УДК 512.544

М. В. Поп, І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ЧЕРНІКОВСЬКІ 2-ГРУПИ, ЩО Є РОЗЩЕПЛЮВАНИМИ РОЗШИРЕННЯМИ ПРЯМОЇ СУМИ ТРЬОХ ЕКЗЕМПЛЯРІВ КВАЗІЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧЕТВЕРНОЇ ГРУПИ КЛЕЙНА

All Chernikov 2-groups which are split extensions of the direct sum of three copies of the quasicyclic 2-group by the Klein's four group have been classified up to isomorphism.

Класифіковані з точністю до ізоморфізму всі черніковські 2-групи, що є розщеплюваними розширеннями прямої суми трьох екземплярів квазіциклічної 2-групи за допомогою четверної групи Клейна.

Нехай M — повна абелева p-група з умовою мінімальності. В [1, 2] за допомогою теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп вивчаються черніковські p-групи $G(M, H, \Gamma)$, які є розширеннями групи M за допомогою скінченної p-групи H і які визначаються матричними зображеннями Γ групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Зокрема з точністю до ізоморфізму класифіковані всі такі розширення, коли H — циклічна p-група порядку p^s, де $s \leq 2$. Показано також, що задача класифікації всіх неізоморфних черніковських p-груп вигляду $G(M, H, \Gamma)$, де Γ пробігає множину всіх матричних $\mathbb{Z}_p$-зображень p-групи H, є дикою (тобто включає задачу описання з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над деяким полем для довільного натурального n), якщо виконується одна із наступних умов:

1) H — циклічна p-група порядку p^s, де $p \neq 2$ і $s > 2$;
2) H — циклічна 2-група порядку 2^s, $s > 3$;
4) H — нециклічна p-група порядку більшого за 4.

В роботах [3–5] частково класифіковані неізоморфні черніковські 2-групи, фактор група яких за максимальною повною абелевою підгрупою ізоморфна четверній групі Клейна $V = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$, де $2a = 0$, $2b = 0$. Ця стаття є продовженням цього циклу робіт. В ній дається описання всіх неізоморфних черніковських 2-груп, що є розщеплюваними розширеннями прямої суми трьох екземплярів квазіциклічної 2-групи за допомогою групи V. Також відішлемо читача до вищезгаданих робіт за аналогічними позначеннями.

Теорема 1. *Нехай M — пряма сума трьох екземплярів квазіциклічної 2-групи, $V = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ — четверна група Клейна. Всі неізоморфні черніковські 2-групи Чернікова, що є розщеплюваними розширеннями групи M за допомогою групи V, вичерпуються розширеннями вигляду $G(M, V, \Upsilon)$, де Υ пробігає наступну множину матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень групи V:*

$$\Upsilon_1 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_2 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_3 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_4 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Upsilon_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_6 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_7 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_8 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_9 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{10} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{11} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{12} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{13} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{14} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{15} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{16} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{17} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Upsilon_{18} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Доведення теореми базується на приведеному в [6] списку всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи Клейна, а саме всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи V, степені яких не перевищують 3:

$$\Gamma_{1+i+2j} : a \to (-1)^i, \quad b \to (-1)^j;$$

$$\Delta_1 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_2 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_3 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_4 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_5 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Delta_6 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{1+i+2j} : a \to (-1)^i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_{5+i+2j} : a \to (-1)^i \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to (-1)^j \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $i,\ j \in \{0,1\}$. А також того, що розширеннями $G_1 = G(M,V,\Upsilon)$ і $G_2 = G(M,V,\Upsilon')$ є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли матричні зображення Υ і Υ' групи V є узагальнено еквівалентними. Якщо X — деяке цілочислове матричне зображення групи Клейна третього степеня, то очевидно, що X є або нерозкладним зображенням, або еквівалентне сумі нерозкладних матричних зображень, одне з яких першого, а друге другого степеня, або X еквівалентне сумі трьох матричних зображень першого степеня. Це означає, що формально можна вважати, правильною одну із рівностей

$$\mathrm{X} = \Theta_i, \qquad \mathrm{X} = \Gamma_j + \Delta_k, \qquad \mathrm{X} = \Gamma_l + \Gamma_m + \Gamma_n,$$

$i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$; $j, l, m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Із [4] слідує, що множина нерозкладних зображень $\{\Theta_1,\ \Theta_2,\ \ldots \Theta_8\}$ розбивається на наступні класи попарно узагальнено еквівалентних зображень: $\{\Theta_1\}$, $\{\Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4\}$, $\{\Theta_5\}$, $\{\Theta_6,\ \Theta_7,\ \Theta_8\}$. Очевидно кожне з цих зображень не є узагальнено еквівалентне жодному із зображень вигляду $\Gamma_j + \Delta_k$ або $\Gamma_l + \Gamma_m + \Gamma_n$. Представники цих класів відповідно позначимо через Υ_1, Υ_2, Υ_3, Υ_4.

