УДК 512.64+519.17

В. М. Бондаренко (Інститут математики НАН України),
В. А. Лісикевич (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РЕБЕРНО-ЛОКАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ТІТСА НЕСЕРІЙНИХ ДІАГРАМ ДИНКІНА

In this paper one describes P-defining polynomials for edges of the non-serial Dynkin diagrams and diameters of the corresponding edge-weighted graphs (with respect to P-limiting numbers).

У цій роботі описано P-визначальні поліноми для ребер несерійних діаграм Динкіна та діаметри відповідних зважених графів (відносно P-граничних чисел).

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач теорії зображень. У 1972 р. П. Габріель [1] ввів цілочислову квадратичну форму для сагайдаків (орієнтованих графів), назвавши її квадратичною формою Тітса, і показав, що сагайдак має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса є додатною або, іншими словами, коли сагайдак є неперетинним об'єднанням орієнтованих графів Динкіна (діаграм Динкіна з будь-яким напрямком стрілок). Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням квадратичних форм для різних об'єктів. У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] показав, що частково впорядкована множина має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли її форма Тітса (яка вводиться аналогічним чином) є слабо додатною (тобто додатною на множині векторів з невід'ємними координатами). Вивчалися також квадратичні форми Тітса і для більш широких класів матричних задач.

У роботі [3] почали вивчатися локальні деформації квадратичних форм, названі пізніше поточково-локальними [4]; див. також подальші роботи [5] – [7]. Інший тип локальних деформацій, введений в [4], називається реберно-локальними деформаціями. У ряді робіт такі деформації вивчалися для додатних квадратичних форм Тітса частково впорядкованих множин (див., напр., [8], [9]).

У цій роботі вивчаються реберно-локальні деформації для додатних квадратичних форм Тітса неорієнтованих графів.

1. Основні поняття. Нехай

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \tag{1}$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j)\neq(p,q)} f_{ij} z_i z_j, \tag{2}$$

де p і q ($p < q$) такі, що $f_{pq} \neq 0$, а t — параметр, що пробігає поле $\mathbb{R}$.

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми* (1) *відносно* $z_p z_q$.

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *(p, q)-им P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$*, якщо $f(z, a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа a існує число c таке, що $f(z, c)$ є додатною квадратичною формою.

У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує два (p, q)-их P-граничних числа. Поліном $\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t - b_1)(t - b_2)$, де b_1 і b_2 — ці P-граничні числа, називається *P-визначальним поліномом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *P-визначальним (p, q)-поліномом квадратичної форми $f(z)$*. Якщо до того ж коефіцієнти квадратичної форми $f(z)$ є раціональними, то її P-визначальні поліноми також мають раціональні коефіцієнти. Тоді кожному P-визначальному поліному природним чином відповідає цілочисловий поліном зі взаємно простими коефіцієнтами (в сукупності) і додатнім коефіцієнтом при старшому члені (який отримується із P-визначального полінома множенням його на деяке натуральне число). Він називається *цілочисловим P-визначальним поліномом.*

Відносно всіх цих означень і тверджень див. роботу [4].

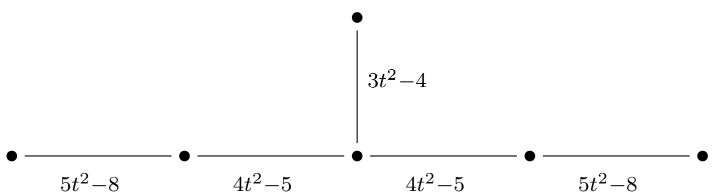
2. Основний результат. Нехай $Q = (Q_0, Q_1)$ — (скінченний) неорієнтований граф з множиною вершин Q_0 та множиною ребер Q_1. Для наших цілей достатньо вважати, що граф не має петель і кратних ребер. Вважаємо також, що $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ребро між точками i і j будемо позначати через (i, j), ототожнюючи звичайно (i, j) і (j, i). Квадратичною формою Тітса графа $Q = (Q_0, Q_1)$ (згідно [1]) називається цілочислова квадратична форма $q_Q(z) = q_Q(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, яка задається наступною рівністю:

