МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Закарпатський державний університет
Факультет інформатики

Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Методичний посібник до курсу

“ Основи дискретної математики”

зі спеціальності
“інформаційні управляючі системи та технології”

частина ІІ

Ужгород-2005

Методичний посібник до курсу “Основи дискретної математики” для студентів І курсу стаціонарної та заочної форми навчання містить деякі теоретичні відомості, завдання для самостійної та індивідуальної роботи студентів, літературу.

Методичний посібник розроблено і складено доктором технічних наук, професором **Василенко Ю.А.** та асистентом кафедри інформаційних управляючих систем та технологій **Копча-Горячкіною Г.Е.**

Відповідальний за випуск доктор технічних наук, професор **Василенко Ю.А.**

Друкується за рішенням кафедри інформаційних управляючих систем та технологій від 29.12.05р., протокол № 4.

Вступ

В даному посібнику розглядаються деякі елементарні поняття „дискретної” або „скінченої математики”, не зв’язаної з поняттями нескінчености, границі і неперервності. Дискретна математика має широкий спектр застосувань, перш за все в областях, зв’язаних з інформаційними технологіями і комп’ютерами. У вихідній назві комп’ютера – „електронна цифрова обчислювальна машина” – слово „цифрова” вказує на принципово дискретний характер роботи даного пристрою.

Поняття „відношення”, „функції”, „булеві функції” і близькі до них складають основний словник дискретної математики. Саме ці базові поняття закладають необхідну основу для наступних побудов.

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Основні поняття та означення

Булеві функції належать до класу двозначних однорідних функцій. Це найпростіший і водночас найважливіший клас однорідних функцій, що використовуються для опису скінченних автоматів та ЕОМ. Останні, у свою чергу, призначаються для перероблення дискретної інформації. Як модель засобів перероблення застосовується поняття автомата. Для формального опису цифрового автомата слугує апарат алгебри логіки (булевої алгебри). Останню утворюють множини всіх булевих функцій разом з операціями заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації тощо.

Основним поняттям алгебри логіки є висловлення. Образно кажучи, висловлення – це деяке твердження, про яке можна сказати, що воно є істинним або хибним. Наприклад, «Херсон – місто на Дніпрі», «Сонце сходить уранці» – істинні висловлення, а «На вулиці йде дощ» може бути істинним або хибним залежно від додаткових відомостей. Будь-яке висловлення можна позначити символом x і вважати, що $x = 1$ при істинності, а $x= 0$ при хибності висловлення.

Будемо розглядати функції $f(x_1, x_2 ,..., x_n)$, аргументи яких визначено на множині $E_2 = \{0,1\}$, такі, що $f(x_1, x_2 ,..., x_n)\in E_2$,, коли $x_i \in E_2$ $(i = 1, 2,..., n)$. Ці функції називатимемо функціями алгебри логіки, або булевими функціями. Таким чином, запис $f(x_1, x_2,..., x_n)$ є записом функції, яка залежить від довільних фіксованих аргументів.

Логічними (булевими) змінними в булевій алгебрі називають величини, які незалежно від їхньої конкретної суті можуть набувати лише двох значень. Ці значення будемо позначати нулем (0) й одиницею (1). Якщо змінна x має одиничне значення, то записуємо $x = 1$, а якщо нульове, то $x = 0$. *Булевою,* або *перемикальною,* функцією $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$ називають функцію, яка, як і її n аргументів, може набувати лише двох значень: 0 або 1. В обчислювальній техніці булеві функції застосовуються для опису алгоритмів, засобів цієї техніки – дискретних пристроїв. Останні призначаються для перетворення дискретної інформації, що розкладається на елементарні одиниці – біти, які в пристроях реалізуються сигналами, що описуються двійковими змінними – булевими.

Сукупність значень аргументів є кортежем, точкою або набором. Функція, що залежить від n аргументів, називається n-місною і є повністю визначеною, якщо задано її значення для всіх наборів (кортежів, точок) значень аргументів. Кожному i-му кортежу можна поставити у відповідність терм – довільний елементарний добуток двійкових змінних $t_i = x_m{}' x_{m-1}{}' \ldots x_2{}' x_1{}' x_0{}'$. Якщо в i-му кортежі $x_j = 1$, то в термі замість $x_j{}'$ записується змінна x_j, а якщо $x_j = 0$, то $\overline{x_j}$.

Способи задання булевих функцій

Існує три способи задання перемикальної функції: вербальний (або словесний), аналітичний і табличний. Аналітичне задання функції – опис її аналітичним виразом (формулою). Наприклад, $f_1 (x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2 (x_3 + x_1)$; $f_2(a,b,c) = abc + bc$. Одним із поширених способів задання булевої функції є її задання за допомогою таблиці відповідності (істинності). У табл.1 у трьох перших колонках задано всі можливі кортежі (набори) значень трьох аргументів, тобто поєднання їхніх нульових та одиничних значень, а в четвертій колонці – значення функції цих аргументів.

Будь-яке ціле невід'ємне число можна записати у вигляді суми

$$N = g_1 r^{n-1} + g_2 r^{n-2} + \ldots + g_{n-1} r^1 + g_{n-1} r^0.$$

де r — основа системи числення; g — співмножник, що набуває значень від 0 до r - 1.

Кількість доданків визначається розрядністю чисел.

Таблиця 1

x_2	x_1	x_0	$f(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Кортеж значень аргументів можна розглядати як запис цілого додатного числа у двійковій системі числення (r = 2); тоді x_0 — розряд одиниць, x_1 – розряд двійок, x_2 – розряд четвірок. Наприклад, шостим набором у табл.1 є $1{\cdot}2^2 + 0{\cdot}2^1 + 1{\cdot}2^0$. Перший набір називається нульовим, а останній – одиничним.

Десятковий еквівалент двійкового подання числа називається номером кортежу.

Булеві функції однієї змінної

Загальна таблиця відповідності для булевих функцій однієї змінної має вигляд табл.2.

Таблиця 2

x	$y_1=f_1(x)$	$y_2=f_2(x)$	$y_3=f_3(x)$	$y_4=f_4(x)$
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Тут функції y_1 та y_2 є функціями-константами: $f_1(x)$ – абсолютно істинна (константа одиниці); $f_2(x)$ – абсолютно хибна (константа нуля); $f_3(x)$ – логічне заперечення, або НЕ, інверсія x (читається як «не x», зображається як $\bar{x}$), це єдина нетривіальна функція; $f_4(x)$ – змінна x (повторює значення змінної x і тому збігається з нею).

Область визначення булевої функції

Областю визначення булевої (перемикальної) функції n аргументів є сукупність 2^n булевих кортежів. Це положення очевидне з погляду інтерпретації набору двійковим поданням n-розрядного числа (кількість додатних n-розрядних двійкових чисел дорівнює 2^n).

Булева функція двох аргументів є повністю визначеною, якщо задано значення в кожному з чотирьох можливих наборів ($2^2 = 4$); булева функція трьох аргументів у восьми ($2^3 =8$) наборах також буде повністю визначеною.

Булева функція n аргументів є повністю визначеною, якщо задано всі її значення в кожному з 2^n наборів.

Теорема 1. *Число $f_2(n)$ усіх функцій, що залежать від n змінних $x_1,x_2,...,x_n$, дорівнює 2^{2^n} .*

Дійсно, перемикальну функцію n аргументів визначено у 2^n наборах, у яких вона може набувати значення 0 або 1 із загальної кількості значень 2^n. Тому у відповідність кожній перемикальній функції можна поставит 2^n-розрядне двійкове число. Проте кількість різних 2^n-розрядних чисел дорівнює 2^{2^n}, а отже, кількість різних перемикальних функцій становить 2^{2^n}.

Від двох аргументів залежать 16 булевих функцій, від трьох – 256, від чотирьох – 65 500.

Функції двох змінних відіграють важливу роль, тому що з них може бути побудована будь-яка перемикальна функція.

Елементарні функції алгебри логіки

У математичній логіці часто вживаються елементарні функції, які відіграють таку саму важливу роль, як, наприклад, x^n *або* sin x у математичному аналізі.

Приклади елементарних функцій однієї змінної наведено в табл.2.

У табл. 3. подано 16 функцій двох змінних, з яких шість $f_{16}(a,b) = 0$,

$f_{11}(a,b) = a$, $f_{13}(a,b) = b$, $f_{12}(a,b)= \bar{a}$, $f_{14}(a,b)=\bar{b}$, $f_{15}(a,b)=1$ є константами або функціями одного аргументу. Інші 10 функцій залежать від двох аргументів і мають свої загальноприйняті позначення та назви, зазначені в табл.3.

Розглянути всі функції, що залежать від трьох аргументів, важко, оскільки їх число становить 2^{2^3} =256.

Функція f_1 *(a, b)* – кон'юнкція (логічне множення) істинна тоді, коли *a і b* – істинні. Кон'юнкцію називають також функцією І; умовно її позначають $f_1(a,b) = a*b = a\&b = a\wedge b$.

Функція f_2 *(a, b)* – диз'юнкція (логічне додавання) істинна тоді, коли істинними є або *a,* або *b,* або обидві змінні.

Диз'юнкцію часто називають також функцією АБО й умовно позначають так: $f_2(a,b) = a + b = a \vee b$.

Від диз'юнкції потрібно відрізняти функцію f_6 *(a,b),* яка називається функцією додавання за модулем 2 (функцією нерівнозначності або різнойменності) і є істинною, коли істинні або *a,* або *b* окремо. Умовне позначення цієї функції $f_6(a,b) = a \oplus b = a \overline{\sim} b$.

Приклад. Маємо два висловлення: «Завтра буде холодна погода», «Завтра піде сніг». Диз'юнкція цих висловлень – нове висловлення «Завтра буде холодна погода або піде сніг». З'єднувальний сполучник, що утворив нове висловлення, – АБО.

Кон'юнкція утвориться таким чином: «Завтра буде холодна погода і піде сніг». Це висловлення утворено за допомогою сполучника і.

Функція Шеффера (штрих Шеффера) – це функція f_7 *(a, b),* яка є хибною тільки тоді, коли *a* та *b* є істинними. Умовне позначення цієї функції $f_7(a,b) = a/b = a \overline{\wedge} b$

Німецький математик Д.Шеффер на основі цієї функції створив алгебру, названу алгеброю Шеффера. Функція $f_7(a,b)$ є універсальною.

Функція стрілка Пірса-Вебба — це функція f_8 *(a, b),* що є істинною тільки тоді, коли *a* і *b* є хибними. Умовне позначення цієї функції

$f_8(a, b) = a \downarrow b = a \overline{\vee} b$.

Математики Ч.Пірс та Д.Вебб, які незалежно один від одного вивчали властивості цієї функції, створили алгебру, названу алгеброю Пірса-Вебба. Функція f_8 *(a, b)* також є універсальною.

Імплікація – це функція f_3*(a, b),* яка є хибною тоді й тільки тоді, коли *a* є істинним**,** а *b* – хибним. Умовне позначення цієї функції $f_3(a, b) = a \rightarrow b$.

Таблиця 3

Позначення функції	Найменування функції	*a*				Примітка	Зберігає 0	Зберігає 1	Самодвоїста	Монотонна	Лінійна
		0	0	1	1						
		b									
		0	1	0	1						
$f_1 = a\wedge b = ab = a\&b$	Кон'юнкція (логічне множення)										
$f_2 = a\vee b = a + b$	Диз'юнкція (логічне додавання)										
$f_3 = a\rightarrow b$	Імплікація (від *a* до *b*)										
$f_4 = a \leftarrow b$	Обернена імплікація (від *b* до *a*)										

$f_5 = a \sim b$	Рівносильність										
$f_6 = a \overline{\sim} b = a \oplus b$	Нерівносильність (сума за модулем 2)										
$f_7 = a \overline{\wedge} b = a/b$	Функція Шеффера (інверсія кон'юнкції)					Універсальна					
$f_8 = a \overline{\vee} b = a \downarrow b$	Функція стрілка Пірса-Вебба (інверсія диз'юнкції)					Те саме					
$f_9 = a \overline{\rightarrow} b$	Інверсія імплікації (функція заборони за b)										
$f_{10} = a \overline{\leftarrow} b$	Інверсія, обернена імплікації (функція заборони за a)										
$f_{11} = a$	Повторення a (змінна a)					Тривіальна					
$f_{12} = \overline{a}$	Інверсія a (функція НЕ a)										
$f_{13} = b$	Повторення b (змінна b)					Те саме					
$f_{14} = \overline{b}$	Інверсія b (функція НЕ b)										
$f_{15} = 1$	Одинична функція (константа 1)					Тривіальна					
$f_{16} = 0$	Нульова функція (константа 0)					Те саме					

Булевий простір

Часто для спрощення запису перемикальної функції замість повного переліку термів використовують двійкові значення наборів, для яких функція набуває одиничних значень. Наприклад, запис

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overset{1}{\underset{3}{\vee}} F(1,4,7)$$

означає, що функція набуває одиничних значень на наборах 1, 4 і 7. Таку форму запису називають числовою (табл.4).

Таблиця 4

x_3	x_2	x_1	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	I
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Булевим простором може бути названа множина всіх наборів булевих векторів: $M = \{X\}$. Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множини X двійкові змінні, що позначаються тими самими літерами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, але набувають значень із множини $\{0,1\}$, а у відповідність елементам булевого простору M поставимо набори (кортежі) змінних, вважаючи, що змінна x_i ($i \in \{1,2,\ldots, n\}$) набуває значення 1 в деякому кортежі, якщо елемент x_i множини X належить відповідному простору M і набуває значення 0 в іншому випадку.

Таким чином, упорядковану сукупність двійкових змінних x_1, x_2, …, x_n *можна розглядати як деякий змінний вектор* $X = (x_1, x_2, …, x_n)$, *що набуває значення з множини M усіх сталих n-компонентних булевих векторів.* Сукупність значень вектора X, на яких булева функція набуває значення 1, позначимо через M^1 , а сукупність значень, на яких функція перетворюється на 0,– через M^0 . Очевидно, $M^1 \cup M^0 = M$ (для повністю визначеної булевої функції), тобто

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in M^1$, $f_0(x_1, x_2, ..., x_n) \in M^0$.

Безпосередній перелік цих елементів можна здійснити за допомогою булевої матриці, кожний рядок якої задає один з елементів множини M^1. Наприклад, функція $f_1(x_l ,x_2 ,x_3, x_4)=\underset{3}{\overset{1}{\vee}}F$ (3, 10, 6) набуває значення 1 на трьох кортежах. Булева матриця має вигляд

$$\| M^1 \in X \| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

кортежі, на яких функція набуває значення 1.

Властивості функцій алгебри логіки

Означення 1*. Функція* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ *залежить від аргументу* x_i *, якщо існують такі значення* $\lambda_1, \lambda_2,...., \lambda_n$, *змінних* $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}$, *що* $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1,...,} \lambda_n) \neq f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{i-1,} 1, \lambda_{i+1,...,} \lambda_n)$.

У цьому випадку змінна x_i називається суттєвою. Якщо x_i не є суттєвою змінною, то вона називається несуттєвою, або фіктивною. Отже, змінна x_i є фіктивною, якщо значення функції не змінюється при змінній x_i.

Нехай для функції f_1 $(x_1, x_2,..., x_n)$ змінна x_i є фіктивною. Розглянемо таблицю функцій (табл.5) і за нею побудуємо нову таблицю, викреслюючи рядки вигляду $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{i-1,} 1, \lambda_{i+1,...,} \lambda_n)$ та стовпці аргументу x_i.

Таблиця 5

x_1	...	x_i	...	x_n	$F(x_1, ..., x_i..., x_n)$
x_1	...	x_i	...	x_n	F_1
x_1	...	x_i	...	x_n	F_2
x_1	...	x_i	...	x_n	...
x_1	...	x_i	...	x_n	F_n

Одержана таблиця визначатиме деяку функцію

$$g(x_1,..., x_{i-1}, ..., x_{i+1}, ..., x_n).$$

Будемо говорити, що функцію $g(x_1,..., x_{i-1}, ..., x_{i+1}, ..., x_n)$ здобуто з функції $f(x_1, x_2, ...x_i,..., x_n)$ вилученням фіктивної змінної x_i, а функцію $f(x_1, x_2,...x_i,..., x_n)$ – із функції $g(x_1,..., x_{i-1}, ..., x_{i+1}, ..., x_n)$ введенням фіктивної змінної x_i.

Означення 2. *Функції f_1 та f_2 називаються рівними, якщо функцію f_2 можна одержати з f_1 додаванням і вилученням фіктивних аргументів.* Можна вважати, що коли задано функцію f_1 , то задано також функцію f_2.

