УДК 519.218.82

М. П. Моклячук, В. І. Остапенко (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МІНІМАКСНА ФІЛЬТРАЦІЯ ГАРМОНІЗОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

The problem of optimal linear estimation of the functional $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k\xi_{-k}$ that depends on the unknown values of a harmonizable $\alpha-$stable stochastic sequence ξ_n from observations of the sequence $\xi_n + \eta_n$ at points $n = 0, -1-2, \ldots$, where $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ and $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ are mutually independent harmonizable $\alpha-$stable sequences are considered. Formulas for calculating the error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case of spectral certainty where spectral densities of the processes are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty for some classes of admissible spectral densities.

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k\xi_{-k}$, що залежить від невідомих значень гармонізованої α-стійкої послідовності ξ_n за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n$ у моменти часу $n = 0, -1, -2, \ldots$, де $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ — взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі послідовності. Встановлені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови спектральної визначеності коли відомі спектральні щільності процесів. У тому випадку коли спектральні щільності невідомі, а визначені лише класи допустимих щільностей, застосовано мінімаксний підхід до задачі оцінювання. Вказані співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мініміксні спектральні характеристики оцінок для деяких класів спектральних щільностей.

1. Вступ. Ефективні методи оцінювання невідомих значень (задачі інтерполяції, екстраполяції та фільтрації) стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів розроблені у працях А.М. Колмогорова [1], Н. Вінера [2], А. Яглома [3], [4]. Задачі оцінювання невідомих значень гармонізованих стохастичних послідовностей та процесів досліджувались у роботах А. Верона [5], М. Пурахмаді [6], С. Камбаніса [7], С. Камбаніса та Е. Масрі [8], Й. Хосойа [9].

Запропоновані методи досліджень ґрунтуються на припущенні, що спектральні щільності стохастичних послідовностей та процесів відомі. На практиці, однак, спектральні щільності у більшості випадків невідомі. Щоб подолати таке ускладнення спочатку оцінюють спектральні щільності параметричними чи непараметричними методами, або підбирати такі щільності виходячи з інших міркувань. Потім застосовують класичні методи пошуку оцінок. Проте такий підхід може привезти до значного росту величини похибки оцінок, як показали на конкретних прикладах К. Вастола та Х. Пур [10]. Одним із способів подолання такого ускладнення це знаходження мінімаксних оцінок, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей із деякого класу допустимих спектральних щільностей. Такі оцінки називаються мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення похибки. Огляд результатів з мінімаксних (робастних) методів аналізу даних зробили у свій час К. Кассам та Х. Пур [11]. У. Гренадер [12] першим запропонував мінімаксний підхід до розв'язання задачі екстраполяції стаціонарних стохастичних процесів.

У монографії М. Моклячука [13] викладені результати досліджень з мінімакстного(робастного) оцінювання функціоналів від стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів. У книзі М. Моклячука та І. Голіченко [14] досліджені мінімакстні(робастні) оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних послідовностей та процесів. У книзі М. Моклячука та О. Масютки [15] наведені результати досліджень мінімаксних оцінкок функціонплів від стаціонарних векторнозначних стохастичних послідовностей та процесів. У роботі М. Луза та М. Моклячука [16] вивчаються мінімаксні(робастні) оцінки для задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для стохастичних процесів із стаціонарними приростами. У статтях М. Моклячука та В. Остапенка [17], [18] досліджуються оцінки невідомих значень функціоналів від невідомих значень гармонізованих α-стійких послідовностей.

У даній роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання (класичний та мінімаксний методи) функціонала $A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k\xi_{-k}$, що залежить від невідомих значень гармонізованої α-стійкої послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n$ у моменти часу $n = 0, 1, 2, \dots$, де $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ – взаємно незалежні гармонізовані α-стійкі послідовності. Задача досліджується за умови спектральної визначеності, коли відомі спектральні щільності послідовностей. та за умови спектральної невизначеності, коли спектральні щільності послідовностей невідомі, проте задані класи допустимих спектральних щільностей. Встановлені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ у тому випадку коли спектральні щільності послідовностей відомі. У випадку спектральної невизначеності знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спекральні щільності на мінімаксні спектральні характеристики опримальних оцінок функціоналів для деяких класів допустимих спектральних щільностей.

2. Гармонізовані α-стійкі послідовності. Основні властивості.