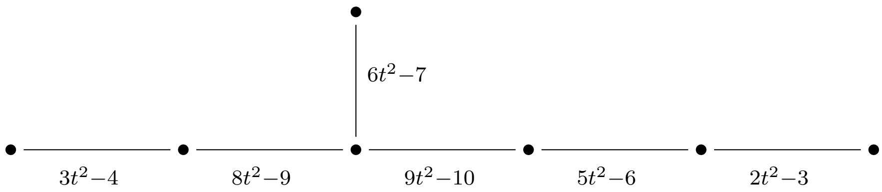
$$q_Q = q_Q(z) = q_Q(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{(i,j) \in Q_1, i<j} z_i z_j.$$

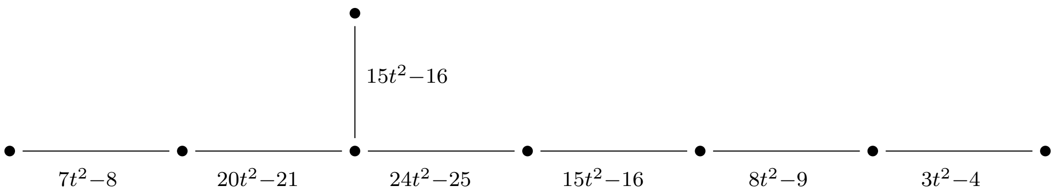
Із результатів роботи [1] маємо, що квадратична форма Тітса графа Q додатна тоді і лише тоді, коли Q є неперетинним об'єднанням діаграм Динкіна (якщо граф має петлі або кратні ребра, то введена аналогічним чином квадратична форма Тітса не буде додатною).

Ми розглядаємо задачу про опис P-визначальних поліномів вигляду $\Delta_{q_Q}^{(i,j)}$, $(i, j) \in Q_1$, квадратичної форми Тітса $q_Q = q_S(z)$ для несерійних діаграм Динкіна, тобто для діаграм E_6, E_7, E_8. У випадку $i, j \in Q_0, (i, j) \in Q_1$ замість "(цілочисловий) P-визначальний поліном квадратичної форми Тітса $q_Q(z)$ для $z_i z_j$" будемо говорити "(цілочисловий) P-визначальний поліном графа Q для ребра (i, j)". Аналогічно і для P-граничних чисел.

Теорема 1. *Цілочислові P-визначальні поліноми для несерійних діаграм Динкіна E_6, E_7, E_8 є наступними:*







Доведення цієї теореми приведено в п. 3.

У п. 4 пояснюється, чому в усіх цілочислових P-визначальних поліномах (степеня 2), які вказані в теоремі 1, відсутній середній член.

У п. 5 несерійні діаграми Динкіна вивчаються як зважені графи, ваги ребер яких визначаються P-граничними числами.

3. Доведення теореми 1. Ми будемо користуватися критерієм Сільвестра.

Елементарне перетворення з рядками матриці, яке полягає в додаванні до i-го рядка j-го рядка, помноженого на дійсне число x, будемо позначати через $[i] + x \cdot [j]$.

Вершини діаграми Динкіна E_n, $n \in \{6, 7, 8\}$, будемо позначати числами $1, 2, \ldots, n-1$ (вершини нижнього ланцюга зліва направо) і n (верхня вершина).

Нехай (i, j) — ребро графа E_n. Помножена на 2 матриця квадратичної форми $q_{E_n}^{(i,j)}(z, t)$ — це (згідно означення матриці довільної квадратичної форми) симетрична матриця розміру $n \times n$ вигляду

$$M_n^{(i,j)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & * & \ldots & * & * \\ * & 2 & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \ldots & 2 & * \\ * & * & \ldots & * & 2 \end{pmatrix},$$