Існують два типи функцій, які не мають суттєвих змінних:

• функція, тотожна 0 (константа 0);

• функція, тотожна 1 (константа 1).

Константи 1 і 0 можна розглядати як функції порожньої множини змінних.

Означення 3. *Булева функція $f(x_1.... x_n)$ називається симетричною відносно змінних $x_1, x_2...., x_к$, якщо для будь-якої підстановки*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ x_1 & x_2 & ... & x_k \end{pmatrix}$$

стверджується рівність:

$$f(x_1, ..., x_к, x_{к+1}, ..., x_n)= f(x_{j_1}, ..., x_{j_k}, x_{j_{k+1}}, ..., x_{j_n})$$

Функції, тотожно рівні константам 1 та 0, є симетричними відносно будь-якої сукупності змінних.

Зауваження. Якщо задано скінчену систему функцій $\{f_1,...,f_5\}$ при $s \geq 1$, то можна вважати, що всі ці функції залежать від одних і тих самих змінних $x_1,..., x_n$, тобто мають вигляд

$\{f_1(x_1,...,x_n), f_2(x_1,...,x_n),..., f_5(x_1,...,x_n)\}$.

Поняття формули в алгебрі логіки

Як і в елементарній алгебрі, в алгебрі логіки, виходячи з елементарних функцій, можна будувати формули. Назвемо P множину всіх функцій.

Означення 4, а. *Нехай L – деяка (не обов'язково скінчена) підмножина функцій з P, $L \subset P$. Кожна функція $f(x_1\ x_2,...,x_m)$ із $L (f \in L)$ називається формулою.*

Означення 4, б. *Нехай $f_0 (x_1\ x_2,...,x_m)$ – функція з $L (f_0 \in L)$ й $A_1, A_2,..,A_m$ – вирази, що є або формулами, або символами змінних із $U (A_i \in U)$. Тоді вираз $f_0(A_1, A_2,..., A_m)$ також називається формулою.*

Означення 5. *Усяке висловлення, що є складеним із деяких початкових висловлень за допомогою* 14 *логічних операцій з* 16, *крім* 0 *та* 1, *також називається формулою алгебри логіки.*

При утворенні (побудові) формул використовуються знаки (символи) трьох категорій:

• символи змінних $x, y, a, b, c,...$;

• символи логічних операцій (Λ), ($\vee$), ($\oplus$),($\rightarrow$) і т. д.;

• пари символів ( ),[ ], { } – дужки.

Приклади формул. Нехай L – множина елементарних функцій. Такі вирази є формулами:

• $\{[(x_1x_2)\ x_1]+ x_2\}$;

• $[\ \overline{x_1}\ (x_1 + x_3)\ ]$;

• $\overline{\{x_1 \ \vee [(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)]\}}$,

а ці вирази не є формулами:

• $(AB(xy$ — незакриті дужки;

• $\wedge B \wedge y$ — відсутній символ;

• $A \to Bx \to y$ — операція імплікації обов'язково має бути взята в дужки.

На практиці дужки розділяють на внутрішні та зовнішні. Формула F = $A \wedge B$ без дужок не є формулою. Проте для скорочення запису зовнішні дужки часто пропускають, і тому цей вираз означає формулу.

Реалізація булевих функцій формулами

Означення 6. *Нехай F – довільна формула. Тоді формули, що використовувалися для її побудови, називаються підформулами формули F.*

Нехай формула F є формулою для множини функцій $\{f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_S(x_1, ..., x_n)\}$. Розглянемо множини функцій $\{g_1(x_1, ..., x_n), g_2(x_1, ..., x_n), ..., g_5(x_1, ..., x_n)\}$, де функція g_i має ті самі змінні, тобто залежить від тих самих змінних, що і функція f_i (i = 1,..., s).

Розглянемо формулу $Fg = F(g_1, ..., g_s)$, яка випливає з F заміною $(f_1, ..., f_s)$ на $(g_1, ..., g_s)$. У цьому випадку формула Fg має ту саму структуру, що й формула F.

Означення 7. *Якщо формула $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ описує функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто формула F є формулою для змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, де $f \in L$, то кажуть, що формулі $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ відповідає функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, або формулі F зіставлена функція f.* Якщо функція f відповідає формулі F, то кажуть також, що формула F реалізує функцію f. Оскільки функції розглядаються з точністю до фіктивних змінних, вважаємо, що формула F реалізує будь-яку функцію f.

Якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що реалізується формулою $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, має несуттєву змінну x_i, то змінну x_i можна вилучити, замінивши функцію f рівною їй функцією f', а формулу F – формулою F', яка випливає з F завдяки ототожненню змінної x_i з будь-якою із змінних, що лишилися**.** Очевидно, формула F' є формулою, яка реалізує функцію f'.

Принцип суперпозиції

Функцію, що відповідає формулі F, називають суперпозицією функцій з множини функцій, а процес здобуття функції з множини функцій – операцією суперпозиції.

Приклад. Функція $F_1 = (((x_1x_2)+x_1)+ x_2)$ будується за три кроки (табл.6):

• (x_1x_2)

• $((x_1x_2)+x_1)$

• $(((x_1x_2)+x_1)+ x_2) = F_1$

Таблиця 6

x_1	x_2	x_1x_2	$(x_1x_2)+x_1$	$F_1 = (((x_1x_2)+x_1)+ x_2)$
0	0	0	0	0

0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Функція $F_2 = \overline{x_1}\ (x_2+x_3)$ будується також за три кроки (табл.7):

- (x_2+x_3)
- $(\overline{x_1})$
- $((x_2+x_3)\overline{x_1})=F_2$.

Таблиця 7

x_1	x_2	x_3	$x_2 + x_3$	$\overline{x_1}$	$F_2=\overline{x_1}\ (x_2+x_3)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

При складанні логічного висловлення із простих використовується принцип суперпозиції, тобто підстановка у функцію замість її аргументу інших функцій. Замість будь-якої змінної використовується як власне незалежна змінна, аргумент, так і змінна, що є функцією інших змінних. Цей принцип є правильним також у звичайній алгебрі. За допомогою принципу суперпозиції з двомісних булевих функцій можна побудувати будь-яку булеву функцію.

Принцип суперпозиції дає змогу на основі трьох основних елементарних функцій (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція) здобути складене логічне висловлення, що описує функціонування цифрових систем й автоматів. Покажемо це стосовно операцій кон'юнкції, диз'юнкції та інверсії.

Якщо F_1 й F_2 – формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1\ \&\ F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \sim F_2)$ – також формули.

При перетворенні формул використовуються такі операції підстановки змінних і безповторної підстановки функцій:

• операція підстановки змінних

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix},$$

що дає змогу виконати підстановку змінних у функцію $f(x_1, \dots, x_n)$ та здобути в результаті функцію $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$. Очевидно, підстановка змінних включає їх перейменування, перестановку й ототожнення;

• операція безповторної підстановки функцій дає можливість будувати вирази $f(A_1,\dots,A_m)$, де A_i — або формула, або змінна з U, $A_i \in U$, причому хоча б одне з A_i відмінне від змінної, а множини змінних, що входять в A_i й A_j, не перетинаються $(i \neq j)$.

Очевидно, кожна формула може бути здобута з функцій, що належать їх множині, застосуванням спочатку операції безповторної підстановки функцій, а потім операції підстановки змінних. Уведена мова формул зручна для запису функцій алгебри логіки, які описують різні умови для висловлень.

Рівносильність формул

Озналення 8. *Формули F_1 та F_2 називаються рівносильними, якщо при будь-яких значеннях змінних x_1, x_2, ..., x_n, що входять у ці формули, вони набувають однакових значень.*

Приклади:

- $\bar{\bar{x}}$ рівносильне x;
- $x \vee x$ рівносильне x;
- $(x \& y) \vee y$ рівносильне y;
- $x \vee y$ рівносильне $y \vee x$.

Між поняттями рівносильності й еквівалентності існує зв'язок: якщо формули F_1 та F_2 – рівносильні, то формула ($F_1 \sim F_2$) (еквівалентність) набуває значення істини при всіх значеннях змінних, і навпаки: якщо формула ($F_1 \sim F_2$) набуває значення істини при всіх значеннях змінних, то формули F_1 й F_2 – рівносильні.

При визначенні рівносильності двох формул не обов'язково передбачати, що вони містять одні й ті самі значення змінних.

Приклади важливих рівносильних формул:

- $\bar{\bar{x}}$ рівносильне x;
- xy рівносильне yx;
- $(xy)z$ рівносильне $x(yz)$;
- $x + y$ рівносильне $y + x$;
- $(x+y) + z$; рівносильне $x + (y + z)$;
- $x + x$ рівносильне x;
- $x\,x$ рівносильне x;
- $x + (xy)$ рівносильне x.

Основні тотожності

Кожній формулі відповідає функція алгебри логіки, а різним формулам – різні функції.

Означення 9. *Формули F_1 і F_2 називаються тотожними, або еквівалентними, якщо відповідні функції f_1 та f_2 – рівні, тобто $f_1 = f_2$. Тоді запис $F_1 = F_2$ означає, що F_1 й F_2 – тотожні формули.*

Приклад. $x\bar{x}=0$, $x \to y = \bar{y} \to \bar{x}$ і т. д.

Означення 10. *Дві формули F_1 й F_2 називаються еквівалентними, якщо вони задають одну і ту саму булеву функцію всіх змінних, що входять у ці формули.*

Із табл. 3 випливає, що такі елементарні функції, як заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція, Шеффера, стрілка Пірса-Вебба, імплікація і т.д., (находяться в певному зв'язку одна з одною. Розглянемо ці зв'язки та властивості зазначених функцій.

Кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення (функції І, АБО, НЕ). Використовуючи основні положення алгебри логіки, неважко переконатися у правильності таких восьми аксіом. Нехай x - деяка логічна змінна. Тоді:

1. $\overline{\overline{x}} = x$, що означає можливість вилучення з логічного виразу всіх членів, які мають подвійне заперечення, замінивши їх початковою величиною;

2. $x + x = x$; $xx = x$ – правила подібних перетворень, що дають змогу скорочувати довжину логічних виразів;

3. $x + 0 = x$;

4. $x + 1 = 1$;

5. $x \cdot 0 = 0$;

6. $x \cdot 1 = x$;

7. $x \overline{x} = 0$;

8. $x + \overline{x} = 1$.

Диз'юнкція та кон'юнкція мають властивості, аналогічні властивостям арифметичних операцій додавання і множення:

• властивість асоціативності (сполучний закон)

$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$, $x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)\, x_3$;

• властивість комутативності (переставний закон)

$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, $x_1x_2 = x_2x_1$;

• властивість дистрибутивності (розподільний закон):

для кон'юнкції відносно диз'юнкції

$x_1\&(x_2+x_3) = (x_1 \& x_2) + (x_1 \& x_3)$;

для диз'юнкції відносно кон'юнкції

$x_1 + x_2x_3 = (x_1 + x_2) \& (x_1 + x_3)$.

Властивість дистрибутивності фактично означає правила розкриття дужок і взяття в них логічних виразів.

Правильність наведених властивостей легко доводиться за допомогою викладених вище аксіом.

Доведемо, наприклад, що

$x_1 + x_2x_3 = (x_1 + x_2) \& (x_1 + x_3)$.

Справді,

$(x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3) = x_1x_1 + x_1x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 = x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1(1 + x_2 + x_3) + x_2x_3 = x_1 + x_2x_3$.

Аналогічно можна довести також інші закони.

Нескладно встановити правильність співвідношень, відомих як *закони де Моргана:*

$\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$;

$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$

За допомогою цих співвідношень можна виражати кон'юнкцію через диз'юкцію та заперечення або диз'юнкцію через кон'юнкцію і заперечення.

Закони де Моргана та наслідки їх є дійсними для будь-якої кількості змінних:

$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \overline{x_1} \& \ldots \& \overline{x_n}$;

$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n}$.

Для логічних функцій встановлюються співвідношення, відомі як *закони поглинання:*

$x_1 + x_1 x_2 = x_1$

$x_1 (x_1 + x_2) = x_1$

У табл. 8 показано правильність законів поглинання.

Таблиця 8

x_1	x_2	x_1+x_2	x_1x_2	$x_1+x_1x_2$	$x_1(x_1+x_2)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Функція додавання за модулем 2 – це функція

$x_1 \oplus x_2 = x_1 \overline{x_2} + \overline{x_1}\, x_2 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})$.

Вона має такі властивості:

• комутативність (переставний закон)

$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$;

• асоціативність (сполучний закон)

$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$;

• дистрибутивність (розподільний закон)

$x_1(x_2 \oplus x_3) = (x_1 x_2) \oplus (x_1 x_3)$.

Для цієї функції справджуються такі аксіоми:

$x \oplus x = 0$; $x \oplus 1 = \overline{x}$;

$x \oplus \overline{x} = 1$; $x \oplus 0 = x$.

На основі аксіом і властивостей можна вивести правила переведення функцій І, АБО, НЕ через функцію додавання за модулем 2 і навпаки:

$\overline{x_1} = x_1 \oplus 1$;

$x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$;

$x_1 x_2 = (x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \oplus x_2)$.

Функція імплікації ($\rightarrow$) – це функція, що виражається як $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} + x_2$.

Для цієї функції справджуються такі аксіоми:

$x \rightarrow x = 1$; $x \rightarrow 1 = 1$; $0 \rightarrow x = 1$;

$x \rightarrow \overline{x} = \overline{x}$; $x \rightarrow 0 = \overline{x}$; $1 \rightarrow x = x$.

Звідси випливає, що імплікація має тільки властивість комутативності (переставний закон) у зміненому вигляді $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_2} \rightarrow \overline{x_1}$.

Властивість асоціативності для цієї функції не справджується (табл.9).

Таблиця 9

x_1	x_2	x_3	$x_1 \to (x_2 \to x_3)$	$(x_1 \to x_2) \to x_3$
0	0	0	1	0
0	I	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	1	1	I
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Функції І, АБО, НЕ через імплікацію виражаються так:

$x_1 + x_2 = \overline{x_1} \to x_2;$

$x_1x_2 = \overline{x_1 \to \overline{x_2}};$

$\overline{x_1} = x_1 \to 0.$

Функція Шеффера (/) – це функція, що може бути виражена співвідношенням $x_1/x_2 = \overline{x_1x_2}$.

Для цієї функції справджуються такі аксіоми:

$x/x = \overline{x}$; $x/\overline{x} = 1$; $x/0 = 1$;

$x/1 = \overline{x}$; $\overline{x}/0 = 1$; $\overline{x}/1 = x$.

Для функції Шеффера справджується тільки властивість комутативності

$$x_1/x_2 = x_2/x_1,$$

однак для трьох і більше змінних

$$x_1/(x_2/x_3) \neq (x_1/x_2)/x_3.$$

Для перевірки виконання властивості асоціативності функції Шеффера розглянемо функцію трьох змінних.

Застосовуючи правила перетворення до правої частини останнього виразу, знаходимо

$$(x_1/x_2)/x_3 = \overline{(\overline{x_1x_2})x_3}\,_3 = x_1x_2 + \overline{x_3}.$$

Відповідно для лівої частини виразу маємо $(x_1/x_3)/x_2 = \overline{(\overline{x_1x_3})x_2} = x_1x_3 + \overline{x_2}$. Отже, властивість асоціативності не справджується для функції трьох змінних, а це означає, що вона не поширюється також на функцію *n* змінних. При розгляді властивості дистрибутивності функції Шеффера матимемо на увазі, що:

$x_1(x_2+x_3) = (x_1x_2) + (x_1x_3);$

$x_1+(x_2x_3) = (x_1+x_2)(x_1+x_3).$

Наведемо два приклади перетворення цих виразів. Перетворимо вираз

$$x_1/(x_2/x_3)$$

$$\overline{x_1(\overline{x_2x_3})} = \overline{x_1} + x_2x_3 = = x_1/x_2 \& x_1/x_3 =$$

$$= \overline{\overline{x_1/(x_2/1) \& x_1 \setminus (x_3/1)}} = [x_1/(x_2/1)/(x_3/1)].$$

Перетворюємо вираз $(x_1/x_2)/(x_1/x_3)$:

$$(x_1x_2)(x_1x_3) = x_1x_2+x_1x_3 = x_1(x_2+x_3) = x_1(\overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3}}) = x_1[(x_2/1)/(x_3/1)] =$$
$$x_1/[(x_2/1)/(x_3/1)] = [x_1/(x_2/1)/x_1/(x_3/1)]/1.$$

На підставі цих прикладів можна зробити висновок, що властивість дистрибутивності не справджується для функції трьох змінних, а отже, для функції n змінних.