Означення 1 (Симетрична α-стійка випадкова величина). *Дійсна випадкова величина ξ називається симетричною α-стійкою, $S\alpha S$, якщо її характеристична функція має вигляд $Eexp(it\xi) = exp(-c|t|^{\alpha})$, для деякого $c \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$.*

Означення 2 (Симетрична α-стійка стохастична послідовність). *Стохастична послідовність $\{\xi = \xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називається симетричною α-стійкою послідовністю, якщо всі дійсні лінійні комбінації $\sum \lambda_j\xi_j$ мають симетричний α-стійкий розподіл.*

Комплекснозначна випадкова величина $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ є симетрично α-стійкою, якщо ζ_1, ζ_2 є симетрично α-стійкими $S\alpha S$ величинами. Стохастичний процес (дійсний чи комплекснозначний) є α-стійкий, якщо всі скінчені лінійні комбінації випадкових величин є α-стійкими.

Коваріація $S\alpha S$ величин $X = X_1 + iX_2$ та $Y = Y_1 + iY_2$ $(1 < \alpha \leq 2)$ визначається за формулою

$$[X, Y]_{\alpha} = \int_{S_4} (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{X_1,X_2,Y_1,Y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2), \qquad (1)$$

де $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}, \beta > 0$, а $\Gamma_{\vec{\xi}}(\cdot)$ – це міра, що визначена на одиничній сфері $S_n \in R^n$. Коваріація не є симетричною та не є лінійною за другим аргументом. Для сумісно $S\alpha S$ розподілених випадкових величин ξ, ξ_1, ξ_2, η маємо:

$$[\xi(t_1) + \xi(t_2), \eta]_{\alpha} = [\xi(t_1), \eta]_{\alpha} + [\xi(t_2), \eta]_{\alpha},$$

$$||[\xi,\eta]_\alpha| \leq ||\xi||_\alpha ||\eta||_\alpha^{\alpha-1} \tag{2}$$

де $||\xi||_\alpha = [\xi,\xi]_\alpha^{1/\alpha}$ є нормою у лінійному просторі породженому $S\alpha S$ випадковими величинами, яка еквівалентна збіжності за ймовірністю. Зауважимо, що $||\cdot||_\alpha$ може не співпадати зі стандартною нормою в L_α.

Нехай $Z = \{Z(\theta) : -\infty < \theta < \infty\}$ – $S\alpha S$ стохастичний процес з незалежними приростами. Слідуючи [7] визначимо спектральну міру процесу Z у наступний спосіб $\mu\{(s,t]\} = \|Z(t) - Z(s)\|_\alpha^\alpha$. Можна визначити інтеграл $\int f(\theta)dZ(\theta)$ для всіх $f \in L^\alpha(\mu)$, що має такі властивості:

$$\left\|\int f(\theta)dZ(\theta)\right\|_\alpha^\alpha = \int |f(\theta)|^\alpha d\mu(\theta),$$

$$\left[\int f(\theta)dZ(\theta), \int g(\theta)dZ(\theta)\right]_\alpha = \int f(\theta)\left(g(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta).$$

Означення 3 (Гармонізована симетрична α-стійка послідовність)**.** *Стохастична SaS - послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ є гармонізованою $HS\alpha S$, якщо існує стохастичний SaS процес $Z = \{Z(\theta); \theta \in [-\pi,\pi]\}$ з незалежними приростами та скінченою спектральною мірою $\mu(\theta)$ такий, що послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ має спектральний розклад*

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} dZ(\theta), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Коваріація гармонізованого процесу допускає спектральний розклад

$$[\xi_n, \xi_m]_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\mu(\theta), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Зазначимо, що послідовність $HS\alpha S$ не завжди є стаціонарною, проте при $\alpha = 2$ ця послідовність є строго стаціонарною з гаусовим розподілом.