де на місцях (i, j) і (j, i) стоїть параметр t, а на решті місць (s, k), $s \neq k$, стоїть -1 або 0 в залежності від того, є ребро (s, k) чи ні. Зауважимо, що матриця $M_n^{(i,j)}(t)$ при $t = 1$ дорівнює помноженій на 2 матриці M_n квадратичної форми Тітса $q_{E_n}(z)$ графа E_n. Оскільки E_n — граф з додатною формою Тітса, то за критерієм Сільвестра всі симетричні мінори матриці $M_n^{(i,j)}(1)$ (тобто її головні мінори, а також головні мінори будь-якої матриці, яка отримана з матриці $M_n^{(i,j)}(1)$ однаковою перестановкою рядків та стовпців) є додатними. Переставимо (однаковим чином) рядки і стопці матриці $M_n^{(i,j)}(t)$ так, щоб i-ий і j-ий рядки стали відповідно $n-1$-им і n-им (а значить аналогічна умова буде виконуватися і для стовпців). Тоді всі головні мінори нової матриці, не рахуючи мінора (найбільшого) порядку n, будуть додатними. Значить (знову за критерієм Сільвестра) P-визначальний поліном (графа E_n) для ребра (i, j) дорівнює, з точністю до постійного множника (який є від'ємним), визначнику матриці $M_n^{(i,j)}(t)$ (більш детально див. в [4]). Якщо ж говорити про цілочисловий P-визначальний поліном, то ситуація ще більш проста: визначник матриці $M_n^{(i,j)}(t)$ (як квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами) потрібно поділити на найбільший спільний дільник своїх коефіцієнтів, помножений на -1.

Переходимо безпосередньо до доведення теореми.

Спочатку розглянемо діаграму Динкіна E_6 і ребро $(1,2)$.

Згідно сказаного вище, щоб обчислити цілочисловий P-визначальний поліном графа E_6 для ребра $(1,2)$ треба обчислити визначник $D_6^{(1,2)}(t)$ матриці

$$M_6^{(1,2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

або матриці

$$\widetilde{M}_6^{(1,2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка отримана із попередньої наступним розташуванням рядків: $3,4,5,1,2$ (без перестановки стовпців). Зробивши з рядками матриці $\widetilde{M}_6^{(1,2)}(t)$ (яка розглядається замість матриці $M_6^{(1,2)}(t)$ з формальних міркувань) перетворення $[1] + [5]; [5] - [1]; [6] + \frac{t}{2} \cdot [1]; [2] + [5]; [5] - [2]; [6] + \frac{t^2+t-4}{2} \cdot [3]; [3] + [4]; [4] - [3]; [5] + 1 \cdot [3]; [6] - \frac{3t^2+t-10}{2} \cdot [3]; [5] + 3 \cdot [4]; [6] - \frac{6t^2+3t-22}{2} \cdot [2]; [6] + \frac{5t^2+3t-20}{6} \cdot [5]$, отримуємо наступну трикутну матрицю:

$$N_6^{(1,2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -t-1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5t^2+8}{6} \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $D_6^{(1,2)}(t)$ дорівнює визначнику матриці $N_6^{(1,2)}(t)$, який в свою чергу дорівнює $2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{-5t^2+8}{6} = -5t^2 + 8$. А значить (див. вище) відповідний цілочисловий P-визначальний поліном дорівнює $5t^2 - 8$.

Основну частину цього доведення запишемо скорочено наступним чином.

$$D_6^{(1,2)}(t) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -t-1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5t^2+8}{6} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{-5t^2+8}{6} = -5t^2 + 8.$

Перетворення: $[1]+[5]; [5]-[1]; [6]+\frac{t}{2}\cdot[1]; [2]+[5]; [5]-[2]; [6]+\frac{t^2+t-4}{2}\cdot[3]; [3]+[4]; [4]-[3]; [5]+1\cdot[3]; [6]-\frac{3t^2+t-10}{2}\cdot[3]; [5]+3\cdot[4]; [6]-\frac{6t^2+3t-22}{2}\cdot[2]; [6]+\frac{5t^2+3t-20}{6}\cdot[5].$

Решта випадків для діаграми E_6 і всі випадки для діаграм E_7 та E_8 розглядаються по такій же схемі. Ми вкажемо лише основні частини відповідних доведень у означеному вище скороченому вигляді.