З основних властивостей функції Шеффера можна дістати такі формули перетворення:

$$\begin{cases} x_1x_2 = \overline{x_1 / x_2} = x_1 / x_2 / x_1 / x_2 \\ \overline{x} = x / x \\ x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1} / \overline{x_2} = x_1 / x_1 / x_2 / x_2. \end{cases}$$

Функція стрілка Пірса – Вебба ($\downarrow$) – це функція, що описується виразом $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Для цієї функції легко показати справедливість таких аксіом:

$x \downarrow x = \overline{x}$;

$x \downarrow 0 = x$;

$x \downarrow \overline{x} = 0$;

$x \downarrow 1 = 0$.

На підставі аксіом можна встановити, що для функції стрілка Пірса – Вебба справджується тільки властивість комутативності: $x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$.

Функції І, АБО, НЕ виражаються через функцію стрілка Пірса – Вебба так:

$$\begin{cases} x_1x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) \\ x_1 + x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) \end{cases}$$
$$\overline{x} = x \downarrow x.$$

Основні тотожності для функцій наведено в табл. 10

Таблиця 10

	Тотожність	Найменування законів	Примітка
1.	*а*) $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ *або* $x_1x_2 = x_2x_1$ *б*) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ *або* $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$	Переставні (комутативні) закони	

2.	$а)\left(x_1 + x_2\right)x_3 = x_1x_3 + x_2x_3$ $б)x_1 + x_2x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$	Розподільні закони: а) кон'юнкція відносно диз'юнкції б) диз'юнкція відносно кон'юнкції	Дистрибутивні закони (б) не мають аналога у звичайній алгебрі
3.	$а)(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$ $б)(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$	Сполучні закони (асоціативні)	
4.	$а)xx = x$ $б)x + x = x$	Закони повторення (тавтології)	Закони заперечення
5.	$а)x_1(x_1 + x_2) = x_1$ $б)x_1 + x_1x_2 = x_1$	Закони поглинання (абсорбції)	
6.	$x\overline{x} = 0;\ x + \overline{x} = 1$	Закон доповнення	
7.	$а)\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$ $б)\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}$	Правила де Моргана	
8.	$\overline{\overline{x}} = x$	Закон подвійного заперечення	
9.	$а)x_1x_2 + x_1\overline{x_2} = x_1$ $б)(x_1 + \overline{x_2})(x_1 + x_2) = x_1$	Закони склеювання	
10.	$а)x \cdot 1 = x$ $б)x + 1 = 1$	Закони універсальної множини	
11.	$а)x \cdot 0 = 0$ $б)x + 0 = x$	Закони нульової множини	

Сформулюємо такі правила.

1.Якщо в логічному добутку один із співмножників дорівнює нулю, то логічний добуток також дорівнює нулю.

2.Якщо в логічному добутку, що містить не менше двох співмножників, є співмножник, який дорівнює одиниці, то цей співмножник можна вилучити.

3.Якщо в логічній сумі, що містить не менше двох доданків, є доданок, який дорівнює нулю, то цей доданок можна вилучити.

4.Якщо в логічній сумі один із доданків дорівнює одиниці, то ця сума дорівнює одиниці.

Очевидно, якщо *F′* – підформула формули *F*, то коли замінити будь-яке з її входжень на еквівалентну формулу *B′*, формула *F* перейде у формулу *B*, еквівалентну формулі *F*.

Цей принцип разом із тотожностями для елементарних функцій, до яких приєднуються всі тотожності, що випливають після підстановки замість змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ будь-яких форм, дає змогу здійснювати еквівалентні перетворення і таким чином одержувати нову тотожність.

Приклади: 1. Довести тотожність 5 б) з табл. 1 Маємо:

$$x_1 + x_1x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1x_2 = x_1(x_2 + \overline{x_2}) + x_1x_2 = x_1x_2 + x_1\overline{x_2} + x_1x_2 = x_1x_2 + x_1\overline{x_2} = x_1(x_2 + \overline{x_2}) =$$
$$= x_1 \cdot 1 = x_1,\ \textit{або}\ x_1 + x_1x_2 = x_1(1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

Таким чином, $x_1 + x_1x_2 = x_1$, тобто дістаємо правило поглинання добутку x_1x_2 співмножником x_1

2. Спростити вираз $F = x + xy\bar{z} + \bar{y} + x\bar{y}z + \bar{z}(\bar{z} + \overline{xy})$. Маємо:

$$F = x + xy\bar{z} + \bar{y} + x\bar{y}z + \bar{z}(\bar{z} + \overline{xy}) = x(1 + y\bar{z}) + \bar{y}(1 + xz) + \bar{z} + \overline{zxy} = x + \bar{y} + \bar{z}$$
$$(1 + \overline{xy}) = x + \bar{y} + \bar{z}.$$

3. Довести, що $x(x + y) = x$. Маємо:

$$xx + xy = x + xy = x(1 + y) = x \bullet 1 = x.$$

4. Довести, що $x + \bar{x}y = x + y$. Маємо:

$$x + \bar{x}y = (x + \bar{x})(x + y) = 1(x + y) = x + y.$$

5. Довести, що $x(\bar{x} + y) = xy$.

$x(\bar{x} + y) = x\bar{x} + xy = 0 + xy = xy.$

6. Довести, що $(x + y)(\bar{x} + z) = xz + \bar{x}y$. Маємо:

$$(x + y)(\bar{x} + z) = (x + y)\bar{x} + (x + y)z = x\bar{x} + y\bar{x} + xz + yz =$$
$$= 0 + xz + y\bar{x} + yz = xz + y\bar{x} + yz(x + \bar{x}) = xz + y\bar{x} + +yzx + yz\bar{x} = xz + xzy + \bar{x}y + \bar{x}yz$$
$$= xz(1 + y) + \bar{x}y(1 + z) = xz + \bar{x}y.$$

Уперше теорія Дж. Буля була застосована Еренфестом у 1916р. до аналізу перемикальних схем. Використання логічних функцій виявилося особливо корисним для опису роботи логічних елементів ЕОМ, теорії алгоритмів.

Принцип двоїстості

Існує ще один спосіб здобуття тотожності. Він ґрунтується на використанні принципу двоїстості з теорії булевої алгебри.

Означення 11. *Функція* $[f(x_1,x_2,...,x_n)]^*$, *що дорівнює функції* $\overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$, *називається двоїстою функцією до функції* $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Таблиця для двоїстої функції (табл.11) випливає з таблиці для функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 та 1 на 0) значень функції й заміною порядку проходження інвертованих значень функції на протилежний (перевертанням стовпця інвертованих значень функції):

- функція 0 двоїста до 1;
- функція 1 двоїста до 0;
- функція *x* двоїста до $\overline{x}$;
- функція $\overline{x}$ двоїста до *x;*
- функція x_1x_2 двоїста до x_1+x_2 - взаємно двоїсті функції:
- функція x_1+x_2 двоїста до x_1x_2 кон'юнкція та диз'юнкція.

Таблиця 11

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$	$[f(x_1,x_2,x_3)]^*$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

З означення двоїстості функцій випливає, що

$$f^{**}=(f^*)^*=f$$

Для запису формули f^*, двоїстої до формули *f*, треба у формулі *f* всюди 0 замінити на 1, 1 — на 0, знак & — на знак «+», а знак «+» — на &, тобто якщо $f=c[0,1,\overline{x},x_1,\wedge x_2,\ x_1\vee x_2]$. то $f^*=\overline{c}[1,0,x,x_1+x_2,\ x_1\wedge x_2]$.

На підставі законів де Моргана виводиться таке положення: якщо $F(x_1,x_2,...,x_n)$ *й* $F^*(x_1,x_2,...,x_n)$ – двоїсті формули, то формула $\overline{F^*}(x_1,x_2,...,x_n)$ є рівносильною формулі $F(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$.

Звідси випливає, що $F^*(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{F}(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$, тобто двоїста формула виражається як заперечення формули, знайденої з початкової заміщенням кожної змінної її запереченням. Таблиця відповідності двоїстої функції формується заміною значень аргументів у початковій функції на протилежні, тобто 0 замінюється на 1, а 1 — на 0.

Формула або функція, рівносильна своїй двоїстій, називається само-двоїстою.

Якщо формули F_1 $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ й $F_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$ є рівносильними, то й двоїсті до них формули $F_1^*(x_1, x_2,\dots, x_n)$ *та* $F_2^*(x_1, x_2,\dots, x_n)$ також рівносильні.

Принцип двоїстості дає змогу майже вдвічі зменшити трудомісткість виведення при розгляді властивостей елементарних функцій.

Набори повних функцій

Розвинення булевих функцій за змінними

Введемо позначення

$$x^\sigma = x\sigma + \overline{x\sigma}, де\ \sigma = 0 \vee 1;$$

$$тоді\quad x^\sigma = \begin{cases} \overline{x},\ при\ \sigma = 0; \\ x,\ при\ \sigma = 1. \end{cases}$$

Якщо $x = \sigma,\ то\ x^\sigma = 1.$.

Твердження 1. *Кожна функція алгебри логіки* $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *може бути подана в такій формі:*

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1,\dots,\sigma_m \\ (1\le m\le n)}} x_1^{\sigma_1},\dots,x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,\dots,\sigma_m,x_{m+1},\dots,x_n),$$

де $\vee$ – *символ узагальненої диз'юнкції.*

Диз'юнкція береться за всіма можливими наборами значень змінних $x_{1.}, x_2,\dots, x_m$. Це подання називається розвиненням функції за *m* змінними: $x_1, x_2,\dots, x_m$.

Теорема 1. *Кожна функція алгебри логіки може бути виражена у вигляді формули через заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію.*

<u>Доведення.</u> Нехай $f(x_1, x_2,\dots, x_n) \equiv 0$. Тоді очевидно, що $f(x_1, x_2,\dots, x_n) = x_i\,\overline{x_i}$. Нехай $f(x_1, x_2,\dots, x_n) \equiv 0$ й $\overline{f}\,(x_1, x_2,\dots, x_n) \equiv 1$. Тоді відповідно до попереднього твердження

$$f(\tilde{x}_1^{\sigma_1},\tilde{x}_2^{\sigma_2},\dots,\tilde{x}_n^{\sigma_n}) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1}} \tilde{x}_1^{\sigma_1},\tilde{x}_2^{\sigma_2},\dots,\tilde{x}_n^{\sigma_n},$$

тобто функція виражається у вигляді формули через заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію.

Набори повних систем

Означення 12. *Система функцій* $(f_1, f_2,\dots, f_s)$ *з P (f∈P) називається функціонально повною, якщо будь-яка булева функція може бути записана у вигляді формули через функції цієї системи.*

Наведемо приклади повних систем.

1. Система P – множина всіх булевих функцій. Кількість функцій – 2^{2^n}. Так, усі 16 функцій двох змінних утворюють повну систему.

2. Система функцій {x; (x_1x_2); (x_g +x_2)}. Виходячи з попередньої теореми 1 й означення 2, випливає, що не кожна система є повною, наприклад, система $\{0, 1\}$. Звідси маємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай задано дві системи функцій:*

$$A = \{f_1, f_2, ..., f_m\} \qquad (1)$$

$$B = \{g_1, g_2, ..., g_s\} \qquad (2)$$

відносно яких відомо, що система (1) *повна і кожна її функція виражається у вигляді формули через функції системи* (2). *Тоді система* (2) *також є повною.*

Доведення. Нехай h – довільна система функцій, $h \in P$. З урахуванням повноти системи (1) h можна виразити як

$h = C(f_1, f_2, ..., f_m)$.

За умовою
$$\begin{aligned} f_1 &= C_1(g_1, g_2, ..., g_s) \\ f_2 &= C_2(g_1, g_2, ..., g_s) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_m &= C_m(g_1, g_2, ..., g_s) \end{aligned}$$

Тому у формулі $h = C_m(f_1, f_2, ..., f_m)$ можна вилучити f_i, тобто записати $C(f_1, f_2, ..., f_m) = C(C_1(g_1, g_2, ...), C_2(g_1, g_2, ...), ..., C_m(g_1, g_2, ..., g_s))$.

Цей вираз визначає формулу (2) з будовою C′:

$C(C_1(g_1, g_2, ...), C_2(g_1, g_2, ...), ..., C_m(g_1, g_2, ..., g_s)) = C'(g_1, g_2, ..., g_s)$,

або остаточно $h = C'(g_1, g_2, ..., g_s)$.

Теорему доведено: B належить до повних систем.

Спираючись на цю теорему, можна встановити повноту ще кількох систем і таким чином розширити список повних систем.

3. Система функцій $\{\bar{x}, (x_1x_2)\}$. Для доведення візьмемо за систему (1) систему з прикладу 2, а за систему (2) – систему, що розглядається. Використовуємо тотожність $x_1 + x_2 = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}$, що випливає з тотожності елементарних функцій, функцію $(x_1 + x_2)$ можна завжди виразити через логічний добуток x_1x_2. З цього випливає, що функцію $(x_1 + x_2)$ можна вилучити з переліку повних систем.

4.Система $\{x, (x_1 + x_2)\}$., що доводиться або аналогічно попередньому, тобто $x_1x_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}$, або через принцип двоїстості.

5.Система {0, 1, x_1x_2 ,x_1+x_2 }.

Доведення. За систему (1) візьмемо систему з прикладу 3, а за (2) – систему з прикладу, що розглядається. Маємо $x_1+1=\overline{x_1}$.

6.Функція Шеффера $\overline{x_1 x_2}$.

7.Функція стрілка Пірса – Вебба $\overline{x_1+x_2}$.

Доведення двох останніх прикладів читачеві пропонуємо виконати самостійно.

Означення 13. *Система функцій $f(x_1,x_2,...,x_n) \in P$, суперпозицією яких може бути подана будь-яка функція з деякої множини булевих функцій, називається функціонально повною. Якщо в такій системі допускаються константи 0 і 1, то її називають ослаблено функціонально повною. Кажуть, що функціонально повна система функцій утворює базис у логічному просторі. Система функцій називається мінімально повним базисом, якщо вилучення з неї будь-якої функції перетворює цю систему на неповну.*

Теорема Жегалкіна

Теорема 3. *Будь-яка перемикальна функція $f \in P$ (кожна функція з P) може бути зображена за допомогою полінома за mod 2 (полінома Жегалкіна)*

Поліном Жегалкіна має такий вигляд

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i_1,...,i_s} a_{i_1},...,a_{i_s} x_{i_1},...,x_{i_s}$$

і є канонічним многочленом

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = k_0+k_1x_1+k_2x_2+k_3x_1x_2+...+k_nx_1x_2,...,x_n,$$

де $k_1,...,k_s$ – коефіцієнти, що набувають значення 0 або 1. Число членів-наборів $(x_{i_1},...,x_{i_s}) = 2^n$. Оскільки f дорівнює 0 або 1, загальне число членів (поліномів) становить 2^{2^n}.

Теорема Жегалкіна дає можливість подати логічну функцію у вигляді поліномів різного степеня. Існує кілька класів перемикальних функцій, важливих для логічного аналізу.

Приклад. Виразити, x_1+x_2 у вигляді композиції полінома Жегалкіна. Шукаємо вираз x_1+x_2 у вигляді полінома з невизначеними коефіцієнтами:

$$x_1 + x_2 = ax_1x_2 + bx_1 + cx_2 + d$$

При $x_1 = x_2 = 0$ маємо $d=0$; при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ дістаємо с = 1; при $x_1 = 1$, $x_2=0$ маємо $b=1$; при $x_1 = x_2 = 1$ дістаємо $1 = a + b + c$, тобто $a=1$.

Тоді остаточно:

$$x_1+x_2=x_1x_2+x_1+x_2.$$

Існує кілька повних систем. Із поняттям повноти тісно пов'язане поняття замикання і замкненого класу.

Означення 14. *Нехай A – деяка підмножина функцій з P ($A \in P$). Замиканням A називається множина всіх булевих функцій, зображуваних у* *вигляді формул через функції множини А. Замикання множини А позначатимемо* $[A]$.

Приклади: 1. $A= P;$ очевидно, що $[A] = P$.

2. $A = \{1,\ x_1+x_2\}$. Замиканням цієї множини буде клас L усіх лінійних функцій, тобто функцій, що мають вигляд

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n,$$

де $c_i = 0 \vee 1 (i = 0, ..., n)$.

Означення 15. *Клас (множина) А називається функціонально замкненим, якщо* $[A] = A$.

Приклади: 1. Клас $A = P$ – замкнений.

2.Клас $A = \{1,\ x_1 + x_2\}$ не є замкненим.

3.Усякий клас $[A]$ буде замкненим.

У термінах замкненого класу можна дати таке означення повноти: A – повна система, якщо $[A] = P$.

