УДК 519.21

Т. В. Боярищева (Ужгородський нац. ун-т),
І. Й. Поляк (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

In the contains estimates of the rate of convergence in the central limit theorem.

В роботі містяться оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі.

Використанню псевдомоментів у граничних теоремах присвячена значна кількість робіт, зокрема це відображено в роботах [1–4]. В роботі [4] розглядаються оцінки швидкості збіжності в локальній граничній теоремі в схемі серій з використанням псевдомоменту одного виду. В даній роботі продовжуються дослідження швидкості збіжності в центральній граничній теоремі.

Нехай маємо послідовність серій випадкових величин $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$. При фіксованому n випадкові величини ξ_{ni} незалежні і однаково розподілені з $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$. Таким чином, $DS_n = 1$, якщо $S_n = \xi_{n1} + \ldots + \xi_{nn}$. $F_n(x)$ — функція розподілу ξ_{ni}; $f_n(t)$ — характеристична функція ξ_{ni}; $\Phi_n(x)$ — функція розподілу S_n; $\varphi_n(t)$ — характеристична функція S_n. Позначимо через $\Phi(x)$ — функцію розподілу стандартного нормального закону $N(0, 1)$.

Тоді $\Phi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x)$. Виникає питання у побудові нерівностей

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le C\delta_n.$$

Нам необхідно отримати вигляд δ_n. Введемо псевдомомент такого вигляду:

$$\nu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) \left| d\left(F_n\left(x\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right)\right|.$$

Теорема 1. *Для всіх $n \ge 1$ справедлива нерівність*

$$\rho_n \le C\frac{\nu_n}{\sqrt{n}},$$

де $C-$ деяка абсолютна стала.

Доведення. Використаємо нерівність ([5], ст.299):

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T}\sup_x G'(x).$$

Покладемо в даній нерівності $F(x) = \Phi_n(x)$; $G(x) = \Phi(x)$; $f(t) = \varphi_n(t)$; $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, тоді

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right| dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}.$$

Зробимо заміну у правій частині нерівності $t = z\sqrt{n}$. Одержимо

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^{T/\sqrt{n}} \left| f_n^n\left(z\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{z^2}{2}n}\right| \frac{dz}{z} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \qquad (1)$$

Використавши рівність

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{n-k},$$

де у нашому випадку $a = f_n\left(t\sqrt{n}\right),\ b = e^{-\frac{t^2}{2}}$, одержимо

$$\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right| \le \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \sum_{k=1}^{n} \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}(n-k)}. \tag{2}$$

Оскільки $f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x)$; $f_n\left(t\sqrt{n}\right) = \int e^{it\sqrt{n}x} dF_n(x) = \int e^{itx} dF_n\left(x/\sqrt{n}\right)$, тоді

$$f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(x/\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(x/\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right). \tag{3}$$

Із першої рівності (3) одержимо

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|d\left(F_n\left(x/\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right)\right| \le \nu_n,$$

а другої -

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2}\right| \left|d\left(F_n\left(x/\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^3 \left|d\left(F_n\left(x/\sqrt{n}\right) - \Phi(x)\right)\right| \le \frac{|t|^3}{6}\nu_n.$$

Тому

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \nu_n \min\left(1, \frac{|t|^3}{6}\right) \le \nu_n \frac{t^2}{\sqrt[3]{36}}. \tag{4}$$

Нехай $\nu_n \le c, c \in (0, 2^{-1})$ і $|t| \le T_1 = \sqrt{-2\ln \nu_n}$.

Тоді із (4)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right| \le \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| + e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{\frac{t^2}{2}}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{\frac{T_1^2}{2}} \nu_n \frac{t^2}{\sqrt[3]{36}}\right) \le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \nu_n^{-1}\nu_n \frac{t^2}{\sqrt[3]{36}}\right) \le e^{-c_1 t^2}, \tag{5}$$

де $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{36}} > 0$.

Якщо $\nu_n \le c$ і $|t| > T_1$, то із (4)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right| \le \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| + e^{-\frac{t^2}{2}} \le e^{\frac{T_1^2}{2}} + \nu_n = 2\nu_n. \tag{6}$$

Нехай $\nu_n > c, |t| \le T_2 = \frac{c}{\nu_n}, (T_2 \le 1)$.
Тоді із (4)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right| \le \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| + e^{-\frac{t^2}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{\frac{t^2}{2}}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\right) \le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{\frac{T_2^2}{2}}\nu_n\frac{|t|^3}{6}\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sqrt{e}\nu_n\frac{t^2}{6}T_2\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \frac{c\sqrt{e}}{6}t^2\right) \le e^{-c_2t^2}, \qquad (7)$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{c\sqrt{e}}{6} > 0$.
Із (5) і (7), нерівності (2), одержимо:
якщо $|t| \le T_k$ ($k = 1$ при $\nu_n \le c$ і $k = 2$ при $\nu_n > c$), то має місце нерівність

$$\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right| \le \frac{|t|^3}{6}\nu_n\sum_{k=1}^{n} e^{-c_kt^2(n-k)}e^{-\frac{t^2}{2}(n-k)} \le \frac{|t|^3}{6}\nu_n n e^{-c_kt^2(n-1)}. \qquad (8)$$