$$D_6^{(2,3)}(t) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -t-1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4t^2+5}{3} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{-4t^2+5}{3} = -12t^2 + 15.$

Перетворення: $[5]+\frac{1}{2}\cdot[1]; [2]+[5]; [5]-[2]; [6]+\frac{2t}{3}\cdot[2]; [3]+[4]; [4]-[3]; [5]+1\cdot[3]; [6]-\frac{2t^2+2t-6}{3}\cdot[3]; [5]+3\cdot[4]; [6]-\frac{2t^2+6t-9}{2}\cdot[4]; [6]+\frac{2t-2}{3}\cdot[5].$

$$D_6^{(3,4)}(t) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -t & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4t^2-5}{2t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2t \cdot \frac{4t^2-5}{2t} = -12t^2 + 15.$

Перетворення: $[2]+\frac{1}{2}\cdot[1]; [5]+\frac{2}{3}\cdot[2]; [3]+[4]; [4]-[3]; [6]+t\cdot[3]; [5]-\frac{3t-4}{3}\cdot[4]; [6]+(t-2)\cdot[4]; [6]-\frac{3}{2t}\cdot[5].$

$$D_6^{(3,6)}(t) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3t^2+4}{2} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \frac{-3t^2+4}{2} = -9t^2 + 12.$

Перетворення: $[2]+\frac{1}{2}\cdot[1]; [5]+\frac{2}{3}\cdot[2]; [5]+\frac{4}{3}\cdot[3]; [6]+t\cdot[3]; [5]+\frac{5}{4}\cdot[4]; [6]+2t\cdot[4]; [6]-\frac{3t}{2}\cdot[5].$

$$D_6^{(4,5)}(t) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5t^2-8}{3t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot t \cdot \frac{-5t^2-8}{3t} = -5t^2 + 8.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [3] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [4] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [5] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [5] + \frac{5}{3} \cdot [4]; [6] + \frac{4t}{3} \cdot [4]; [6] - \frac{2}{t} \cdot [5].$

$D_7^{(1,2)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -t-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3t^2+4}{4} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-3t^2+4}{4} = -6t^2 + 8.$

Перетворення: $[1] + [6]; [6] - [1]; [7] + \frac{t}{2} \cdot [1]; [2] + [6]; [6] - [2]; [7] + \frac{t^2+t-4}{2} \cdot [2]; [3] + [5]; [5] - [3]; [6] + 1 \cdot [3]; [7] - \frac{3t^2+t-10}{2} \cdot [3]; [4] + [5]; [5] - [4]; [6] + 3 \cdot [4]; [7] - \frac{6t^2+3t-22}{2} \cdot [4]; [6] + 6 \cdot [5]; [7] - \frac{11t^2+6t-42}{2} \cdot [5]; [7] + \frac{7t^2+4t-28}{8} \cdot [6].$

$D_7^{(2,3)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -t-1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-8t^2+9}{6} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-8t^2+9}{6} = -16t^2 + 18.$

Перетворення: $[6] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [2] + [6]; [6] - [2]; [7] + \frac{2t}{3} \cdot [2]; [3] + [5]; [5] - [3]; [6] + 1 \cdot [3]; [7] - \frac{2t^2+2t-6}{3} \cdot [3]; [4] + [5]; [5] - [4]; [6] + 3 \cdot [4]; [7] - \frac{2t^2+6t-9}{3} \cdot [4]; [6] + 6 \cdot [5]; [7] - \frac{2t^2+12t-15}{3} \cdot [5]; [7] + \frac{8t-9}{12} \cdot [6].$

$D_7^{(3,4)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3t & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-18t^2+20}{9t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3t) \cdot \frac{-18t^2+20}{9t} = -18t^2 + 20.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [6] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [3] + [5]; [5] - [3]; [6] + \frac{4}{3} \cdot [3]; [7] - t \cdot [3]; [4] + [5]; [5] - [4]; [6] + \frac{3t+4}{3} \cdot [4]; [7] - (t+2) \cdot [4]; [6] + \frac{9t+4}{3} \cdot [5]; [7] - (t+5) \cdot [5]; [7] + \frac{4}{3t} \cdot [6].$