Типи булевих функцій

В алгебрі логіки у множині різних булевих функцій розрізняють п'ять типів булевих функцій.

1. Позначимо через T_0 клас усіх булевих функцій $f(x_1,x_2,...,\ x_n\ )$, що зберігають константу 0, тобто функцій, для яких

$$f(0, 0, ...,0) = 0.$$

Якщо f є T_0, а f^1 — функція, що дорівнює функції f, то й $f^1 \in T_0$. Число функцій класу T_0 становлять $N_0 = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$. Це функції f_1,f_2, $f_6, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{13}, f_{16}$ *для* $n = 2$.

2. Нехай T_1 — клас функцій $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що зберігають константу 1, тобто для яких

$$f(1,1,...,1) = 1.$$

Клас T_1 складається з функцій, двоїстих до функцій з класу T_0 (клас T_0 двоїстий до T_1).

Клас T_1 містить $N_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ функцій. Це функції $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_{11}, f_{13}, f_{15}$ для n =2

3. Нехай S – клас самодвоїстих функцій f з P таких, що $f^* = f$. Для самодвоїстої функції справджується тотожність

$$\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

тобто в наборах $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_n)$ які називатимемо протилежними, самодвоїста функція набуває протилежних значень.

4. Нехай M – клас монотонних функцій і нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – будь-які набори.

Означення 16. *Для двох наборів* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *та* $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ *виконується відношення передування, якщо* $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$. Наприклад, набори α = (0, 1, 0, 1) й β = (1, 1,0, 1) знаходяться у відношенні передування, тобто значення набору не зменшується. Набори (0, 1) та (1, 0) не знаходяться у відношенні передування.

Означення 17. *Функція* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називається монотонною, якщо для будь-яких двох наборів* α *і* β, *що знаходяться у відношенні передування (тобто значення наборів не зменшується), справджується нерівність*

$$f(\alpha) \le f(\beta).$$

Функція, рівносильна монотонній, також є монотонною. Тут M – множина монотонних функцій.

5. Розглянемо L – клас лінійних функцій.

Перемикальна функція двох змінних називається лінійною, якщо вона може бути подана поліномом першого степеня

$$f(x_0, x_1) = k_0 \oplus k_1 x_0 \oplus k_2 x_1 = k_0 + k_1 x_0 + k_2 x_1, (k_0, k_1, k_2 = 0 \vee 1),$$

тобто канонічним многочленом, що не містить добутку змінних. Так, якщо кількість коефіцієнтів дорівнює n + 1, то число лінійних многочленів становить 2^{n+1} (для двох змінних (2^3 = 8) існує вісім лінійних функцій).

Легко довести, що класи T_0 , T_1, S, M, L є замкненими.

Теорема про повноту. Теорема Поста

Теорема 4 (про функціональну повноту). *Для того щоб система функцій* ($f \in A$) *була повною, необхідно й достатньо, щоб вони не містилися в жодному з п'яти замкнених класів* T_0, T_1, S, M, L:

$$f \not\subset T_0,\ f \not\subset T_1,\ f \not\subset S,\ f \not\subset M,\ f \not\subset L.$$

Для доведення треба розглянути п'ять функцій:

$$f_1 \notin T_0,\ f_2 \notin T_1,\ f_3 \notin S,\ f_4 \notin M,\ f_5 \notin L$$

і покласти $A' = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \}$.

Теорема 5. *З усякої повної системи функцій можна вилучити підсистему, що містить не більш як чотири функції.*

<u>Доведення</u>**.** Дійсно, яка-небудь одна функція $f_i \notin T_0$ або не самодвоїста, тому що f_i (0, 0, ..., 0) = f_i (1, 1, ..., 1), або не зберігає 1 і не монотонна, буде повною системою чотирьох функцій.

Отже, розглянуті елементарні логічні функції можуть мати або не мати такі властивості:

•збереження нуля (k_0=0);

•збереження одиниці;

•самодвоїстість (непарність) $f(x_0, x_1) = \bar{f}(\bar{x}_0 \bar{x}_1)$ для функцій двох змінних й $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ у загальному випадку;

•монотонність $f(x_0, x_1) \le f(x_0^', x_1^')$ при $x_0 \le x_0^'$ та $x_1 \le x_1^'$;

• лінійність

$$f(x_0, x_1) = k_0 + k_1 x_0 + k_2 x_1;$$
$$f(x_1, ..., x_n) = k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_n x_n,$$

де $k_0, k_1, k_2,$ – двійкові константи (0 або 1).

Система (набір) елементарних логічних функцій називається функціонально повною, якщо довільну перемикальну функцію можна подати у вигляді суперпозиції функцій цієї системи.

Теорема 6.(теорема Поста). *Щоб система перемикальних функцій була повною, необхідно й достатньо, щоб вона містила хоча б одну функцію, яка не зберігає нуль, одиницю, тобто не є лінійною, монотонною, самодвоїстою.*

Іншими словами, для задоволення критерію повноти необхідно й достатньо, щоб серед функцій системи були:

•функція, що не зберігає константу 0;

•функція, що не зберігає константу 1;

•функція, що не є самодвоїстою;

•функція, що не є монотонною;

•функція, що не має властивості лінійності.

Якщо кожна з узятих функцій має лише одну властивість (але відмінну від інших), то для функціональної повноти потрібна система з п'яти функцій.

Повна система називається такою, що не скорочується, якщо вилучення будь-якої функції системи порушує її повноту. У зв'язку з тим, що кожна з функцій має кілька властивостей, функціонально повні системи можуть бути побудовані за допомогою однієї, двох, трьох і чотирьох функцій. Найпоширенішою є система з трьох функцій: І, АБО, НЕ. За допомогою цих функцій можуть бути описані процеси управління будь-якими виробництвами, будь-яка функція, що характеризує роботу будь-якого пристрою обчислювальної системи, подібно до того, як у музиці за допомогою семи нот можна записати симфонію, оперу тощо.

Канонічні форми перемикальних функцій

Проблема розв'язуваності

Означення 18. *Формула називається тотожно істинною, якщо вона при всіх значеннях змінних, що входять у неї, набуває значення 1 .*

Приклади тотожно істинних формул:

$$x \vee \bar{x} = 1;\ x \to (y \to x);\ x(x \to y) \to y.$$

Означення 19. *Формула називається тотожно хибною, якщо вона при всіх значеннях змінних, що входять у неї, набуває значення 0, наприклад*

$$x\,\bar{x} = 0.$$

Означення 20. *Формула називається здійсненною (нейтральною), якщо вона не є тотожною* 0 *або* 1 (*0* $\vee$ 1), *тобто набуває значення* 1 *при деяких значеннях змінних, що входять у неї.*

Можна поставити таке завдання: задати єдиний спосіб (алгоритм), який дає змогу для кожної формули з'ясувати, чи є вона здійсненною, тобто чи не є вона тотожною 0 або 1. Таке завдання має назву проблеми *розв 'язуваності.*

Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – формула, що виражає деяку функцію *n* змінних: $x_1, x_2, ..., x_n$. При цьому як змінні $x_1, ..., x_n$, так і функція F можуть набувати лише двох значень, число ж можливих комбінацій значень змінних $x_1, ..., x_n$ є скінченим і дорівнює 2^n. Для кожної такої комбінації можна визначити значення формули *F*. Знаючи ці її значення для кожної комбінації змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ можна встановити, здійсненна чи ні функція.

Викладений спосіб, звичайно, дає принципове вирішення проблеми розв'язуваності, але при великій кількості змінних він практично нездійсненний через величезне число можливих наборів значень змінних.

Існує інший спосіб, що ґрунтується на зведенні формул до нормальної форми. Якщо у процесі такого зведення формула не перетворюється на тотожні 0 або 1, то це свідчить про її здійсненність.

Синтез комбінаційної схеми зводиться до визначення булевого виразу заданої перемикальної функції. Подальший перехід від булевого виразу до системи є однозначним і не викликає особливих труднощів. Методи, які дають змогу для будь-якої перемикальної функції записати булевий вираз, ґрунтуються на тому, що вводяться вирази певного типу – канонічні форми, а потім формуються досить прості правила запису будь-якої функції у цих формах. Як канонічні звичайно використовуються досконалі диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми (ДДНФ і ДКНФ).

Нормальні та досконалі диз'юнктивні нормальні форми перемикальних функцій

При розгляді перемикальних функцій можна, наприклад, зустріти вираз вигляду $x_1 x_2 \bar{x}_3$, який називається елементарною кон'юнкцією.

Означення 21. *Логічний добуток будь-якої кількості різних незалежних змінних (літер), що входять із запереченням або без нього, називається елементарною кон'юнкцією.*

Звідси випливає, що $(x_1 + x_0)x_2$ *й* $x_1 x_2 + \bar{x}_3$ – не є елементарною кон'юнкцією.

Функція $F' = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_r}$ – елементарна кон'юнкція, r – її ранг, а $i_\nu \neq i_k$ при $\nu \neq k$.

Означення 22. *Якщо функцію задано формулою у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій, то її задано диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наприклад:

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2.$$

Конституентою одиниці (мінтермом) називають перемикальну функцію *n* аргументів, яка набуває значення 1 тільки на одному їх кортежі. Кількість різних конституент одиниці для функцій *n* аргументів дорівнює числу різних кортежів наборів, тобто 2^n. Згідно з табл. 3 конституентами одиниці є f_1, f_8, f_9, f_{10} для n=2.

Твердження 2. *Будь-яка таблично задана функція алгебри логіки може бути подана у вигляді*

$$f(x, x, ..., x) = F_1^1 \vee F_2^1 \vee ... \vee F_n^1 = \bigvee_{i=1}^{n} F_i^1,$$

де F_i^1 – елементарна кон'юнкція рангу n; i – номери наборів, на яких функція F_i^1 дорівнює *1*; $\vee$ – символ узагальненої диз'юнкції.

Означення 23. *ДДНФ перемикальної функції називається диз'юнкція тих конституент одиниці, які перетворюються в одиницю на тих самих наборах, що й задана функція.*

Будь-яка перемикальна функція має одну ДДНФ (кількість її членів дорівнює кількості одиничних значень функції) і кілька ДНФ. Будь-яка ДНФ утворюється внаслідок більшого або меншого скорочення ДДНФ, причому від будь-якої ДНФ можна перейти до ДДНФ. Такий перехід називається розгортанням.

Можна дати також інші означення ДДНФ.

Означення 24. *ДДНФ формули А* $(x_1, x_2, ... x_n)$, *що містить n різних змінних, називається ДНФ, яка має такі властивості:*

•*в ній немає однакових доданків;*

•*жоден із доданків не містить двох однакових співмножників;*

•*жоден із доданків не містить змінну разом з її запереченням;*

•*в кожному окремому доданку є як співмножник або змінна* x_i , *або її заперечення для будь-якого i= 1, 2 ,... n.*

Нормальні та досконалі кон'юнктивні нормальні форми перемикальних функцій

Означення 25. *Логічна сума будь-якої кількості різних незалежних змінних, що входять із запереченням або без нього, називається елементарною диз'юнкцією.*

Звідси випливає, що $(x_0 + x_2 + \bar{x}_3), (x_0 + \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$, *й* $(x_0 + x_1 + \bar{x}_0)$ – елементарні дизюнкції. Аналогічно до попереднього $F^0 = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee ... \vee x_{i_r}$ – елементарна диз’юнкція рангу *r*.

Означення 26. *Якщо яку-небудь функцію задано формулою у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій, то функцію задано її кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).*

Наприклад:

$$f(x) = (x_0 + x_2 + \bar{x}_3)(x_0 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_0 + x_3)$$

Будь-яка перемикальна функція може бути задана і своєю довершеною кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ). Для цього використовується поняття конституенти нуля – макстерму.

Означення 27. *Конституентою нуля (макстермом) називають перемикальну функцію n аргументів, яка набуває значення 0 тільки в одному наборі. Існує* 2^n *конституент нуля. Згідно табл. 3 конституентами нуля є* f_2, f_3, f_4, f_7 *для* $n = 2$.

Конституенти нуля можна виразити у вигляді диз'юнкцій аргументів, частина з яких береться від'ємними.

Твердження 3. *Будь-яка таблично задана функція алгебри логіки може бути подана в аналітичній формі*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = F_1^0 \wedge F_2^0 \wedge ... \wedge F_l^0 = \mathop{\wedge}_{i=0}^{l} (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + ... + \tilde{x}_i),$$

де $\wedge$ *– символ узагальненої диз 'юнкції, а* $\tilde{x}_i$ *– це* x_i *або* $\bar{x}_i$ $(i = 1, ..., n)$.

Досконалою КНФ перемикальної функції називається кон'юнкція тих конституент нуля, які перетворюються на нуль в тих самих кортежах (наборах) значень аргументів, що й задана функція.

Іншим означенням ДКНФ є таке.

Означення 28. *ДКНФ перемикальної функції називається її КНФ, що задовольняє такі умови:*

•*в ній немає двох однакових співмножників;*

•*жоден зі співмножників не містить двох однакових доданків;*

•*жоден зі співмножників не містить якої-небудь змінної разом з її запереченням;*

•*кожен співмножник містить як складову* x_i *або* $\bar{x}_i$ *для будь-якого* $i = 1, 2, ..., n$.

Властивості досконалих форм

Це такі властивості:

-будь-яка кон'юнктивна або диз'юнктивна нормальна форма не дає однозначного подання функції, яке буде тільки при досконалих нормальних формах (ДДНФ і ДКНФ);

- у ДДНФ (ДКНФ) немає двох однакових мінтермів (макстермів);

- у ДДНФ (ДКНФ) жоден із мінтермів (макстермів) не містить двох однакових співмножників (змінних);

- ДДНФ (ДКНФ) жоден із мінтермів (макстермів) не містить разом зі змінною її заперечення

Теорема 7. *Будь-яка функція алгебри логіки, крім абсолютно істинної й абсолютно хибної функцій, може бути подана в ДКНФ і ДДНФ:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathop{\wedge}_{0} (\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee ... \vee \tilde{x}_n) - \text{ДКНФ};$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathop{\vee}_{1} (\tilde{x}_1 \wedge \tilde{x}_2 \wedge ... \wedge \tilde{x}_n) - \text{ДДНФ},$$

де $\wedge$ *і* $\vee$ *– символи узагальненої кон'юнкції та диз'юнкції конституент нуля й одиниці відповідно, а* $\tilde{x}_1$ *– це* x_i *або* $\bar{x}_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$.

Наприклад,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underset{1}{\vee}(0,2,4,7) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Спростити вираз $xyz + \bar{x}yz + \overline{xyz} + \bar{x}y\bar{z}$.
2. Знайти δ-двійники формул:

   a) $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=[(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (x_3 \to x_1)] \wedge (x_4 \to (x_1 \leftrightarrow x_3))$

   $\delta_1=(1,0,0,0)$, $\delta_2=(1,1,1,0)$;

   b) $F(x_1, x_2, x_3, x_4)=[(x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_3 \leftrightarrow x_4)] \downarrow [(x_3 \wedge x_4) \to (x_2 \mid x_1)]$

   $\delta_1=(1,1,1,0)$, $\delta_2=(0,0,1,1)$.
3. Реалізувати наступні формули:

   $F_1=(x_1 \wedge x_2) \to x_1$

   $F_2=(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2))$;

   $F_3=[(x_1 \vee \overline{x_2}) \to (x_1 \wedge x_2)] \leftrightarrow (\overline{x_1} \to x_2)$.
4. Знайти формули, рівносильні даним:

   a) $\overline{x \wedge y \vee z} \to \bar{y} \wedge x$;

   b) $\overline{x \wedge \overline{y \vee z}} \leftrightarrow x \wedge z$;

   c) $x \wedge y \to \bar{x} \wedge \overline{z \vee y} \leftrightarrow \overline{z \vee \overline{y \wedge x}}$.
5. Показати, що дана формула є загальнозначущою:

   $\overline{xy \vee \bar{z}x} \wedge x\bar{y}z \to \bar{x}\ \bar{y} \vee \overline{xzy}$.
6. Знайти ДДНФ для формул:

   a) $\bar{x}\ \bar{y} \vee z \vee x\bar{z}$;

   b) $xy \vee \bar{z}\ \bar{y} \vee \bar{x}$.
7. Знайти одну з ДНФ для формул:

   a) $\overline{x\bar{z} \vee y\bar{x}} \to xyz \vee \overline{\bar{x}\ \bar{y}}$;

   b) $\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x} \wedge \bar{z} \wedge \bar{y} \leftrightarrow \bar{z} \wedge \bar{y} \vee \bar{x}$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Довести, що система {функція Шиффера $\overline{x_1 x_2}$ } є повною.
2. Довести, що система {функція стрілка Пірса-Вебба $\overline{x_1 + x_2}$ } є повною.
3. Довести тотожність $(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge x_3$.
4. Перевірити справедливість рівності $x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \overline{x_2} = x_1$.
5. Перевірити справедливість законів де Моргана.
6. Довести істинність асоціативних та комутативних законів.
7. Довести, що число булевих функцій від n змінних, серед яких k фіктивних, дорівнює $2^{2^{n-k}}$.