Для замкнутого лінійного підпростору $M \subseteq L^\alpha(\mu)$ та $f \in L^\alpha(\mu)$ існує єдиний елемент з M, що мінімізує відстань до f і називається проекцією f на M або найкращою апроксимацією f на M, що позначається $P_M f$. Проекція $P_M f$ єдиним чином визначається [19, с. 56] співвідношенням:

$$\int g(\theta)\left(f(\theta) - P_M f(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta) = 0, g \in M.$$

Позначимо через $H(\xi)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійний многовид, породжений всіма значеннями процесу послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Для $HS\alpha S$ - послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і замкнутої підмножини $N \subseteq H(\xi)$ існує єдиний елемент $\hat{\xi}_n \in N$, що мінімізує відстань до ξ_n і визначається співвідношенням:

$$\left[\eta, \xi_n - \hat{\xi}_n\right] = 0, \eta \in N. \tag{3}$$

В силу лінійності коваріації за першим аргументом маємо

$$||\xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha^\alpha = ||\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha - ||\hat{\xi}_n, \xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha = ||\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha. \tag{4}$$

Маємо з (3) та (4), що $\xi_n - \hat{\xi}_n$ належить наступному класу випадкових величин $L_n = \{\eta \in H(\xi) : [\zeta, \eta]_\alpha = 0; \forall \zeta \in N, ||\eta||_\alpha^\alpha = [\xi, \eta]_\alpha\}$. Серед всіх елементів L_n елемент $\xi_n - \hat{\xi}_n$ має найбільшу норму [6]

$$||\xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha = \max_{\zeta \in L_n} ||\zeta||_\alpha. \quad (5)$$

Співвідношення (5) випливає із означення L_n та нерівності (2).

3. Фільтрація гармонізованих α-стійких послідовностей. Традиційний підхід. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\xi = \sum_{k=0}^{N} a_k \xi_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta), \quad A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої $\alpha-$стійкої послідовності ξ_k за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n, n \in \mathbb{Z}$ у моменти часу $n = 0, -1, -2, \ldots$

Задачу досліджуватимо у тому випадку, коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні послідовності ξ_n та η_n мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно, та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} d\theta < \infty, \quad (6)$$

Позначимо через $H^-(\xi + \eta)$ замкнуту за нормою $|| \cdot ||_\alpha$ лінійну оболонку породжену випадковими величинами $\{\xi_n + \eta_n; n = 0, -1, -2, \ldots\}$.

Теорема 1. *Нехай $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольнють умову мінімальності* (6). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ^\xi(\theta)$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності ξ_n за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n$ у точках $n = 0, -1, -2, \ldots$ обчислюється за формулою* (7). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (9), *де невідомі коефіцієнти $c_k, k = 1, 2, \ldots$, визначаються рівняннями* (10). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (11).

Доведення. Виходячи із співвідношення ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L_\alpha(f)$ будемо шукати оцінку у вигляді

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left(dZ^\xi(\theta) + dZ^\eta(\theta) \right). \quad (7)$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^-(f + g)$ простору $L_\alpha(f + g)$ породженому функціями $e^{in\theta}$ при $n = 0, -1, \ldots$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ мінімізує значення $||A_N\xi - \hat{A}_N\xi||_\alpha$. Найкращим наближенням значення величини $A_N\xi$ у просторі $H^-(\xi + \eta)$ є проекція $\hat{A}_N\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(n) + \eta(n), A_N\xi - \hat{A}_N\xi]_\alpha = 0, n = 0, -1, -2, \ldots$$

Скориставшись спектральним розкладом коваріації гармонізованого процесу, отримаємо наступне співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\left[\left(A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta)\right] d\theta=0,\ n=0,-1,-2,\ldots \tag{8}$$

Із отриманого співвідношення маємо таке рівняння для визначення спектральної характеристики оцінки

$$\left(A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta)-(h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta)=\overline{C(e^{i\theta})}, \tag{9}$$

$$C(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i(k+1)\theta},$$

де c_k – невідомі коефіцієнти, які визначаються із умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} h(\theta) d\theta=0, \quad n=1,2,\ldots. \tag{10}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_N\xi-A_N\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|A_N(e^{i\theta})-h(\theta)\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}|h(\theta)|^{\alpha} g(\theta)d\theta. \tag{11}$$

4. Фільтрація гармонізованих α-стійких послідовностей. $\alpha=2$. Традиційний підхід. Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності ξ_k, для $\alpha=2$. У цьому випадку взаємно незалежні $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n\in\mathbb{Z}$ та $\eta_n, n\in\mathbb{Z}$ є стаціонарними.

Теорема 2. *Нехай $\xi_n, n\in\mathbb{Z}$ та $\eta_n, n\in\mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, $\alpha=2$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta),\nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta)>0, g(\theta)>0$ відповідно, які задовольнють умову мінімальності* (6) *при $\alpha=2$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності ξ_k за спостереженнями послідовності $\xi_n+\eta_n$ в точках $n=0,-1,-2,\ldots$ обчислюється за формулою* (7)*. Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівняння* (12)*, де невідомі коефіцієнти $c_k, k=1,2,\ldots,$ визначається рівнянням* (13)*. Похибка оцінки обчислюється за формулою* (14).