$D_7^{(3,7)}(t) =$

$$-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12t^2+14}{7} \end{vmatrix} =$$

$= -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{-12t^2+14}{7} = -12t^2 + 14.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [6] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [6] + \frac{4}{3} \cdot [3]; [7] - t \cdot [3]; [6] + \frac{5}{3} \cdot [4]; [7] - 2t \cdot [4]; [6] + 2 \cdot [5]; [7] - 3t \cdot [5]; [7] + \frac{12t}{7} \cdot [6]$.

$D_7^{(4,5)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2t & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-5t^2+6}{3t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot 1 \cdot (-2t) \cdot \frac{-5t^2+6}{3t} = -10t^2 + 12.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [3] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [5] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [6] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [4] + [5]; [5] - [4]; [6] + \frac{5}{3} \cdot [4]; [7] - \frac{4t}{3} \cdot [4]; [6] + (\frac{3t+5}{3}) \cdot [5]; [7] - \frac{4t+6}{3} \cdot [5]; [7] + \frac{3}{2t} \cdot [6]$.

$D_7^{(5,6)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4t^2+6}{3t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot (-\frac{3}{5}) \cdot (-t) \cdot \frac{-4t^2+6}{3t} = -4t^2 + 6.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [3] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [4] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [5] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [5] + \frac{3}{5} \cdot [4]; [6] + \frac{4}{5} \cdot [4]; [6] + 2 \cdot [5]; [7] - \frac{5t}{3} \cdot [5]; [7] + \frac{2}{t} \cdot [6]$.

$D_8^{(1,2)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -t-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7t^2+8}{10} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot \frac{-7t^2+8}{10} = -7t^2 + 8.$

Перетворення: $[1]+[7]$; $[7]-[1]$; $[8]+\frac{t}{2}\cdot[1]$; $[2]+[7]$; $[7]-[2]$; $[8]+\frac{t^2+t-4}{2}\cdot[2]$; $[3]+[6]$; $[6]-[3]$; $[7]+1\cdot[3]$; $[8]-\frac{3t^2+t-10}{2}\cdot[3]$; $[4]+[6]$; $[6]-[4]$; $[7]+3\cdot[4]$; $[8]-\frac{6t^2+3t-22}{2}\cdot[4]$; $[5]+[6]$; $[6]-[5]$; $[7]+6\cdot[5]$; $[8]-\frac{11t^2+6t-42}{2}\cdot[5]$; $[7]+10\cdot[6]$; $[8]-(9t^2+5t-35)\cdot[6]$; $[8]+\frac{9t^2+5t-36}{10}\cdot[7]$.

$D_8^{(2,3)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -t-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-20t^2+21}{15} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot \frac{-20t^2+21}{15} = -20t^2 + 21.$

Перетворення: $[7]+\frac{1}{2}\cdot[1]$; $[2]+[7]$; $[7]-[2]$; $[8]+\frac{2t}{3}\cdot[2]$; $[3]+[6]$; $[6]-[3]$; $[7]+1\cdot[3]$; $[8]-\frac{2t^2+2t-6}{2}\cdot[3]$; $[4]+[6]$; $[6]-[4]$; $[7]+3\cdot[4]$; $[8]-\frac{2t^2+6t-9}{3}\cdot[4]$; $[5]+[6]$; $[6]-[5]$; $[7]+6\cdot[5]$; $[8]-\frac{2t^2+12t-15}{3}\cdot[5]$; $[7]+10\cdot[6]$; $[8]-\frac{2t^2+20t-24}{3}\cdot[6]$; $[8]+\frac{10t-12}{15}\cdot[7]$.