ВІДНОШЕННЯ

Поняття та основні властивості відношень

В означенні множини вказується на те, що елементи множини можуть знаходитися в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин. Визначимо поняття відношення. Взагалі відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. Відношення між парами об'єктів називаються бінарними (двійковими).

Приклади бінарних відношень:

- відношення належності;
- включення множин;
- рівність дійсних чисел;
- нерівності (натуральних, дійсних чисел);
- бути братом;
- ділитися на яке-небудь натуральне число;
- входити до складу якого-небудь колективу.

Для будь-якого бінарного відношення можна записати відповідне йому співвідношення. Для наведених відношень це наприклад:

- $a \in A$;
- $A \subset B$;
- $a = b;\ a,\ b \in K.$:
- $a > b;\ a,.\ b \in N$;
- Іван – брат Петра;
- 4 ділиться на 2;
- Чернов – староста групи 1ПР.

Загалом відношення записується у вигляді співвідношень xAy (строгого означення відношення ми ще не дали), де A – відношення, яке встановлює зв'язок між елементом $x \in X$ і елементом $y \in X$. Зрозуміло, що відношення повністю визначається множиною всіх пар елементів (x, y), для яких воно справджується. Тому будь-яке бінарне відношення можна розглядати як множину впорядкованих пар (x, y), тобто можна дати таке означення бінарного відношення.

Означення 1. *Бінарним відношенням A, що діє з множини X у множину Y називається деяка підмножина* $X \times Y$ $(A \in X \times Y)$.

Отже, бінарне відношення встановлює відповідність елементів множини X елементам множини Y. Зрозуміло, що співвідношення xAy можна записати у вигляді $(x,y) \subset A$, де $A \subset X \times Y$. Наприклад, $3 < 7$ еквівалентно $(3, 7) \in$ «<» (але не можна записати $(7, 3) \in$ «<»).

Елемент x називають першою координатою, а елемент y другою координатою впорядкованої пари. $D_0\ (A)$ — множина перших координат— називається областю визначення (лівою областю), відношення $D_3\ (A)$ – множина других координат – називається областю значень (правою областю) відношення A. Якщо $x \in X$, $y \in Y$, тоді $D_0\ (A) \subset X$, $D_3\ (A) \subset Y$. У таких випадках кажуть, що A є відношенням від X до Y. Його називають також відповідністю та позначають $X \to Y$. Якщо $Y = X$, то будь-яке відношення $A: X \to Y$ є підмножиною $X \times Y$ і називається відношенням в X.

Приклад. $X = \{2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$.

Нехай A – відношення «бути дільником» від X до Y. Тоді $A = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$. Відношення В – « = » від X до Y: $B = \{(3, 3)\}$; відношення C – «>» від X до Y: $C = \varnothing$. $D_0(F) = \{2,3\} = X$, $D_3(F) = \{3, 4, 6\} \subset Y$.

Якщо $D_0(A) = X$, то кажуть, що відношення A задано на X.

Очевидно, що для відношення включення підмножин деякого універсуму U: $D_0(U) = D_3(U) = P(U)$, де $P(U)$ – множина всіх підмножин універсаму U.

Цікавими є такі окремі випадки відношень в X:

1. Повне (універсальне) відношення $P = X \times X$, яке справджується для будь-якої пари (x_i, x_j) елементів з X. Наприклад, P – відношення «вчитися в одній групі» у множині X, де X – множина студентів групи 1ПР1.

2. Тотожне (діагональне) відношення E, що виконується тільки між елементом і ним самим. Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.

3. Порожнє відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з X. Наприклад, A — відношення «бути братом» у множині X, де X – множина жінок.

Означення 2. *Розглянемо відношення $A \subset X \times Y$. Нехай елемент $x_i \in X$. Перерізом відношення A за елементом x_i називається множина елементів y з Y, для яких пара $(x_i, y) \in A$:*

$$A(x_i) = \{y \in Y \mid (x_i, y) \in A\}$$

Множину всіх перерізів відношення A називають фактором-множиною множини Y за відношенням A і позначають Y/A. Вона повністю визначає відношення A.

Приклад. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Відношення $A = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$.

Очевидно $A(x_1) = \{y_1, y_3\}$. Випишемо перерізи за всіма елементами множини X у такому вигляді:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_1, y_2, y_4\}$	$y_3\}$	$\{y_2, y_4\}$

Об‘єднання множин другого рядка утворять фактор-множину *Y/A*. Об‘єднання перерізів за елементами деякої підмножини $B\subset X$ є перерізом $A(B)$ відношення A за підмножиною B, тобто:

$$A(B)=\bigcup_{x\in B} A(x).$$

Так для $B = \{ x_2, x_3\}$ маємо $A\ (B) = \{ y_1, y_2, y_3, y_4\} = A\ (x_2) \cup A\ (x_3)$.

Подання бінарних відношень за допомогою матриці та графа. З попереднього зрозуміло, що відношення може бути подане за допомогою фактора-множини. Розглянемо ще два способи подання скінченого бінарного відношення: за допомогою матриці й графа.

Матричний спосіб ґрунтується на поданні відношення $A\subset X\times Y$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де стовпці – перші координати, а рядки – другі, причому на перетині i-го стовпця j-го рядка буде 1, якщо виконується співвідношення x_iAy_j, або 0 – якщо воно не виконується.

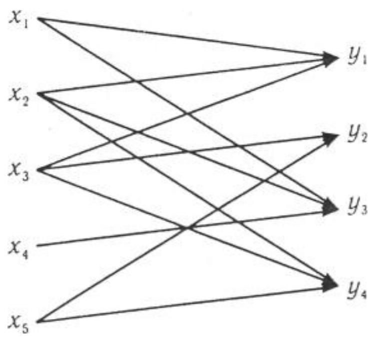
Приклад. Для наведеного у попередньому прикладі відношення матриця має такий вигляд:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1					
2					
3					
4					

Матриця повного відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць; матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі; матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

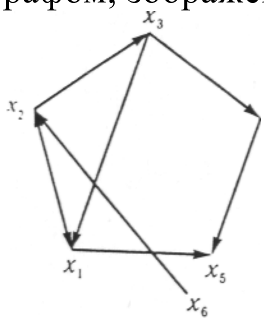
Відношення можна також зображати за допомогою орієнтованого графа. Його вершини відповідають елементам множин X та Y, а дуга, спрямована від вершини x_i до y_j означає, що співвідношення x_iAy_j виконується.

Приклад. Граф відношення, наведеного у попередньому прикладі має вигляд, показаний на рисунку.

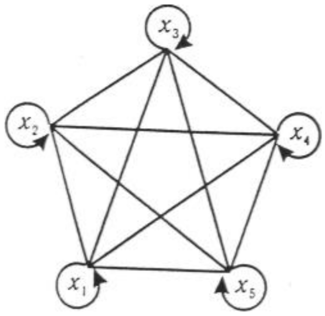


Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в X зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо x_iAx_i й x_iAx_j, то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню $x_j\,A\,x_j$ відповідає петля.

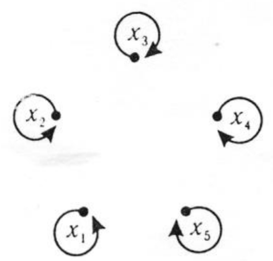
Приклад. Бінарне відношення $A = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_6, x_2)\}$ подається графом, зображеним на рисунку.



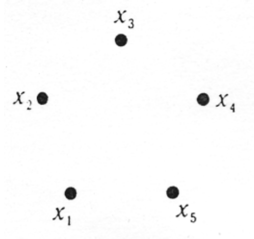
Граф повного відношення $A = X \times X$, де $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$:



Граф діагонального відношення:



Граф порожнього відношення:



Симетричне відношення. Оскільки відношення – це множина, над ним можуть виконуватися всі теоретико-множинні операції. Крім того, виділяються специфічні для відношень операції: обернення (симетризація) і композиція.

***Означення 3**. Відношення, симетричне (обернене) деякому відношенню $A \subset X \times Y$, позначається A^{-1} і є підмножиною множини $Y \times X$ утвореною тими парами $(y, x) \in X \times Y$, для яких $(y, x) \in A$.*

Перехід від A до A^{-1} здійснюється взаємною перестановкою координат кожної впорядкованої пари. Наприклад, відношення A – «x дільник y» має обернене до нього A^{-1} – «y кратне x». Для наведеного вище відношення A обернене відношення $A^{-1} = \{(4, 2), (6, 2), (3, 3), (6, 3)\}$.

При переході від A до A^{-1} область визначення стає областю значень і навпаки. Матриця A^{-1} – це транспонована матриця відношення A.

Граф оберненого відношення A^{-1} утворюється із графа відношення A заміною всіх дуг на протилежні.

Композиція відношень. Нехай дано три множини X, Y, Z та два відношення $A \subset X \times Y$, $B \subset Y \times Z$.

***Означення 4.** Композиція відношень A і B є відношенням C, що складається з усіх тих пар $(y, x) \in X \times Z$, для яких існує таке $y \in Y$, що $(x, y) \in A$ і $(y, z) \in B$. Будемо позначати композицію відношень символом* о.

Тоді $BoA = C = \{(x,z) \in X \times Z \colon \exists\, y \in Y\, ((x, y) \in A \wedge (y,z) \in B)\}$

Можна легко показати, що переріз відношення C за x збігається з перерізом відношення B за підмножиною $A(x) \subset Y$, тобто $C(x) = B(A(x))$.

Щодо властивостей композиції можна зазначити таке:

- $BoA \neq AoB$, тобто не виконується закон комутативності;
- $Do(BoA) = (DoB)oA = DoBoA$, тобто виконується закон асоціативності;
- $(BoA)^{-1} = A^{-1}oB^{-1}$.

Подання композиції відношень матрицями та графами.

***Твердження 1.** Матриця композиції відношень $C = BoA$ утворюється як добуток матриць відношень B й A з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.*

Справді, елемент c_{ik} матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць *B* та *A* (відповідно до правила множення матриць):

$$c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k} + \ldots + b_{in}a_{nk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{jk}$$

Очевидно, така сума відмінна від нуля тоді й тільки тоді, коли хоча б один доданок відмінний від нуля, тобто дорівнює одиниці:

$$b_{ij}a_{jk} = 1 \Leftrightarrow b_{ij} = 1 \wedge a_{jk} = 1 \Leftrightarrow y_jBz_i \wedge x_kAy_j \Leftrightarrow x_kB\text{o}Az_i$$

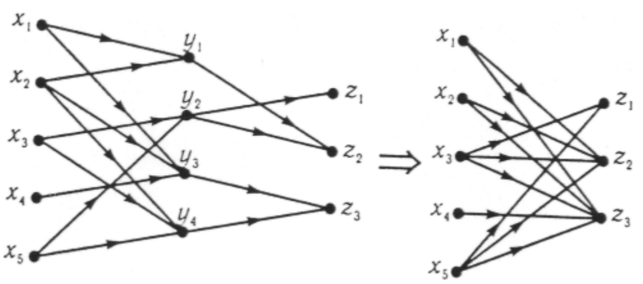
Якщо у виразі c_{jk} не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню x_k $B\text{o}Az_i$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Приклад. Для композиції відношень *A* та *B* із попереднього прикладу матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

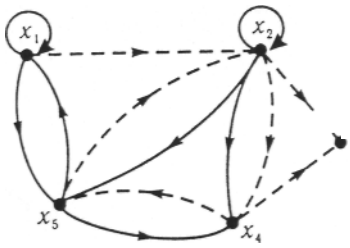
Нехай $A \subset X \times Y$, $B \subset Y \times Z$. Щоб побудувати граф $C = B\text{o}A$, потрібно до графа відношення *A* добудувати граф відношення *B*. Граф відношення дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини *Y*. При вилученні вершини y_i кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини *X* до вершин множини *Z*, замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Побудуємо граф композиції для першого прикладу:

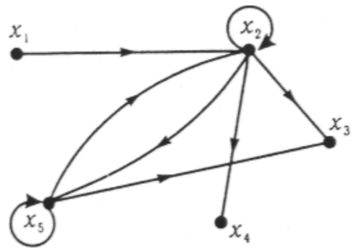


Якщо *A* і *B* — відношення в *X*, то графи цих відношень та граф композиції $C = B\text{o}A$ будуються на множині *X* за загальним правилом.

Приклади: 1.Побудуємо, наприклад, граф композиції для відношення $A=\{(x_1, x_1), (x_1, x_5), (x_2, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_5, x_1), (x_5, x_4)\}$ (на рис. *а* йому відповідають суцільні лінії) і відношення $B=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_5, x_2)\}$ (на рис. *а* йому відповідають штрихові лінії). Граф композиції зображено на рис. *б*.



а



б

2.Знайдемо матрицю композиції відношень A та B із попереднього прикладу:

$A=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	1	0	0	1
x_5	1	1	0	0	0

$B=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0
x_2	1	0	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0

$B\times A=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0	1
x_3	0	1	0	0	1
x_4	0	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0	1

Властивості відношень. Нехай A – бінарне відношення у множині $X(A\subset X\times X)$. Тоді відношення A є:

– рефлексивним, якщо $E \subset A$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall\ x \in X\ (xAx)$). Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності (≤, ≥) на N, Z й R;

– антирефлексинним, якщо $A \cap E = \varnothing$, тобто якщо співвідношення x_iAx_j виконується, то $x_i \neq x_j$. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на N, Z та R, відношення «бути старшим» у множині людей;

– симетричним, якщо $A = A^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення x_iAx_j виконується співвідношення x_jAx_i. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення «бути братом» у множині людей;

– асиметричним, якщо $A \cap A^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень x_iAx_j і x_jAx_i, щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення «бути батьком» у множині людей, відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне;

– антисиметричним, якщо $A \cap A^{-1} \subset E$, тобто обидва співвідношення $x_i A x_j$ і $x_j A x_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $x_i = x_j$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність (≤, ≥) на N, Z та $R;$

– транзитивним, якщо $A \circ A \subset A$, тобто з виконання співвідношень $x_i A x_j$ і $x_j A x_k$ випливає виконання співвідношення $x_i A x_k$. Як приклад можна навести відношення «бути дільником» у Z, «бути старшим» у множині людей.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці, а матриця антирефлексивного відношення – тим, що зазначені елементи є нулями. Зауважимо, що симетричність відношення спричинює також симетричність матриці. Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли $a_{ji} = 1$ й $a_{kj} = 1$, то $a_{ki} = 1$, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивності матриці.

Граф рефлексивного відношення характеризується тим, що петлі є у всіх вершинах, граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

Для симетричного відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами). У графа асиметричного відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов‘язані тільки однією спрямованою дугою.

У разі антисиметричного відношення можуть бути петлі, але зв‘язок між вершинами, якщо він є, також відображається тільки однією спрямованою дугою.

Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цієї сукупності в напрямку шляху. Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають графом редукції (або кістяковим графом). Наприклад, граф редукції на п'яти вершинах має такий вигляд:

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5$$

Бінарні (двомісні) відношення, що розглядаються, є окремим випадком n-місних відношень при $n = 2$.

Багатомісні відношення. n -місним є відношення $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \}$,де $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається n-вимірним вектором, кортежем або просто впорядкованою n-кою. Можна також визначити n-місне відношення за індукцією. За означенням бінарне відношення – це множина впорядкованих пар (x_1, x_2), де $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Впорядкована трійка (x_1, x_2, x_3) може розглядатися як упорядкована пара $((x_1, x_2), x_3)$, де перша координата

(x_1, x_2) є впорядкованою парою, причому $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, і т. д. І, нарешті, n-вимірний вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може розглядатися як упорядкована пара $((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$.

Як приклади тримісного (тернарного) відношення можна навести всі арифметичні операції над числами (в них виділяється перший операнд, другий операнд і результат операції), а також відношення між батьками й дітьми, впорядкована трійка в яких – це батько, мати, дитина.

Пропорція $x/y = z/u$ ілюструє чотиримісне відношення.