Доведення. Спектральна характеристика оцінки, що визначається із рівняння (9), матиме вигляд

$$h(\theta)=A_N(e^{i\theta})-\frac{A_N(e^{i\theta})g(\theta)+C(e^{i\theta})}{f(\theta)+g(\theta)}, \quad C(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i(k+1)\theta}. \tag{12}$$

Невідомі коефіцієнти c_k визначаються із рівнянь

$$\sum_{j=0}^{N} a_j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(j-n)\theta} f(\theta)}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta-\sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-n+1)\theta}}{f(\theta)+g(\theta)} d\theta=0, \quad n=1,2,\ldots. \tag{13}$$

Визначимо оператори у просторі ℓ_2, що задані матрицями $(\mathbf{B})_{k,j} = B_{k,j}, k, j \geq 0$; $(\mathbf{Q})_{k,j} = Q_{k,j}, k \geq 1, j \geq 0$; $(\mathbf{R})_{k,j} = R_{k,j}, k, j \geq 0$, утвореними з коефіцієнтів Фур'є

$$B_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta} \frac{1}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta;$$

$$Q_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j+k)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta;$$

$$R_{k,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta.$$

Рівняння (13), що визначають невідомі коефіцієнти c_k, можна записати у вигляді

$$\mathbf{Qa} = \mathbf{Bc}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Qa},$$

де вектори $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots)$.

Похибку оцінки функціонала можемо обчислити за формулою

$$\begin{aligned} \left\| \hat{A}_N\xi - A_N\xi \right\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_N(e^{i\theta})g(\theta) + C(e^{i\theta})}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 f(\theta) d\theta \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{A_N(e^{i\theta})f(\theta) - C(e^{i\theta})}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 g(\theta) d\theta = \\ &= \langle \mathbf{Qa}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Qa} \rangle + \langle \mathbf{Ra}, \mathbf{a} \rangle. \end{aligned} \tag{14}$$

5. Фільтрація гармонізованих α-стійких послідовностей. Мінімаксний підхід. Величина похибки

$$\Delta(h(f,g); f, g) := \left\| \hat{A}_N\xi - A_N\xi \right\|_\alpha^\alpha,$$

та спектральна характеристика $h(f,g) := h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$ обчислюються за вказаними формулами за умови, що нам відомі спектральні щільності f та g. Якщо ж щільності f та g невідомі, проте можна вказати класи допустимих спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$, використаємо мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціонала і знайдемо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу $D = D_f \times D_g$ [13].

Означення 4. *Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ називаються найменш сприятливими в $D = D_f \times D_g$ для оптимального лінійного оцінкювання $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:*

$$\triangle(f_0, g_0) = \triangle(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D = D_f \times D_g} \triangle(h(f,g); f, g).$$

Означення 5. *Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ називається мінімаксною(робастною), якщо справджуються співвідношення*

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_\alpha(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \triangle(h;f,g) = \max_{(f,g)\in D} (h^0;f,g).$$

Найменш сприятливі щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$.

Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geq \Delta\left(h^0; f, g\right)$$
$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справджуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f,g) = -\triangle(h(f_0,g_0); f,g) \to \inf, \quad (f,g) \in D_f \times D_g, \tag{15}$$

$$\triangle(h(f_0,g_0);f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A_N(e^{i\theta}) - h^0(\theta)\right|^\alpha f(\theta)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta.$$

Зауважимо, що задача на умовний екстремум (15) еквівалентна задачі на безумовний екстремум [20], [21]

$$\triangle_D(f,g) = \tilde{\triangle}(f,g) + \delta(f,g|D_f \times D_g) \to \inf,$$

де $\delta(f,g|D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок задачі характеризується умовою $0 \in \partial\triangle_D(f_0,g_0)$, де $\partial\triangle_D(f_0,g_0)$ - субдиференціал опуклого функціонала $\triangle(f_0,g_0)$ [22], [23].

Підсумуємо наведені формули та означення.