$D_8^{(3,4)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 & -4t & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 & \frac{-24t^2+25}{12t} \end{vmatrix}=$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-4t) \cdot \frac{-24t^2+25}{12t} = -24t^2 + 25.$

Перетворення: $[2]+\frac{1}{2}\cdot[1]$; $[7]+\frac{2}{3}\cdot[2]$; $[3]+[6]$; $[6]-[3]$; $[7]+\frac{4}{3}\cdot[3]$; $[8]-t\cdot[3]$; $[4]+[6]$; $[6]-[4]$; $[7]+\frac{3t+4}{3}\cdot[4]$; $[8]-(t+2)\cdot[4]$; $[5]+[6]$; $[6]-[5]$; $[7]+\frac{9t+4}{3}\cdot[5]$; $[8]-(t+5)\cdot[5]$; $[7]+\frac{18t+4}{3}\cdot[6]$; $[8]-(t+9)\cdot[6]$; $[8]+\frac{5}{4t}\cdot[7]$.

$D_8^{(3,8)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-15t^2+16}{8} \end{vmatrix}=$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{-15t^2+16}{8} = -15t^2 + 16.$

Перетворення: $[2]+\frac{1}{2}\cdot[1]$; $[7]+\frac{2}{3}\cdot[2]$; $[7]+\frac{4}{3}\cdot[3]$; $[8]-t\cdot[3]$; $[7]+\frac{5}{3}\cdot[4]$; $[8]-2t\cdot[4]$; $[7]+2\cdot[5]$; $[8]-3t\cdot[5]$; $[7]+\frac{7}{3}\cdot[6]$; $[8]-4t\cdot[6]$; $[8]+\frac{15t}{8}\cdot[7]$.

$D_8^{(4,5)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 2 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3t & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-15t^2+16}{9t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3t) \cdot \frac{-15t^2+16}{9t} = -15t^2 + 16.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]$; $[3] + \frac{2}{3} \cdot [2]$; $[6] + \frac{3}{4} \cdot [3]$; $[7] + \frac{3}{4} \cdot [3]$; $[4] + [6]$; $[6] - [4]$; $[7] + \frac{5}{3} \cdot [4]$; $[8] - \frac{4t}{3} \cdot [4]$; $[5] + [6]$; $[6] - [5]$; $[7] + \frac{3t+5}{3} \cdot [5]$; $[8] - \frac{4t+6}{3} \cdot [5]$; $[7] + \frac{9t+5}{3} \cdot [6]$; $[8] - \frac{4t+15}{3} \cdot [6]$; $[8] + \frac{4}{3t} \cdot [7]$.

$D_8^{(5,6)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & -1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3t^2+4}{3t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-t) \cdot \frac{-3t^2+4}{3t} = -3t^2 + 4.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]$; $[3] + \frac{2}{3} \cdot [2]$; $[4] + \frac{3}{4} \cdot [3]$; $[6] + \frac{3}{4} \cdot [3]$; $[5] + \frac{4}{5} \cdot [4]$; $[6] + \frac{3}{5} \cdot [4]$; $[6] + \frac{1}{2} \cdot [5]$; $[7] + \frac{5}{6} \cdot [5]$; $[7] + \frac{7}{3} \cdot [6]$; $[8] - 2t \cdot [6]$; $[8] + \frac{2}{t} \cdot [7]$.

$D_8^{(6,7)}(t) =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & -1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3t^2+4}{3t} \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-t) \cdot \frac{-3t^2+4}{3t} = -3t^2 + 4.$

Перетворення: $[2] + \frac{1}{2} \cdot [1]; [3] + \frac{2}{3} \cdot [2]; [4] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [6] + \frac{3}{4} \cdot [3]; [5] + \frac{4}{5} \cdot [4]; [6] + \frac{3}{5} \cdot [4]; [6] + \frac{1}{2} \cdot [5]; [7] + \frac{5}{6} \cdot [5]; [7] + \frac{7}{3} \cdot [6]; [8] - 2t \cdot [6]; [8] + \frac{2}{t} \cdot [7].$

Зауважимо, що хоча всі визначники є поліномами від t, але в проміжних обчисленнях зустрічаються і не цілі раціональні функції від t. Проте це не є недоліком схеми доведення (суттєвим є те, що відповідні знаменники неперервні відносно змінної t і перетворюються в нуль лише для скінченного числа її значень).