Функціональне відношення. Відношення $f \subset X \times Y$ називається функціональним, якщо його елементи (впорядковані пари) мають різні перші координати: $\forall x \in D_0(f)\ \exists! y((x, y) \in f))$. Іншими словами, кожному $x \in X$: $(x, y) \in f$ відповідає один і тільки один елемент $y \in Y$. Очевидно, для функціонального відношення A кожний переріз за будь-яким $x \in X$ містить не більш як один елемент. Якщо $x \notin D_0(f)$, то переріз за x – порожній.

Якщо $D_0(f) = X$, то функціональне відношення f називається всюди визначеним. Матриця функціонального відношення містить у кожному стовпці не більш як один одиничний елемент, а його граф характеризується тим, що з кожної вершини може виходити тільки одна дуга (враховуючи й петлі).

Приклад. Розглянемо множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Відношення $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_5, y_3), (x_6, y_1)\}$, очевидно, є функціональним. Для множин $X = \{1, 2, 3, 4\}$ й $Y = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ відношення $B = \{(1, 1)\ (2, 4)\ (3, 9)\ (4, 16)\}$ також є функціональним.

Функції та відображення. Усяке функціональне відношення можна розглядати як функцію. При цьому перша координата x упорядкованої пари $(x, y) \in A$ є прообразом (аргументом, змінною), а друга y – образом (значенням). Це можна записати як $y = f(x)$ чи xfy або $(x,y) \in f$. (Усі три записи є еквівалентними).

Потрібно розрізняти функцію f як множину впорядкованих пар (відношення) і значення функції $y = f(x)$ як другу координату однієї з таких пар.

Слід зазначити, що відношення, обернене до функціонального, загалом не є функціональним. У розглянутому вище прикладі відношення A є функціональним, але симетричне йому відношення $A^{-1} = \{(y_1, x_1), (y_1, x_3), (y_1, x_6), (y_2, x_2), (y_3, x_5)\}$ не є функціональним.

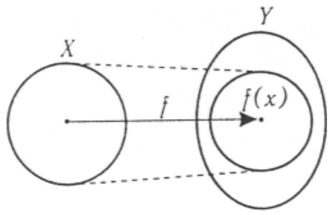
Якщо функціональне відношення $f \subset X \times Y$ всюди визначено на $X (D_0(f) = X)$, то його називають відображенням множини X в Y і записують $X \rightarrow Y$.

Відображення можна також розглядати як функцію f, визначену на множині X, але яка набуває значень на множині Y.

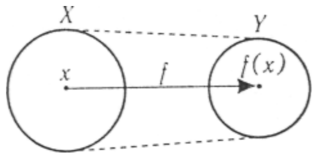
Очевидно, що відмінність між відображенням та функцією зводиться до способу означення цих відношень на множині X, причому відображення потрібно розглядати як окремий випадок функції. Більшість математиків не розрізняють поняття відображення і функції. Вони записують $f : X \rightarrow Y$ або $x \rightarrow f(x)$.

Типи відображень. При відображенні X в Y кожний елемент x з X має один і тільки один образ ($\forall x \in X\ \exists!\ y \in Y\ (y = f(x))$).

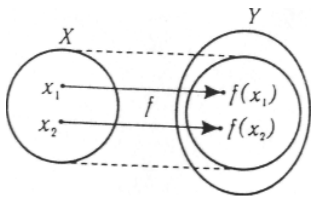
Однак зовсім не обов'язково, щоб кожний елемент з Y був образом деякого елемента з X. Графічно цю ситуацію можна зобразити так, як показано на малюнку:



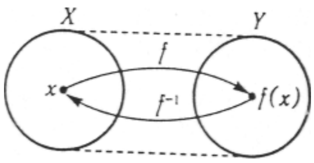
Якщо ж будь-який елемент з Y є образом принаймні одного елемента з X, то кажуть, що множина X відображується на Y (явище сюр'єкції, або накриття). Цю ситуацію зображено на малюнку:



Якщо для будь-яких двох різних елементів x_1 й x_2 з X їх образи $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ також різні, то відображення f називається ін'єкцією, або ін'єктивним відображенням. Цю ситуацію показано малюнку:



Відображення, яке є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним, називається бієкцією (накладанням). У цьому випадку кажуть, що між елементами X й Y існує взаємно однозначна відповідність:



При цьому виникає питання, чи є обернене відношення f також взаємно однозначним.

Будь-яке відображення f із X в Y є елементом множини $P(X \times Y)$.

Якщо f – взаємно однозначне відображення, а $X = Y$, то f: $X \to X$ називається відображенням множини X на себе. Елементи $(x, x) \in X \times X$ утворюють тотожне відображення E, причому $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$.

Образи і прообрази. Загалом при відображенні f: $X \to Y$ елемент із Y може бути образом не одного, а кількох елементів із X. Так, для розглянутого вище прикладу відношення елемент y_1 є образом для елементів x_1, x_3, x_6.

Сукупність усіх елементів, образом яких є заданий елемент у, називається повним прообразом елемента y і позначається $f^{-1}(y)$. У наведеному прикладі $f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_3, x_6\}$.

Сукупність елементів $f(x)$, які є образами всіх елементів множини X, називається образом цієї множини та позначається $f(X)$.

Нехай $R \subset Y$. Сукупність усіх елементів із X, образи яких належать R, називається повним прообразом множини R і позначається $(f^{-1}(R))$.

Основні властивості відображень. Їх чотири.

1. Повний прообраз об'єднання дорівнює об'єднанню повних прообразів, тобто $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

2. Повний прообраз перерізу дорівнює перерізу повних прообразів, тобто $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

3. Образ об'єднання дорівнює об'єднанню образів, тобто

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

4. Образ перерізу є підмножиною перерізу образів, тобто

$$F(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Композиція відображень. Якщо f: $X \to Y$, q: $Y \to Z$, то їх композиція $(q\text{o}f)$:$X \to Z$, причому $(q\text{o}f)(x) = q(f(x))$. Наприклад, якщо $f = \sin$, $q = \ln$, то $(q\text{o}f)(x) = (\ln \text{o} \sin)(x) = \ln(\sin(x)) = \ln \sin x$.

Теорема 1. *Функція f є взаємно однозначним функціональним відношенням тоді й тільки тоді, коли f^{-1} – взаємно однозначне функціональне відношення.*

<u>Доведення</u>. Доведемо, що f^{-1} – функція. Нехай $(y, x_1) \in f^{-1}$, $(y, x_2) \in f^{-1}$. За означенням оберненого відношення маємо $(x_1, y) \in f$, $(x_2, y) \in f$. Оскільки f за умовою є взаємно однозначною функцією, дістаємо $x_1 = x_2$, а це означає, що f^{-1} – функціональне відношення. Покажемо, що f^{-1} – взаємно однозначне функціональне відношення. Нехай $(y_1, x) \in f^{-1}$ й $(y_2, x) \in f^{-1}$. Це означає, що $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$. Оскільки f – функція, маємо $y_1 = y_2$, а це означає, що f^{-1} є взаємно однозначним функціональним відношенням. Таким чином, необхідну умову теореми доведено.

***Теорема 2**. Композиція двох функціональних відношень є функціональним відношенням.*

<u>Доведення</u>. Нехай f:$A \to B$, а q: $B \to C$. За означенням композиції відношень $h = q\text{o}f = \{(a, c) \mid ((a, b) \in f \wedge (b, c) \in q)\}$. Отже, це за означенням – підмножина декартового добутку $A \times C$.

Доведемо, що h – функціональне відношення. Нехай задано дві пари, які належать h:

$$\begin{cases} (a, c_1) \in h \Rightarrow \exists b_1 \in B((a, b_1) \in f \wedge (b_1, c_1) \in q); \\ (a, c_2) \in h \Rightarrow \exists b_2 \in B((a, b_2) \in f \wedge (b_2, c_2) \in q). \end{cases}$$

Оскільки f – функціональне відношення, маємо $b_1 = b_2$, а оскільки q – функціональне відношення, дістаємо $c_1 = c_2$; отже, h – функціональне відношення.

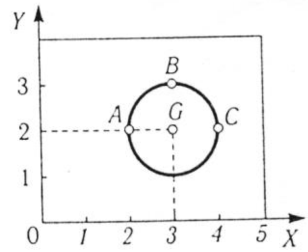
Для багатомісних функцій f: $A^m \to B$, g: $B^n \to C$ можливими є різні варіанти підстановки f у g, які дають функції різних типів. Наприклад, при $m = 3$, $n=4$ функція $h_1 = g\ (x_1,\ f(y_1,\ y_2,\ y_3),\ x_3,\ x_4)$ має шість аргументів і діє з $B\times A^3\times B^2 \to C$, а функція $h_2 = g\ (f(y_1,\ y_2,\ y_3),\ f(z_1,\ z_2,\ z_3),\ x_3,\ x_4)$ має вісім аргументів та діє з $A^6\times B^2 \to C$. Особливо цікавим є випадок, коли задано множину функцій типу f_1: $A^{m_1} \to A$, $A^{m_2} \to A$, ..., $A^{m_n} \to A$. У цьому разі може бути виконане будь-яке перейменування аргументів, наприклад перейменування x_3 в x_2, що породжує з функції $f\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функцію трьох аргументів $f\,(x_1, x_2, x_2, x_4)$.

Означення 5. *Функція, що утворюється з функцій f_1, f_2, ..., f_n деякою підстановкою їх одна в одну і перейменуванням аргументів, називається суперпозицією f_1, f_2, ..., f_n.*

Приклади: 1. У функції $f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2, + 7x_3$ перейменування x_3 в x_2 приводить до функції $f_1\ (x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_2 = f_2\ (x_1,\ x_2) = x_1 + 9x_2$. Перейменування x_1 та x_3 в x_2, приводить до одномісної функції $f_3(x_2) = 10x_2$.

2. Елементарною функцією в математичному аналізі називається кожна функція f, що є суперпозицією фіксованого (тобто незалежного від значень аргументів f) числа арифметичних функцій, а також функцій e^x, $\log x$, $\sin x$, $\arcsin x$. Наприклад, функція $\log^2(x_1 + x_2) + 3\ \sin\sin\ x_1 + x_3$ – елементарна, оскільки є результатом кількох послідовних суперпозицій $x_1 + x_2$, x^2, $\log x$, $3x$, $\sin x$.

3. Коло одиничного радіуса з центром у точці G (3,2) (дивись малюнок),



тобто множина пар дійсних чисел $(x,\ y)$, які задовольняють співвідношення $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 1$, задає відношення між віссю абсцис і віссю ординат (тобто R та R). Образом числа 4 при цьому є однина 2, образом відрізка [2, 3] – відрізок [1, 3] на осі ординат, цей же відрізок [I, 3] є образом відрізка [3, 4] на осі абсцис. Задане відношення (або відповідність) не є функціональним. Прикладом функціональних відношень між дійсними числами на малюнку слугує дуга ABC.

Ще раз нагадаємо, що для задання відповідності треба зазначити не тільки множину G, а й множини A та B, тобто вказати, підмножиною якого прямого добутку є G. У цьому прикладі коло G задає також інша відповідність: між відрізком [2, 4] і відрізком [1, 3]. При цьому деякі властивості відповідності $G \subset R^2$ та $G \subset [2, 4]\times[l, 3]$ різняться: наприклад, друга відповідність на відміну від першої всюди визначена і сюр'єктивна.

Враховуючи ці співвідношення, слід би задавати відповідність як трійку множин *(G, A, B)*. Тоді не довелося б обмовлятися, що одне коло може задавати дві відповідності, це й так було б зрозуміло з відмінності трійок (*G, R, R)* та (*G*, [1, 4], [1, 3]). Проте такі застереження доводиться робити рідко: або множини *A* і *B* є зрозумілими з контексту, або відмінності в їх виборі не впливають на властивості відповідності, які досліджуються.

4. Англо-російський словник установлює відповідність між множиною англійських та російських слів. Ця відповідність не є функціональною (оскільки одному англійському слову, як правило, ставляться у відповідність кілька російських слів): крім того, вона практично ніколи не є повністю визначеною: завжди можна знайти англійське слово, що не міститься в цьому словнику.

5. Позиція на шахівниці є взаємно однозначною відповідністю між множиною фігур, які залишилися на дошці, та множиною зайнятих ними полів.

6. Різні види кодування (кодування літер Морзе, подання чисел *у* різних системах числення, секретні шифри, вхідні й вихідні номери в діловій переписці тощо) є відповідністю між об'єктами, що кодуються, і кодами, що присвоюються їм. Ця відповідність, як правило, має всі властивості взаємно однозначної відповідності, крім, може бути, однієї – сюр'єктивності. Єдність образу та прообразу в кодуванні гарантує однозначність шифрування і дешифрування. Відсутність сюр'єктивності означає, що не кожний код має значення, тобто відповідає якому-небудь об'єкту. Наприклад, кодування телефонів м. Києва семизначними номерами не є сюр'єктивним, оскільки деякі семизначні номери не відповідають жодним телефонам.

7. Усяка нумерація зліченної множини є її відображенням на N.

8. Функція $f(x)=\sqrt{x}$ є неповністю визначеною, якщо її тип $N \to N$ і повністю визначеною, якщо її тип $N \to R$ або $R_+ \to R$ (R_+–додатна підмножина R).

9. Функція $\sin x$ має тип $R \to R$. Відрізок [-π/2, π/2] вона взаємно однозначно відображає на відрізок [-1, 1]. Тому на відрізку [-1, 1] для неї існує обернена функція $\arcsin x$.

10. Вище наводилися приклади кодувальних функцій, які кожному об‘єкту зі своєї області значень ставлять у відповідність деякий код. Для кодувальної функції оберненою буде декодувальна функція, яка кожному коду ставить у відповідність закодований ним об'єкт. Якщо кодувальна функція не є сюр‘єктивною, то декодувальна функція не є всюди визначеною.

11. Функції $\sin x$ та $\sqrt{x}$ мають тип $R \to R$, тобто відображають одну й ту саму множину в себе. Тому їх композиція можлива в довільному порядку і дає функції $\sin\sqrt{x}$ та $\sqrt{\sin(x)}$. Зазначимо, що області визначення їх різні: першу функцію визначено на додатній півосі, другу – на множині відрізків $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким чином, область визначення композиції може бути вужчою від областей визначення обох початкових функцій і навіть виявитися порожньою.

12. Множина $K = \{k_1, ..., k_m\}$ команд ЕОМ відображається в машинні коди цієї ЕОМ, тобто в натуральні числа. Кодувальна функція φ має тип $K \to N$. За допомогою суперпозиції цієї функції та арифметичних функцій стають можливими арифметичні дії над командами (які самі по собі числами не є!), тобто $\varphi(k_1) + \varphi(k_2)$, $\varphi(k_1) + 4$ і т. д.

13. У функції $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_3$ перейменування x_3 в x_1 приводить до функції $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_1$, що є функцією двох аргументів $f_2(x_1, x_2) = 8x_1 + 2x_2$. Перейменування x_2 й x_3 в x_1 приводить до одномісної функції $f_2(x_1) = 10x_1$.

14. Кожне натуральне число n єдиним способом розкладається на добуток простих чисел (простих дільників цього числа). Тому якщо домовитися розташовувати прості дільники n у певному порядку (наприклад, у порядку неспадання), то матимемо функцію $q(n)$ типу $N \to \bigcup_{i=1}^{\infty} N^{I}$, яка відображає N у множину векторів довільної довжини. Наприклад, $q(42) = (2, 3, 7)$, $q(23) = (23)$, $q(100) = (2, 2, 5, 5)$. Це відображення не є сюр'єктивним, оскільки в область значень q не входять вектори, для компонент яких не виконується умова неспадання. а також вектори з непростими компонентами.

Відношення еквівалентності

Відношення еквівалентності є експлікацією (перекладом інтуїтивних уявлень у ранг строгих математичних понять) таких слів, як «подібність», «нерозрізненість», «взаємозамінність», «рівносильність».

Бінарне відношення в множині X називається відношенням еквівалентності (позначається «~»), якщо виконуються такі властивості:

- рефлексивність ($x \sim x$);
- симетричність ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$);
- транзитивність ($x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$).

Найважливіше значення відношення еквівалентності полягає в тому, що воно задає ознаку для розбиття множини X на неперервні підмножини. Наведемо приклади відношень еквівалентності.

1. «Проживати в одному будинку» у множині людей.

2. «Подібність трикутників» у множині всіх трикутників на площині.

3. «Паралельність прямих» у множині всіх прямих на площині. Називатимемо класом еквівалентності елемента a множину всіх елементів множини X, які еквівалентні елементу a: $[a]_\sim = \{x \in X \mid a \sim x\}$.

Твердження 2. $a \in [a]_\sim$.

Це твердження природно випливає із рефлексивності відношення еквівалентності.

