g} \in G_n$.

Теорема 1. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\boldsymbol{w} = \left(\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0\right)$ *відносно системи характерів* $X^*\left(G_n\right)$ *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$\forall \boldsymbol{g} \in G_n \quad r(\boldsymbol{g}) f(\boldsymbol{g}) = w(\boldsymbol{g}),$$

$$0 \leq \deg r(\boldsymbol{g}) < \frac{\operatorname{card} F - 1}{q},$$

де $w(\boldsymbol{g}) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\boldsymbol{g}) + \omega_0$.

Теорема 2. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_m; \omega_0)$ *відносно системи характерів* $X^*(G_n)$ *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$*, що*

$$0 \le \deg r(\boldsymbol{g}) < \frac{\operatorname{card} F - 1}{q},$$

$$\left(r(\boldsymbol{g}) f(\boldsymbol{g}), \chi_h^{-1}(\boldsymbol{g})\right) = 0$$

для всіх $\chi_k \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *– скалярний добуток векторів* ***a*** *і* ***b*** *над полем F.*

Зауваження. Якщо виконуються умови теореми 2, то координати вектора структури нейронного елемента, що реалізує функцію *f*, знаходяться за формулами:

$$\omega_0 = |G_n|^{-1}\left(r(\boldsymbol{g}) f(\boldsymbol{g}), \chi_0^{-1}(\boldsymbol{g})\right) = 0,$$

$$\omega_j = |G_n|^{-1}\left(r(\boldsymbol{g}) f(\boldsymbol{g}), \chi_{i_j}^{-1}(\boldsymbol{g})\right) = 0, \quad j = 1, \dots, m.,$$

Література

1. Блюмкин С. А. Пороговые многозначные функции. // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1972, №1, С. 101-108.
2. Карповский М. Г., Москалев Э. С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. – М.: Энергия, 1973. – 139 с.
3. Берлекемп Э. Алгебраическая теория кодирования. – М.: Мир, 1971. – 477 с.
4. Eicher L. Homomorphe Darstellungen endlicher Automaten in linearen Automaten. // EIK, 1973. – t.9, №10, C. 67-76.
5. Гече Ф. Е. Нейронные элементы над конечными полями. // Інформаційні технології й системи. – Львів, 1998, №1,2, с. 1000-104.