4. Зауваження про середній член. Як видно із теореми 1, в усіх цілочислових P-визначальних поліномах відсутній середній член. Це випливає із загальної властивості визначників спеціального вигляду, яку ми розглянемо в тій степені загальності, яка відповідає нашій ситуації.

Нехай $Q = (Q_0, Q_1)$, де $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$, — неорієнтований граф, який є зв'язним, не має циклів (зокрема, петель і кратних ребер) та має більше однієї вершини, і $q_Q(z)$ — його квадратична форма Тітса. Виділимо в симетричній матриці для $q_Q(z)$ ненульовий недіагональний елемент і помножимо його на параметр t разом із симетричним до нього елементом. Тоді визначник отриманої матриці є квадратним тричленом від t без середнього члена.

Доведення цієї властивості елементарне. Випадок $|Q_0| = 2$ очевидний. Якщо ж $|Q_0| > 2$, то із відсутності циклів випливає існування ребра $\lambda = (i, j)$ такого, що вершина i зв'язана ребром лише із вершиною j, і, окрім того, воно не є виділеним. Не обмежуючи загальність можна вважати, що $i = 1, j = 2$. Позначимо нашу симетричну матрицю, (яка вже з параметром t) через $M(t)$, а матрицю, отриману із M викреслюванням 1-го рядка та 1-го стовпця (відповідно 1-го і 2-го рядків та 1-го і 2-го стовпців), позначимо через $M_1(t)$ (відповідно $M_{12}(t)$). Розкладаючи визначник матриці M по першому рядку, а потім другий із отриманих визначників по першому стовпцю, маємо: $|M(t)| = |M_1(t)| - 1/4|M_{12}(t)|$. І оскільки $M_1(1)$ є симетричною матрицею квадратичної форми Тітса графа $(Q_0 \setminus \{1\}, Q_1)$, а $M_1(12)$ — симетричною матрицею квадратичної форми Тітса графа $(Q_0 \setminus \{1, 2\}, Q_1)$, то можна застосувати індукцію по числу вершин.

5. *P*-зважені графи. Нехай $Q = (Q_0, Q_1)$ — неорієнтований граф з множиною вершин Q_0 та множиною ребер Q_1. Для наших цілей достатньо вважати, що граф Q зв'язний і не має циклів. Граф Q називається реберно-зваженим (надалі просто зваженим), якщо додатково задана вагова функція $\varphi : Q_1 \to \mathbb{R}^+$ із множини ребер в множину додатних дійсних чисел; число $\varphi(\lambda)$ називається вагою ребра λ. Якщо u і v — вершини зваженого графа Q, то φ-відстанню $d_\varphi(u, v)$ між

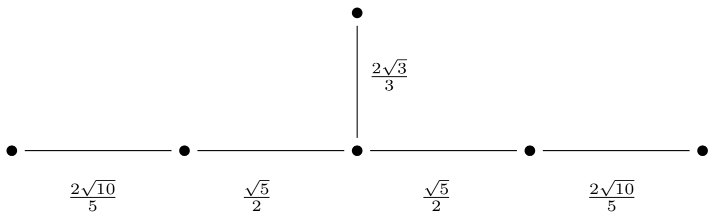
u і v називається вага $\sum_{i=1}^{m} \varphi(\lambda_i)$ єдиного шляху $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_m$ між вершинами u і v. Найбільша φ-відстань між вершинами називається φ-діаметром зваженого графа.

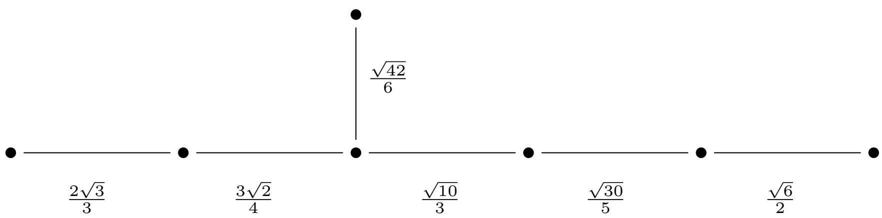
Назвемо P-вагою ребра діаграми Динкіна G єдине додатне P-граничне число для цього ребра (той факт, що обидва P-граничні числа відрізняються лише знаком, робить це означення природним). Діаметр реберно-зваженого графа G відносно такої вагової функції позначаємо через $\mathcal{D}_P(G)$.