Твердження 3. $a \sim b \Leftrightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$

Необхідність доведемо від супротивного: нехай $A = [a]_{\sim} \neq B = [b]_{\sim}$. Оскільки множини A і B не є рівними, існує елемент c такий, що:

1) $c \in A \wedge c \notin B$ або 2) $c \in B \wedge c \notin A$.

Розглянемо перший випадок: $c \in A \Rightarrow a \sim c$. За умови $a \sim b$ та за властивістю симетричності $b \sim a$. Оскільки відношення еквівалентності транзитивне, маємо $b \sim a \wedge a \sim c \Rightarrow b \sim c$, тобто $c \in [b]_{\sim}$, що суперечить умові. Другий випадок доводиться аналогічно.

Доведемо достатність від супротивного: нехай a не є еквівалентним b, тобто ці елементи не можуть належати одному класу еквівалентності, що суперечить умові $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$. Одержана суперечність доводить твердження.

Теорема 3. *Якщо на множині X задано відношення еквівалентності, то воно задає розбиття множини і це розбиття – єдине.*

<u>Доведення</u>. Нехай на множині X задано відношення еквівалентності. Розглянемо сукупність усіх класів еквівалентності $\{[x]_{\sim}\}$, які можуть бути утворені. Доведемо, що:

1. $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_{\sim} = X$
2. $\forall x, y \in X$: $[x]_{\sim} \neq [y]_{\sim}$ $([x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \varnothing)$.

Спочатку доведемо п. 1. Розглянемо будь-який $x_1 \in \bigcup [x]_{\sim}$.

Якщо x_1 належить об'єднанню класів еквівалентності, то цей елемент є хоча б в одному класі з цього об'єднання, тобто існує $y \in X$ таке, що $x_1 \in [y]$, а за означенням класу еквівалентності $x_1 \in X$. Отже,

$$\bigcup_{x \in X} [x]_{\sim} \subset X.$$

Розглянемо будь-який елемент $x_1 \in X$. За твердженням $x_1 \in [x_1]_{\sim}$. Це означає, що він належить також об'єднанню класів еквівалентності $x_1 \in \bigcup\limits_{x \in X} [x]_{\sim}$, тобто $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} [x]_{\sim}$

За теоремою про рівність множин $X = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_{\sim}$.

П. 2 доведемо від супротивного: нехай є два класи еквівалентності $[x]_{\sim}$ і $[y]_{\sim}$, які не збігаються та переріз яких не порожній: $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = C \neq \varnothing$. Тоді знайдеться елемент $z \in C$. Це означає, що $z \in [x]_{\sim}$ і $z \in [y]_{\sim}$. За означенням класів еквівалентності $z \sim x$ та $z \sim y$. Із симетричності й транзитивності відношення еквівалентності випливає, що $x \sim y$, а за попереднім твердженням це означає, що $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$, тобто суперечить припущенню. Одержана суперечність доводить п. 2.

Таким чином, доведено, що класи еквівалентності утворюють розбиття множини X. Залишилось довести єдиність такого розбиття. Припустимо супротивне: розбиття не єдине. Нехай за заданим відношенням еквівалентності існують два різних розбиття R_1 й R_2, ($R_1 \neq R_2$). Це означає, що є така точка $x \in X$, яка належить деякому класу розбиття $[y_1]_{\sim}$ в R_1 та $[y_2]_{\sim}$ в R_2, ($[y_1]_{\sim} \neq [y_2]_{\sim}$) Оскільки $x \in [y_1]\sim$, маємо $y_1 \sim x$, а оскільки $x \in [y_2]_{\sim}$, дістаємо $y_1 \sim x$.

Внаслідок симетричності й транзитивності відношення еквівалентності $y_1 \sim y_2$; за твердженням 4.2 це означає, що ($[y_1]\sim = [y_2]\sim$, а це суперечить умові ($[y_1]\sim \neq [y_2]\sim$. Одержана суперечність доводить єдиність розбиття.

Аналогічно можна довести твердження, обернене до цієї теореми, про те, що коли на множині означено розбиття, то воно задає деяке відношення еквівалентності, внаслідок чого класи (елементи) розбиття є класами еквівалентності.

Доведемо це. Нехай існує розбиття R множини X на підмножини X_i $(i = \overline{1,n})$ тобто

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X;$$

$\forall i \neq j \ (X_i \cap X_j \neq \varnothing)$.

Введемо відношення

$x\rho y \Leftrightarrow \exists\, X_i \ (x, y \in X_i)$.

Тоді:

– рефлексивність ($x\rho y$) очевидна;

– симетричність ($x\rho y \Leftrightarrow y\rho x$) очевидна, тому що

$x, y \in X_i \Leftrightarrow y, x \in X_i$

– транзитивність ($x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$) доведемо від супротивного.

Нехай $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow \exists\, X_j \ (y, z \in X_j)$ й $X_i \neq X_j$ $(i \neq j)$; тоді $X_i \cap X_j \neq \varnothing$, що суперечить умові.

Усі елементи, які належать деякому класу X_i розбиття $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ множини X, пов'язані між собою відношенням еквівалентності. Вони взаємозамінні в тому сенсі, що будь-який з цих елементів задає клас, тобто може слугувати його представником (еталоном).

***Означення 6**. Підмножина X множини X, що містить один і тільки один елемент із кожного класу деякого розбиття, називають системою представників відповідного відношення еквівалентності.*

Відношення порядку

***Означення 7.** Бінарне відношення в матриці X називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно:*

- *рефлексивне* $(\forall x \in D_0(\sigma)(x\sigma x))$;
- *асиметричне* $(\forall x, y \in D_0(\sigma)(x\sigma y \wedge y\sigma x \Rightarrow x = y))$;
- *транзитивне* $(\forall x, y, z \in D_0(\sigma)(x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow x\sigma z))$.

Часто відношення σ позначають “$\leq$” ,оскільки нестрога нерівність є прикладом відношення нестрогого порядку в множині Z або R, що найчастіше використовується (як і „$\geq$”), але ототожнювати їх усе ж не варто. Як приклад відношення нестрогого порядку в множині людей можна назвати відношення «бути не старшим» або «бути не молодшим».

Означення 8. *Бінарне відношення ρ в множині X називається відношенням строгого порядку, якщо воно:*

- *асиметричне* $(\forall x, y \in D_0(\rho)(x\rho y \Rightarrow y\rho x))$;
- *транзитивне* $(\forall x, y, z \in D_0(\rho)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z))$.

Як приклад відношення строгого порядку можна навести відношення « > » або « < » у множинах *N*, *Z* чи *R*, а також відношення „бути молодшими” або «бути старшим» у множині людей.

Якщо виконується співвідношення $x\rho y$ (або $x\sigma y$), то кажуть, що елемент x передує y, а y іде за x.

Множина, в якій визначено відношення порядку (строгого або нестрогого), називається впорядкованою, і кажуть, що порядок уведено цим відношенням.

Означення 9. *Множина М називається абсолютно (лінійно) впорядкованою, якщо для будь-яких двох її елементів х та у виконується* $x\sigma y$ *або* $y\sigma x$ *(*$x\rho y$ *або* $y\rho x$*).*

Наприклад, множина дійсних чисел *R* з відношенням порядку «≤» (або «≥», « < », « > ») є абсолютно впорядкованою.

Може виявитися, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x\sigma y$ або $y\sigma x$ ($x\rho y$ або $y\rho x$) не виконується. Такі елементи x та y називаються незрівнянними. У цьому випадку кажуть, що множина є частково впорядкованою.

Приклад. Розглянемо відношення включення множин на множині всіх підмножин деякого універсуму $P(U)$. Оскільки для нього виконуються властивості:

• рефлексивності, тому що $(\forall X \in P(U)(X \subset X))$;

• асиметричності $(X \subset Y \wedge Y \subset X \Rightarrow X = Y)$ (за теоремою рівності множин);

• транзитивності $(X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z)$, яку доведено вище, відношення включення множин є відношенням нестрогого порядку і $P(U)$ є впорядкованою множиною.

Проте очевидно, що серед усіляких підмножин U знайдуться такі множини X й $У$, що ні $X \subset У$, ні $У \subset X$ не виконуються. Отже, $P(U)$ з відношенням нестрогого порядку ”$\subset$” є частково впорядкованою множиною.

Як ілюстрацію відношення лінійного порядку можна навести також відношення старшинства на множині офіцерських звань: лейтенант, старший лейтенант, капітан, майор, підполковник, полковник, генерал, маршал. Очевидно, що на заданій множині виконується відношення «бути молодшим за званням», яке описується співвідношенням «x є молодшим за званням, ніж y». Зазначимо, що співвідношення «бути молодшим за віком» на цій множині, взагалі кажучи, не збігається із заданим відношенням (наприклад, генерал може бути молодшим за полковника або одного з ним віку). Отже, оскільки побудоване відношення є транзитивним і симетричним, це відношення строгого порядку. Крім того, воно виконується для будь-яких елементів множини, які розглядаються. Отже, цей порядок є лінійним.

Вагові функції. Нехай $f: X \to R$ є відображенням, заданим на множині X. Це означає, що кожному елементу $x \in X$ відповідає деяке дійсне число $y = f(x)$, яке називається вагою. Відображення f при цьому має назву вагової функції.

Іноді поняття ваги збігається з буквальним значенням цього слова (наприклад, маса деталі), а іноді ні (це може бути будь-яка числова характеристика об'єкта, наприклад опір резистора, об'єм тіла, площа геометричної фігури).

Теорема 4. *Якщо відображення $f: X \to R$ ін'єктивне, то на множині X можна встановити абсолютно строгий порядок.*

Доведення. Задамо на множині X відношення $\rho: x\rho y$, якщо в R справджується $f(x) < f(y)$. Покажемо, що це відношення є асиметричним і транзитивним.

Для будь-яких двох x й y, для яких виконується співвідношення $x \rho y$, маємо $f(x) < f(y)$, тобто нерівності $f(y) > f(x)$ не може бути; тому маємо $y \rho x$. Отже, введене відношення ρ – асиметричне.

Для будь-яких трьох елементів $x, y, z \in X$, для яких $x\rho y \wedge y\rho z$, це означає $f(x) < f(y) \wedge f(y) < f(z)$ внаслідок транзитивності відношення «<» $f(x) < f(z)$, тобто $x \rho y$. Отже, введене відношення ρ – транзитивне.

Таким чином, доведено, що введене відношення ρ є відношенням строгого порядку. Покажемо, що множина X з уведеним відношенням строгого порядку ρ є абсолютно впорядкованою. Розглянемо будь-які два елементи $x, y \in X (x \neq y)$. Внаслідок того, що $x \neq y$, а відображення f взаємно однозначне, виконується нерівність $f(x) < f(y)$ або $f(y) < f(x)$. Це означає, що справджується відношення $x\rho y$ або $y\rho x$. Отже, будь-які два елементи множини X порівнянні, а тому множина X абсолютно (лінійно) впорядкованою.

Прикладом абсолютно впорядкованої множини з відношенням строгого порядку, заданим ваговою функцією, може бути множина елементів періодичної системи Менделєєва.

Квазіпорядок. Якщо відображення $f: X \to R$ не взаємно однозначне (не ін'єктивне), то для двох різних елементів $x, y \in X$ може виконуватись рівність $f(x) = f(y)$. Тому абсолютно строгий порядок задати на множині X не можна. Водночас якщо об'єднати в окремі класи $X_i, i = 1,2,...,$ елементи, вага яких однакова, то матимемо розбиття множини X на класи еквівалентності.

Тепер можна говорити про впорядкування сукупності класів еквівалентності $\{X_1, X_2, ...\}$ за їхніми представниками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...,$ де $\alpha_i \in X_i$. Оскільки система представників не містить однакових елементів, у цій системі можна задати абсолютно строгий порядок: $\alpha_i \rho \alpha_j \Leftrightarrow f(\alpha_i) < f(\alpha_j)$.

Таке впорядкування ототожнює елементи множини X, які належать одному й тому самому класу еквівалентності, і задає на цій множині квазіпорядок (майже порядок). Також кажуть, що строгий порядок на множині класів еквівалентності $\{X_1, X_2, ...\}$ множини X індукує квазіпорядок на цій множині.

Якщо на множині X введений квазіпорядок, то класи еквівалентності множини X, на яких вагова функція набуває фіксованих значень, називаються областями рівня.

Приклад. Для порівняння комплексних чисел $z = a + bi$ не підходять звичні відношення порядку($<, \leq, \geq, >$). Однак можна ввести квазіпорядок A за правилом $z_k A z_n$, якщо $a_k = a_n$.

При цьому різні комплексні числа з однаковими дійсними частинами об'єднуються в класи еквівалентності, множина яких може бути впорядкована за їхніми представниками.

Структура впорядкованих множин. Нехай A – відношення порядку на множині X, а $X_1 \subset X$ (під A розуміють або σ, або ρ).

Означення 10*. Мажорантою (верхньою межею, верхньою гранню) підмножини X_1 називають такий елемент $m \in X$, що для будь-якого елемента $q \in X_1$ справджується відношення qAm.*

Мінорантою (нижньою межею, нижньою гранню) підмножиш X_1 називають такий елемент $n \in X$, що для будь-якого елемента $q \in X_1$ справджується відношення nAq.

Окремо розглянемо випадок, коли $X_1 = X$ й $A = \rho$. Тоді мажорантою множини X називається такий елемент $m \in X$, що для будь-якого елемента $q \in X \setminus \{m\}$ справджується відношення $q\rho m$, а мінорантою множини X – такий елемент $n \in X$, що для будь-якого елемента $q \in X \setminus \{n\}$ справджується відношення $n\rho q$.

Якщо мажоранта $m \in X_1$, то m називають максимальним елементом X_1 (позначають max(X_1)).

Якщо міноранта $n \in X_1$, то n називають мінімальним елементом X_1 (позначають min(X_1)).

Твердження 4. *Якщо максимальний елемент існує, то він єдиний.*

Доведемо твердження від супротивного: нехай існує два максимальних елементи $m_1 = \max(X_1)$ й $m_2 = \max(X_1)$. Однак тоді $m_2 A m_1$ суперечить тому, що m_2 – максимальний елемент, а $m_1 A m_2$ – тому, що m_1 – максимальний елемент. Одержані суперечності доводять твердження.

Аналогічно доводиться єдиність мінімального елемента підмножини X_1, якшо він існує.

Підмножина $X_1 \subset X$ може мати кілька мажорант і мінорант. Якщо множина мажорант M_1 підмножини $X_1 \subset X$ має мінімальний елемент $\min(M_1)$, то він називається точною верхньою межею підмножини X_1 та позначається $\sup(X_1)$ (скорочено від supremum). Якщо множина мінорант M_2, підмножини X_1 має максимальний елемент $\max(M_2)$, то він називається точною нижньою межею підмножини X_1 і позначається $\inf(X_1)$ (скорочено від infimum).

Матриця відношення нестрогого порядку. Оскільки відношення нестрогого порядку є рефлексивним, головна діагональ матриці цього відношення містить одиниці. Через те, що воно є асиметричним, жоден одиничний елемент не має симетричного собі відносно головної діагоналі. Оскільки це відношення є транзитивним, наявність одиниць на перетині i-го стовпця j-го рядка й одиниці на перетині j-го стовпця і k-го рядка спричинює наявність одиниці на перетині i-го стовпця та k-го рядка.

Приклад ω. Для відношення нестрогого порядку A = «бути дільником» на множині X= {1,2,3,4} й Y={1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84} матриці мають такий вигляд:

$A \subset X \times X =$

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

$A \subset Y \times Y =$

	1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
14	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
21	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
28	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
42	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Матриця відношення строгого порядку. Матриця відношення строгого порядку будується аналогічно матриці нестрогого порядку і різниться тільки наявністю нулів на головній діагоналі (внаслідок властивості антирефлексивності).

Приклад. Для відношення строгого порядку « > » на множині X = {1, 2, 3, 4, 5} матриця має вигляд

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Граф відношення нестрогого порядку. Внаслідок виконання властивостей рефлексивності, асиметричності та транзитивності граф відношення нестрогого порядку характеризується тим, що в кожній його вершині існує петля, жодна пара вершин не пов'язана дугами протилежного напрямку, а всі його вершини будь-якого шляху попарно пов'язані між собою дугами в напрямку цього шляху. Як звичайно, граф транзитивного відношення будемо зображати графом редукції.

Приклад. Як приклад для побудови графа відношення нестрогого порядку розглянемо відношення з прикладу ω. На рис. 1 зображено його граф редукції з петлями.

Граф відношення строгого порядку. Граф відношення строгого порядку будується аналогічно графу нестрогого порядку і різнитися тільки відсутністю петель.