Нехай $n \ge 2$ і $\nu_n > c$, тоді в (1) покладемо $T = T_2\sqrt{n}$, тоді із нерівності (8) при $k = 2$ одержимо:

$$I = \int_0^{T_2}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t} \le \int_0^{T_2}\frac{|t|^3}{6}\nu_n n e^{-c_2t^2(n-1)}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\nu_n n}{12\left(c_2\left(n-1\right)\right)^{3/2}}\int_0^{c_2T_2^2(n-1)}\sqrt{z}e^{-z}dz \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}\nu_n}{6\sqrt{c_2}\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\sqrt{z}e^{-z}dz = \frac{\nu_n}{\sqrt{n}}C_1,$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{c_2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \qquad (9)$$

Тоді із (1) одержимо для $n \ge 2$ справедливість теореми у випадку $n \ge 2$ і $\nu_n > c$:

$$\sup_x\left|\Phi_n\left(x\right) - \Phi\left(x\right)\right| \le \frac{\nu_n}{\sqrt{n}}C_2,\ C_2 = \frac{2}{\pi}C_1 + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}.$$

Нехай $\nu_n \le c$, $T = T_2\sqrt{n}$, тоді

$$I = \int_0^{T/\sqrt{n}}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t} = \int_0^{T'}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t}$$

$$+\int_{T'}^{T/\sqrt{n}}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t} = I_1 + I_2, T' = \min\left(T_1, \frac{T}{\sqrt{n}}\right). \qquad (10)$$

Будемо розглядати випадок $T' = T_1$, бо інакше $I_2 = 0$ і доведення стає простішим. Із нерівності (8), аналогічно до (9), одержимо

$$I_1 = \frac{\nu_n}{\sqrt{n}}C_3, \qquad (11)$$

де $C_3 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{C_1}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$I_2 = \int_{T_1}^{T/\sqrt{n}} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \le \int_{T_1}^{T/\sqrt{n}} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_1}^{T/\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_1' + I_2'' \tag{12}$$

Із (6) одержимо

$$I_2' \le \frac{\nu_n}{\sqrt{n}} C_4. \tag{13}$$

Для I_2''(введемо заміну $t = \sqrt{n}\tau$), тоді

$$I_2'' = \int_{T_1}^{T/\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} \le \int_{T_1\sqrt{n}}^{T} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \frac{d\tau}{\tau} \le \frac{1}{T_1\sqrt{n}} \int_{T_1\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \le \frac{\nu_n}{\sqrt{n}} c. \tag{14}$$

Із (1), (10)-(14) випливає, що при $n \ge 2$ теорема доведена.

Нехай $n = 1$, тоді

$$\rho_1 = \sup_x \left|\Phi_1(x) - \Phi(x)\right| = \sup_x \left|F_1(x) - \Phi(x)\right| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^{x} d\left(F_1(y) - \Phi(y)\right) \right| \le$$

$$\le \sup_x \int_{-\infty}^{+\infty} \left| d\left(F_1(y) - \Phi(y)\right) \right| \le \nu_1.$$

Теорема 2. *Нехай $\nu_n \le c, c \in (0, 2^{-1})$. Для всіх $n > 1$ справедлива нерівність*

$$\chi_n \le C' \frac{\nu_n}{\sqrt{n}},$$

де $\chi_n = \sup_{t\in R} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|$, C'– деяка абсолютна стала, що залежить тільки від c.

Доведення. Із вираження χ_n випливає, що

$$\chi_n = \sup_{t\in R} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \sup_{t\in R} \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \sup_{t\in R} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right|.$$

Враховуючи (5), (6), (8) одержимо

$$\chi_n \le \sup_{|t|\le T_1} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| + \sup_{|t|>T_1} \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) \right|^n + \sup_{|t|>T_1} e^{-\frac{t^2}{2}n} = L_1 + L_2 + L_3. \tag{15}$$

Із (8) одержимо при $n > 1$

$$L_1 \le \sup_{|t|\le T_1} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \le \nu_n \frac{n}{6} \sup_{|t|\le T_1} \left(|t|^3 e^{-c_1 t^2 (n-1)} \right) \le C_6 \frac{\nu_n}{n} \tag{16}$$

Із (6), враховуючи, що $\nu_n \le c, c \in (0, 2^{-1})$,

$$L_2 = \sup_{|t|>T_1} \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) \right|^n \le (2\nu_n)^n \le 2\nu_n (2c)^{n-1} \le C_7 \frac{\nu_n}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

і, аналогічно (17)

$$L_3 = \sup_{|t|>T_1} e^{-\frac{t^2}{2}n} = e^{-\frac{T_1^2 n}{2}} = \nu_n^n \le C_8 \frac{\nu_n}{\sqrt{n}}. \tag{18}$$

Із (15)-(18) випливає справедливість теореми 2.

Список використаної літератури

1. *Золотарев В.М.* Современная теория независимых случайных величин / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
2. *Zolotarev V.M.* Exactness of an appromationin the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Procceedings of in Second Japan-USSR Sympozium on Probability Nheory. – Berlin: Shringes-Verlag, 1973. – P. 531–543.
3. *Слюсарчук П.В.* Деякі оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі / П.В. Слюсарчук, І.Й. Поляк // Теория вероятностей и ее применение. – 1991. – 36, вип.4. – С. 807–808.
4. *Поляк І.Й.* Уточнення локальної граничної теоремі в схемі серій / І. Й. Поляк // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер.мат. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 99–102.
5. *Лоев М.* Теория вероятностей / М. Лоев. – М.: из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 25.06.2016