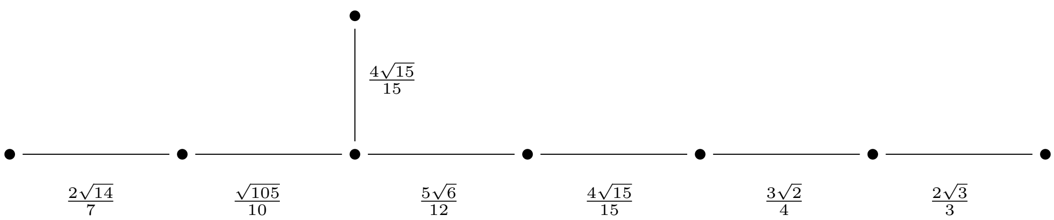
Теорема 2.

$$\mathcal{D}_P(G) = \begin{cases} \sqrt{5} + \frac{4\sqrt{10}}{5} \approx 4.77 & \textit{для } G = E_6, \\ 45\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{30}}{5} \approx 68.17 & \textit{для } G = E_7, \\ 315\sqrt{2} + 280\sqrt{3} + 175\sqrt{6} + \frac{2\sqrt{14}}{7} + \frac{4\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{105}}{10} \approx 1362.24 & \textit{для } G = E_8. \end{cases}$$

Доведення. Із теореми 1 випливає, що додатні P-визначальні числа для несерійних діаграм Динкіна E_6, E_7, E_8 є наступними:







Нагадаємо, що вершини діаграми Динкіна $G = E_n$, $n \in \{6, 7, 8\}$, ми позначаємо числами $1, 2, \ldots, n-1$ (вершини нижнього ланцюга зліва направо) і n (верхня вершина).

Оскільки $d_P(1,5) > d_P(1,6) = d_P(5,6)$ для $G = E_6$, $d_P(1,6) > d_P(1,4)$ і $d_P(1,6) > d_P(6,7)$ для $G = E_7$, $d_P(1,7) > d_P(1,4)$ і $d_P(1,7) > d_P(7,8)$ для $G = E_8$, то в кожному випадку діаметр $\mathcal{D}_P(G)$ дорівнює P-відстані між вершинами 1 і $n-1$. Залишилося лише обчислити вказані відстані.

Список використаної літератури

1. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, N 1. – P. 71-103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34-42.
3. *Bondarenko V. M., Pereguda. Yu. M.* On P-numbers of quadratic forms// Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **6**, N2. – С. 474-477.
4. *Bondarenko V. M.* On types of local deformations of quadratic forms // Algebra Discrete Math. — 2014. – 18, №2. – pp. 11-18.
5. *Бондаренко В. М., Перегуда Ю. М.* Опис Р-чисел для вузлових точок частково впорядкованих множин з додатно визначеною формою Тітса // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2010. – вип 21. – С. 35-39.
6. *Бондаренко В. М., Бондаренко В. В., Перегуда Ю. Н.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм // Укр. мат. журнал. – 2012. – №7. – С. 892-907.
7. *Bondarenko V. M., Bondarenko V. V., Lisykevych V. A., Pereguda Yu. M.* On a deformation diameter of Dynkin diagrams // Algebra Discrete Math. – 2015 – 19, №1. – P. 39-43.
8. *Бондаренко В. М., Лісикевич В. А.* Описание P-граничных чисел реберного типа для P-несерийных примитивных ч. у. множеств // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (серія 1: фізико-математичні науки). – 2014, №16. – С. 31-48.
9. *Бондаренко В. М., Лісикевич В. А.* P-визначальні поліноми для несерійних частково впорядкованих множин ширини 2 // Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2015. – вип. 27, №2 – С. 30-40.

Одержано 15.05.2016