Лема 1. *Нехай $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольнють умову мінімальності* (6). *Нехай спектральні щільності $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ є розв'язком екстрамальної задачі* (15). *Спектральні щільності (f_0, g_0) є найменш сприятливими в класі $D_f \times D_g$ і $h^0 = h(f_0, g_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності ξ_n за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n$ у точках $n = 0, -1, -2, \ldots$, якщо $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.*

6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$. Розглянемо задачу визначення найменш сприятливих спектральних щільностей у класі $D_f^0 \times D_g^0$. Нехай $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$, де

$$D_f^0 = \{f(\theta) | \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \leq P_1\},$$

$$D_g^0 = \{g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) \leq P_2\}.$$

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \left| A_N(e^{i\theta}) - h^0(\theta) \right|^\alpha, \tag{16}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left| h^0(\theta) \right|^\alpha \tag{17}$$

обмежені. Із попередніх результатів випливає, що $\Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right)$ є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$. Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0)$, для $D = D_f^0 \times D_g^0$ отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left| A_N(e^{i\theta}) - h^0(\theta) \right|^\alpha = \alpha_1(f_0(\theta) + g_0(\theta)) \tag{18}$$

$$\left| h^0(\theta) \right|^\alpha = \alpha_2(f_0(\theta) + g_0(\theta)), \tag{19}$$

де константи $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$. Зауважимо $\alpha_1 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta) = P_1$. Також $\alpha_2 \neq 0$, якщо $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\theta) = P_2$.

Маємо такий результат.

Теорема 3. *Нехай спектральні щільності* $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ *задовольняють умову мінімальності* (6)*. Нехай функції* $h_f(f_0, g_0), h_g(f_0, g_0)$*, що визначені за формулами* (16), (17) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_f^0 \times D_g^0$ *для оптимального оцінювання функціонала* $A_N\xi$*, якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком системи рівнянь* (18), (19) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (15)*. Спектральна характеристика* $h_(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_N\xi$ *функціонала* $A_N\xi$ *визначаєтьcя рівняннями* (9), (10).

7. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_u^v \times D_\varepsilon$. Розглянемо задачу визначення найменш сприятливих спектральних щільностей у класі $D_u^v \times D_\varepsilon$ при $\alpha = 2$. Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\varepsilon$, де

$$D_u^v = \{f(\theta) | v(\theta) \leq f(\theta) \leq u(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \leq P_1\},$$

$$D_\varepsilon = \{g(\theta) | g(\theta) = (1 - \varepsilon) g_1(\theta) + \varepsilon \omega(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta \leq P_2\},$$

де спектральні щільності $v(\theta), u(\theta), g_1(\theta)$ відомі та фіксовані, а щільності $v(\theta), u(\theta)$ обмежені. Клас спектральних щільностей D_u^v описує "смугову"модель стохастичних послідовностей. Тоді як клас спектральних щільностей D_ε описує модель ε-забруднення стохастичних послідовностей.

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left| A_N(e^{i\theta}) g_0(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)} \right|}{f_0(\theta) + g_0(\theta)}, \tag{20}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left| A_N(e^{i\theta}) f_0(\theta) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k^0 e^{i\theta(k+1)} \right|}{f_0(\theta) + g_0(\theta)} \tag{21}$$

обмежені.

За цих умов функціонал

$$\tilde{\triangle}(f,g) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(e^{i\theta})g_0(\theta)+C(e^{i\theta})}{f_0(\theta)+g_0(\theta)}\right|^2 f(\theta)d\theta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{A_N(e^{i\theta})f_0(\theta)-C(e^{i\theta})}{f_0(\theta)+g_0(\theta)}\right|^2 g(\theta)d\theta.$$

є неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1\times L_1$. Із умови $0\in\partial\triangle_D(f_0,g_0)$ при $D=D_u^v\times D_\varepsilon$ знаходимо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|\sum_{k=0}^{N}a_ke^{ik\theta}g_0(\theta)+\sum_{k=0}^{\infty}c_k^0e^{i\theta(k+1)}\right|^\alpha=(f_0(\theta)+g_0(\theta))^\alpha(\gamma_1(\theta)+\gamma_2(\theta)+\alpha_1^{-1}) \tag{22}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N}a_ke^{ik\theta}f_0(\theta)-\sum_{k=0}^{\infty}c_k^0e^{i\theta(k+1)}\right|^\alpha=(f_0(\theta)+g_0(\theta))^\alpha(\phi(\theta)+\alpha_2^{-1}), \tag{23}$$

де константи $\gamma_1\le 0$, причому $\gamma_1=0$, якщо $f^0(\theta)\ge v(\theta)$; $\gamma_2\ge 0$, причому $\gamma_2=0$, якщо $f^0(\theta)\le u(\theta)$; $\phi(\theta)\le 0$, $\phi(\theta)=0$, якщо $g_0(\theta)\ge(1-\epsilon)g_1(\theta)$.