Приклади: 1. Для побудови графа строгого порядку скористаємося прикладом наведеної вище матриці. Граф відношення строгого порядку « > » на множині X= {1,2,3, 4, 5} має вигляд, показаний на рис. 2, *а*. Його граф редукції зображено на рис. 2, б.

2. Розглянемо ще раз відношення нестрогого порядку A з прикладу ω, граф якого показано на рис. 1. Нехай X_1={4,6,14,28,42} – підмножина множини X. Тоді множина мажорант – {84}, множина мінорант – {1,2}. Мінімального й максимального елементів у множині X_1, немає; тому

$\sup(X_1)=84$, $\inf(X_1)=2$.

Для $X_1=X$ множина мажорант – {84}, множина мінорант – {1}, $\max(X)=84$, $\min(X)=1$, $\sup(X)=84$, $\inf(X)=1$.

Означення 11. *Відношення* τ *на множині X, що задовольняє властивості рефлексивності* $\forall x \in X\,(x\tau x)$ *та симетричності* $\forall x,y(x\tau y \Leftrightarrow y\tau x)$, *називається відношенням толерантності.*

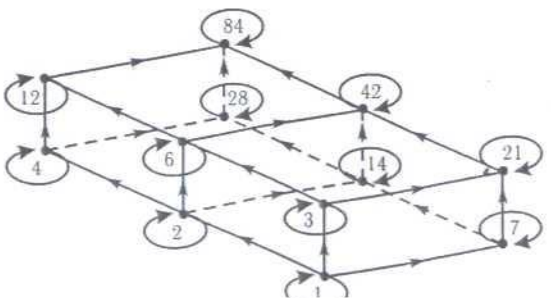


Рис. 1

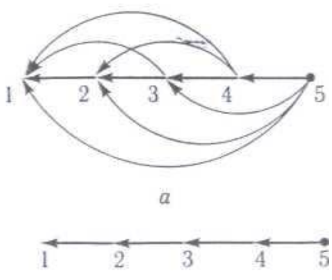


Рис. 2

Приклади: 1. Як приклад відношення толерантності можна навести відношення «відстань між двома точками не перевищує деякого заданого числа a». Це означає, що толерантними є будь-які дві точки, відстань між якими не перевищує a (очевидно, що це – відношення толерантності).

Як застосування цього відношення можна запропонувати моделювання зорового органа, для якого в межах гостроти зору точки є невиразними між собою.

2. Між чотирилітерними словами можна встановити відношення толерантності, якщо вони різняться не більш як однією літерою. Як розважальний приклад у цьому випадку можна навести такий ланцюжок толерантних російських слів:

муха – мура –тура – тара – кара – каре – кафе – кафр – каюр – каюк – крюк – крок – срок – сток – стон – слон.

3. На множині кортежів (векторів) $X=\{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ толерантність можна задати різними способами, наприклад обумовити наявність у парі кортежів хоча б однієї загальної компоненти. Компонентами кортежу можуть бути будь-які об'єкти. Якщо вони набувають цілочислового значення від 0 до m-1, то кортеж можна розглядати як n-розрядне число, записане в системі числення з основою m.

Наприклад, кортеж (9,3,0,4,5,8) – це десяткове число 930458. Кількість усіх таких кортежів дорівнює m^n. При m=2 маємо двійковий кортеж, його компоненти набувають значення 0 і 1. Для кожного кортежу $(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$ існує тільки один нетолерантний йому кортеж $(1- x_1,1- x_2,1- x_3,\ldots,1- x_n)$.

Відношення рівнопотужності. Потужність множин

Означення 12. *Множина A рівнопотужна множині B (потужність множини A дорівнює потужності множини B), якщо існує взаємно однозначна відповідність (бієкція) множини A на множину B. Цей факт записують як $A \sim B$ або $|A|=|B|$.*

Розглянемо множину натуральних чисел N та її підмножини $N_k=\{1,2, 3,...,k\}$. Множина A, рівнопотужна підмножині натурального ряду N_k, називається скінченою, а k – потужністю множини, або її кардинальним числом. Для скінченої множини частіше вживається термін «кількість елементів». Записується цей факт як $|A|=k$.

Відношення рівнопотужності має такі властивості:

- рефлексивності ($A \sim A$), що очевидно;
- симетричності ($A\sim B \leftrightarrow B\sim A$) – випливає з того, що відображення, обернене до взаємно однозначного, також є взаємно однозначним;
- транзитивності ($A\sim B \wedge B\sim C \leftrightarrow A\sim C$) – випливає з того, що композиція двох взаємно однозначних відображень також взаємно

однозначна.

Таким чином, відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності (часто називається відношенням кардинальної еквівалентності) й індукує розбиття множини всіх множин на неперерізні класи однакових за потужністю множин.

Розглянемо сім'ю скінчених множин A_i , $i= 1,...,n$.

Твердження 5. *Якщо* $|A_1|=m_1$, $|A_2|=m_2$ $,...,|A_n|=m_n$, *то* $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n|$.

Доводиться твердження за методом індукції. Справді, при n=1 воно є правильним. Припустимо, що це твердження є правильним при $n=k$ і доведемо його при $n=k+1$. Для цього кожному кортежу $\tilde{a}_k$ з $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ припишемо праворуч елемент з A_{k+1}. Оскільки $|A_{k+1}|= m_{k+1}$, для кожного кортежу $\tilde{a}_k$ це можна зробити m_{k+1} способом. Кортеж $\tilde{a}_k$ з $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ можна вибрати $m_1 \times m_2 \times ... \times m_k$ способами. Таким чином, всього є $m_1 \times m_2 \times ... \times m_{k+1}$ кортежів, що й треба було довести.

Наслідок. *Якщо* $A_i = A$ $\forall i = \overline{1,n}$, *то* $|A^n|= |A|^n$.

Теорема 5. *Якщо* $|A|=n$, *то* $|P(A)| = 2^n$.

<u>Доведення.</u> Занумеруємо елементи множини A натуральними числами 1,2,..., n, тобто $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, і розглянемо множину B_n усіх двійкових кортежів завдовжки n. Кожній підмножині $A^* \subset A$ поставимо у відповідність кортеж $(v_1, v_2,...,v_n) \in B_n$ таким чином:

$$v_i = \begin{cases} 0, якщо.a_i \notin A^* \\ 1, якщо.a_i \in A^* \end{cases}$$

При цьому порожній підмножині $\varnothing \subset A$ відповідатиме кортеж (0,0,…, 0), а множині $A \subset A$ —кортеж (1,1,..., 1). Очевидно, що ми дістали відображення і воно є бієктивним. Отже, $|P(A)|=|B_n|$.

Оскільки $B_n=B^n$, де $B=\{0,1\}$ —двоелементна множина, $|B_n|=|B|^n=2^n$, що й треба було довести.

Властивості скінчених множин. Їх три:

1.Переріз скінченого числа скінчених множин є скінченим.

2.Об'єднання скінченого числа скінчених множин – скінчене, причому $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| \le \sum_{i=1}^{m} |A_i|$.

3. Декартів добуток скінченого числа скінчених множин є скінченим.

Множини, що не є скінченими, називаються нескінченними.

Нескінчена множина, рівнопотужна множині натуральних чисел N, називається зчисленною, її потужність (або кардинальне число) дорівнює $\aleph_0$ (алеф-нуль).

Властивості зчисленних множин. Їх чотири:

I. *Будь-яка підмножина зчисленної множини – скінчена або зчисленна.*

Справді, будь-яка підмножина зчисленної множини – або скінчена, або нескінчена. Нехай нескінченою є множина $N' \subset N$.

Виберемо в N' найменший елемент і позначимо його n_1; в N'-$\{n_1\}$ такий елемент позначимо n_2, найменший елемент в N'-$\{n_1, n_2\}$ позначимо n_3 тощо. Оскільки для кожного натурального числа маємо тільки скінчену множину менших натуральних чисел, будь-який елемент N' рано чи пізно матиме свій номер. Ця нумерація, тобто відображення (n_i,i), і є взаємно однозначним відображенням між N' та N.

Тому часто зчисленною називають множину, рівнопотужну натуральному ряду або будь-якій його нескінченій підмножині.

2. *Об'єднання скінченого числа зчисленних множин є зчисленним.* Справді, перенумеруємо спочатку всі перші елементи множин A_1, A_2, A_k, потім – усі другі тощо.

3. *Об'єднання зчисленного числа скінчених множин є зчисленним.* Справді, спочатку нумеруються всі елементи першої множини, потім – усі елементи другої множини тощо.

З останнього твердження випливає, що множина всіх слів у будь-якому скінченому алфавіті – зчисленна. Менш очевидно, що зчисленним є об'єднання зчисленної множини зчисленних множин. Прикладом такого об'єднання може бути множина всіх векторів із натуральними компонентами.

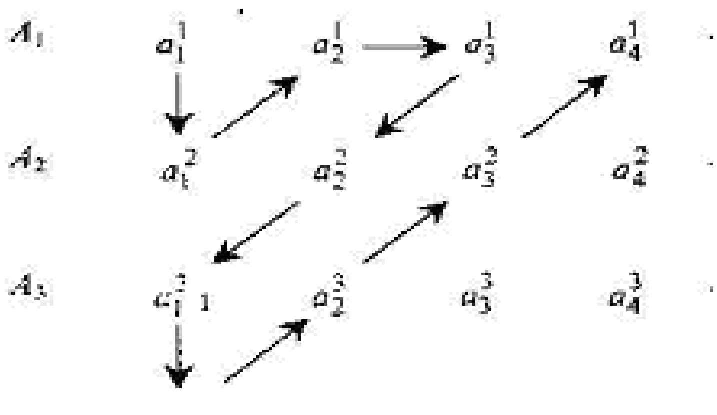
4. *Об'єднання зчисленного числа зчисленних множин є зчисленним.*

Справді, нехай існує деяке зчисленне число зчисленних множин. Оскільки множин – зчисленне число, занумеруємо їх $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Через те що кожна множина є зчисленною, занумеруємо елементи цих множин і розташуємо у порядку зростання їхніх номерів для множини

$$A_i(a^i_1, a^i_2, a^i_3, \ldots).$$

У підсумку матимемо елементи всіх зчисленних множин у своєму розпорядженні і застосуємо канторівську нумерацію:



Очевидно, ця нумерація забезпечує бієкцію об'єднання зчисленного числа зчисленних множин на N. Отже, воно є зчисленне, що й треба було довести.

Очевидно, для доведення властивостей 2 та 3 також можна застосувати канторівську нумерацію або відразу вважати ці властивості наслідками властивості 4.

Із властивості 4 випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Об'єднання всіх скінчених підмножин зчисленної множини – зчисленна множина.*

Наслідок 2. *Декартів добуток скінченого числа зчисленних множин – зчисленне.*

Теорема 6 (теорема Кантора). *Множина всіх дійсних чисел відрізка* [*0,1*] *не є зчисленною.*

Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що задана множина є зчисленною й існує її нумерація. Розташуємо всі числа, зображені нескінченими десятковими дробами, у порядку цієї нумерації:

$$\begin{array}{ccccc} 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \end{array}$$

Розглянемо будь-який нескінченний дріб $0,b_1b_2b_3\ldots$ такий, що $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}$ тощо. Цей дріб не може ввійти у вказану послідовність, оскільки від першого числа він відрізняється першою цифрою, від другого – другою тощо. Отже, всі числа з відрізка [0, 1] не можуть бути пронумеровані, так що множина всіх дійсних чисел відрізка [0, 1] є незчисленною. Її потужність називається континуумом; множини такої потужності називаються континуальними. Метод, використаний при доведенні цієї теореми, називається діагональним методом Кантора. Потужність незчисленної множини дорівнює $\aleph_1$, (алеф-один).

Наслідок. *Будь-який відрізок дійсної осі має потужність континуум.*

Теорем 7. *Множина правильних дробів має потужність континуум*.

Доведення цієї теореми, ґрунтується на поданні дійсних чисел відрізка [0, 1] у вигляді двійкових дробів. Будь-яке дійсне число *а*, що лежить на відрізку [0, 1], можна записати у вигляді

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \ldots, \qquad (1)$$

де $\alpha_i = 0$ або 1, тобто подати у двійковій системі числення аналогічно тому, як подають його в більш звичній десятковій системі. Запишемо скорочено

$$\alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots \qquad (2)$$

Слід зазначити, що раціональне число вигляду $\frac{p}{2^k}$ можна записати у вигляді двійкового дробу двома способами: або з нулем, або з одиницею в періоді.

Наприклад, для дробу 3/4 маємо:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+...=0{,}1100...;$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...=0{,}10111....$$

Якщо не користуватися записом, що містить одиницю в періоді, то кожне число $\alpha\in[0,1]$ однозначно подається у вигляді двійкового дробу (2), тобто множина правильних двійкових дробів рівнопотужна множині дійсних чисел на відрізку [0, 1] і має потужність континуум, що й треба було довести.

Теорема 8. *Множина всіх підмножин зчисленної множини є незчисленною.*

Для доведення скористаємося тим самим методом, що й при доведенні властивості 3 зчисленних множин.

Нехай A – зчисленна множина. Занумеруємо елементи множини $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$ і поставимо у відповідність кожній підмножині $A^*\subset A$ двійковий дріб $\{0,\nu_1,\nu_2,...\}$, де

$$\nu_i=\begin{cases}1, \textit{якщо елемент } a_i\in A^*;\\ 0, \textit{якщо елемент } a_i\notin A^*\end{cases}$$

Маємо взаємно однозначну відповідність (бієкцію) між множиною всіх підмножин зчисленної множини A та множиною правильних двійкових дробів, яка є незчисленною.

Теорема 9. *Об'єднання нескінченої множини зі зчисленною – рівнопотужне початковій множині.*

Справді, якщо початкова нескінчена множина є зчисленною, то об'єднання її з іншою зчисленою множиною – зчисленне (властивість 2 зчисленних множин). Якщо початкова нескінчена множина є незчисленною, то об'єднання її зі зчисленною множиною, очевидно, не змінить його потужності.

Наслідок. *Множина, утворена внаслідок вилучення з нескінченої множини елементів зчисленної – рівнопотужна початковій.*

Парадокс Кантора. Одна з основних трудностей полягає в тому, що навіть із множин, точність опису яких не викликає сумнівів, за допомогою начебто цілком законних засобів можна сконструювати описи множин, що приводять до суперечностей, «парадоксів теорії множин». Як приклад можна назвати «множину всіх множин». За означенням вона повинна містити всі мислимі множини і мати максимальну потужність. Однак вона сама міститься в множині своїх підмножин як елемент.

За допомогою методу, аналогічного діагональному методу Кантора, можна довести, що для множини будь-якої потужності множина всіх її підмножин має вищу потужність (як було показано вище для скінчених і зчисленних множин), тобто не існує множини максимальної потужності. Парадокс Кантора якраз і полягає в тому, що «множина всіх множин» повинна мати максимальну потужність, а це суперечить результатам теорії множин.

Завдання для самостійної роботи

1. Прикладом якого відношення є відношення „проживати в одному будинку” на множині жителів міста?
2. Навести приклади бінарних відношень.
3. Навести приклад розбиття, яке індукує відношення еквівалентності „вчитися в одній групі”, задане на множині всіх студентів ЗакДУ.
4. Навести приклад розбиття, яке індукує відношення рівності на множині цілих чисел.
5. Навести приклади відношення толерантності.
6. Чи існує множина всіх множин?

Завдання для індивідуальної роботи

1. Довести тотожність $(B\circ A)^{-1}=A^{-1}\circ B^{-1}$.
2. Побудувати матрицю відношення строгого порядку для множини $X=\{4,5,6,7,8,9\}$.
3. Побудувати граф відношення строгого порядку для множини з завдання 2.
4. Довести, що $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.
5. Нехай $Q=\{(m,n) \mid m,n \in N \wedge m=n^2\}$. Які властивості має відношення Q?
6. Довести, що коли бінарне відношення R на A:

   а) симетричне, то $R=R^{-1}$;

   б) рефлексивне і транзитивне, то $R^2=R$.
7. Показати, що відношення $\subseteq$ для множин є відношенням часткового порядку.

Література

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, 1986.
2. Методичні вказівки до курсу «Основи дискретної математики», УжДІЕП, 1997р.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов, Санкт-Петербург, 2001.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики, Высшая школа, 1992.
5. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки, Радянська школа, Київ, 1977.
6. Капітонова Ю.В. та ін. Основи дискретної математики, Наукова думка, Київ, 2002.
7. Бардачов Ю.М. Дискретна математика, Вища школа, Київ, 2002.
8. Василенко Ю.А., Копча-Горячкіна Г.Е. Основи дискретної математики. Методичні рекомендації до курсу, частина І, Видавництво ЗакДУ,2002.

Зміст