Далі, розглянемо групу Aut$V$ автоморфізмів четверної групи Клейна V. Вона складається з таких автоморфізмів:

$$\varphi_1 : a \to a,\ b \to b;, \quad \varphi_2 : a \to a,\ b \to a + b; \quad \varphi_3 : a \to b,\ b \to a;$$

$$\varphi_4 : a \to b,\ b \to a + b; \quad \varphi_5 : a \to a + b,\ b \to a; \quad \varphi_6 : a \to a + b,\ b \to b.$$

Для довільного автоморфізму $\psi \in \mathrm{Aut}V$ і для довільного зображення $\Gamma : g \to \Gamma(g)$, де $g \in V$, групи V відображення $\Gamma^{\psi} : g \to \Gamma(\psi(g))$, де $g \in V$, є також зображенням групи V. Безпосередньою перевіркою нами показано правильність співвідношень представлених у таблиці 1, яка заповнена наступним чином: на перетині рядка із заголовком, що є нерозкладним зображенням $\Gamma \in \{\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \Gamma_4,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ \Delta_5,\ \Delta_6\}$ та стовпця із заголовком, що є автоморфізмом $\psi \in \mathrm{Aut}V$, знаходиться нерозкладне зображення еквівалентне Γ^{ψ}.

Таблиця 1

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
Γ_1	Γ_1	Γ_1	Γ_1	Γ_1	Γ_1	Γ_1
Γ_2	Γ_2	Γ_4	Γ_3	Γ_3	Γ_4	Γ_2
Γ_3	Γ_3	Γ_3	Γ_2	Γ_4	Γ_2	Γ_4
Γ_4	Γ_4	Γ_2	Γ_4	Γ_2	Γ_3	Γ_3
Δ_1	Δ_1	Δ_3	Δ_2	Δ_2	Δ_3	Δ_1
Δ_2	Δ_2	Δ_2	Δ_1	Δ_3	Δ_1	Δ_3
Δ_3	Δ_3	Δ_1	Δ_3	Δ_1	Δ_2	Δ_2
Δ_4	Δ_4	Δ_6	Δ_5	Δ_5	Δ_6	Δ_4
Δ_5	Δ_5	Δ_5	Δ_4	Δ_6	Δ_4	Δ_6
Δ_6	Δ_6	Δ_4	Δ_6	Δ_4	Δ_5	Δ_5

Тому, якщо $\mathrm{X} = \Gamma_j + \Delta_k$ для деяких $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ та $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, то X узагальнено еквівалентне одному із зображень:

$$\Upsilon_5 = \Gamma_1 + \Delta_1, \quad \Upsilon_6 = \Gamma_1 + \Delta_4, \quad \Upsilon_7 = \Gamma_2 + \Delta_1, \quad \Upsilon_8 = \Gamma_2 + \Delta_2,$$

$$\Upsilon_9 = \Gamma_2 + \Delta_3, \quad \Upsilon_{10} = \Gamma_2 + \Delta_4, \quad \Upsilon_{11} = \Gamma_2 + \Delta_5, \quad \Upsilon_{12} = \Gamma_2 + \Delta_6.$$

Якщо ж $\mathrm{X} = \Gamma_l + \Gamma_m + \Gamma_n$ для деяких $l,\ m,\ n \in \{1, 2, 3, 4\}$, то X узагальнено еквівалентне одному із зображень:

$$\Upsilon_{13} = \Gamma_1 + \Gamma_1 + \Gamma_1, \quad \Upsilon_{14} = \Gamma_1 + \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \Upsilon_{15} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_2,$$

$$\Upsilon_{16} = \Gamma_2 + \Gamma_2 + \Gamma_2, \quad \Upsilon_{17} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Upsilon_{18} = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4.$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що в [7] дається класифікацію цілочислових 2-адичних зображень четверної групи Клейна з точністю до слабкої еквівалентності.

Список використаної літератури

1. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6.– С. 742–753.
2. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.
3. *Шапочка І. В.* Про розширення довільної повної абелевої 2-групи з умовою мінімальності за допомогою групи типу (2,2) // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1997. – Вип. 2.– С. 124–133.
4. *Шапочка І. В.* Про класифікацію неізоморфних розширень повної абелевої 2-групи з умовою мінімальності за допомогою абелевої групи типу (2,2) // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9.– С. 77–84.
5. *Шапочка І. В.* Про черніковські p-групи, факторгрупа яких за максимальною повною абелевою підгрупою є абелевою групою типу (p,p) // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14-15.– С. 165–172.
6. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140** № 5. – С. 1011–1014.
7. *A. I. Plakosh* On weak equivalence of representations of Klein four-group // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. №1 (28).– С. 114–117.