Теорема 4. *Нехай спектральні щільності $f_0(\theta)\in D_u^v$, $g_0(\theta)\in D_\varepsilon$ задовольняють умову мінімальності* (6)*. Нехай функції h_f,h_g, що визначені за формулами* (20), (21) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta),g_0(\theta)$ найменш сприятливі в класі $D=D_u^v\times D_\varepsilon$ для оптимального оцінювання функціонала $A_N\xi$, якщо $f_0(\theta),g_0(\theta)$ є розв'язком системи рівнянь* (22), (23) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (15)*. Спектральна характеристика $h(f_0,g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ визначається рівняннями* (9), (10).

8. Висновок. У даній роботі запропоновані методи пошуку оцінок функціоналів від невідомих значень гармонізованих $\alpha-$стійких послідовностей ξ_n за спостереженнями у моменти часу $n=0,-1,-2,\ldots$ послідовності $\xi_n+\eta_n$, де ξ_n та η_n – взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі послідовності.

Задача розв'язана за умови спектральної визначеності, коли спектральні щільності послідовностей відомі, та за умови спектральної невизначеності, коли спектральні щільності послідовностей невідомі, проте описані класи можливих спектральних щільностей. Встановлені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціоналів за умови спектральної визначеності. У тому випадку коли спектральні щільності невизначені, а задані лише класи допустимих щільностей, вказані співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мініміксні(робастні) спектральні характеристики оцінок функціоналів для деяких класів спектральних щільностей.

Список використаної літератури

1. *Колмогоров А. Н.* Сборник статтей. Том. II: Теория вероятностей и математическая статистика. Ред. А. Н. Ширяев. Математика и ее приложения. — М.: Наука, 1986. — 535 с.

2. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications. – The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966. – 163 p.
3. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987. – 526 p.
4. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Supplementary notes and references. – Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987. – 258 p.
5. *Weron A.* Harmonizable stable processes on groups: spectral, ergodic and interpolation properties // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1985. – **68**, №4. – P. 473-491.
6. *Pourahmadi M.* On minimality and interpolation of harmonizable stable processes // SIAM J. Appl. Math. – 1984. – **44**, №5. – P. 1023-1030.
7. *Cambanis S.* Complex stable variables and processes // Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson, P. K. Sen, ed., North-Holland, New York. – 1983. – P. 63-79.
8. *Cambanis S., Masry E.* Spectral density estimation for stationary stable processes // Stochastic Processes and their Applications. – 1984. – **18**, №1. – P. 1-31.
9. *Hosoya Y.* Harmonizable stable processes// Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1982. – **60**. –P. 517-533.
10. *Vastola K. S., Poor H. V.* An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering// Automatica. – 1983. – **28**. – P. 289-293.
11. *Kassam S. A., Poor H. V.* Robust techniques for signal processing: A survey// Proceedings of the IEEE. – 1985. – **73**, №3. – P. 433-481.
12. *Grenander U.* A prediction problem in game theory// Ark. Mat. – 1957. – **3**. – P. 371-379.
13. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів. – К.: ВПЦ "Київський університет 2008. – 320 с.
14. *Moklyachuk M., Golichenko I.* Periodically correlated processes estimates. – LAP Lambert Academic Publishing, 2016. – 308 p.
15. *Moklyachuk M., Masyutka O.* Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes. – LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 296 p.
16. *Луз М. М., Моклячук М. П.* Оцінки функціоналів від процесів зі стаціонарними приростами та коінтегрованих послідовностей. – НВП "Інтерсервіс 2016. – 272 p.
17. *Moklyachuk M. P., Ostapenko V. I.* Minimax interpolation problem for harmonizable stable sequences with noise observations// J. Appl. Math. Stat. – 2015. – **2**, №1. – P. 21-42.
18. *Moklyachuk M. P., Ostapenko V. I.* Minimax interpolation of harmonizable sequences// Theor. Probability and Math. Statist. – 2016. – №92. – P. 135–146.
19. *Singer I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980. – 415 c.
20. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 144 с.
21. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
22. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
23. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. – Princeton: University Press, 1997. – 451 c.

Одержано 26.06.2016