УДК 517.9

**М. М. Перестюк, Ю. М. Перестюк** (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО МНОГОВИДУ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

We study the stability of the invariant toroidal manifold of one class, the linear extension of a dynamical system on a torus.

Досліджуються питання стійкості інваріантного тороїдального многовиду одного класу, лінійного розширення динамічної системи на торі.

**1. Вступ.** Відомо [1], [7], що коли динамічна система

$$\frac{dy}{dt} = Y(y), \quad y \in R^{n+m}$$

має квазіперіодичну траєкторію

$$y = f_0(w_1 t, w_2 t, \dots, w_m t) = f_0(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

з частотним базисом $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, то її замикання породжує тороїдальний многовид. Як показано в [7], для дослідження поведінки траєкторій вихідної системи в деякому околі цього многовиду в певних випадках зручно перейти від координат $(y_1, y_2, \dots, y_{m+n})$ до локальних координат $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ і $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, так щоб рівняння многовиду набуло вигляду: $h = 0$, $\varphi \in T_m$, де $T_m$ — $m$-вимірний тор.

Глибокі результати дослідження інваріантних тороїдальних многовидів підсумовані в фундаментальних монографіях [1],[3],[7]. Мета нашої замітки — узагальнення деяких тверджень, що стосуються стійкості тороїдальних многовидів та їх існування.

**2. Основний результат.** Розглядатимемо в прямому добутку $m$-вимірного тора $T_m$ і евклідового простору $R^n$ систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = col(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in T_m$, $x = col(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$,

$a(\varphi)$, $P(\varphi)$ - відповідно векторна та матрична неперервні $2\pi-$ періодичні по кожній компоненті $\varphi_j$, $j = \overline{1, m}$, функції. Від функції $a(\varphi)$ вимагатимемо також, що вона задовольняє умову Ліпшиця по $\varphi$ з деякою константою Ліпшиця $L > 0$, тобто для будь-яких точок $\varphi', \varphi'' \in T_m$

$$||a(\varphi') - a(\varphi'')|| \le L||\varphi' - \varphi''||. \tag{2}$$

Нагадаємо, (див., наприклад, [5]), що точку $\varphi \in T_m$ динамічної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \varphi \in T_m, \tag{3}$$

називають блукаючою, якщо існують її окіл $U(\varphi)$ і додатне число $T$ такі, що

$$U(\varphi)\bigcap \varphi_t(U(\varphi)) = \varnothing$$

для $t \geq T$. Тут $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ є розв'язок системи рівнянь (3). Позначимо множину блукаючих точок через $W$, а множину неблукаючих точок - через $\Omega = T_m \setminus W$. Множина $W$ блукаючих точок є відкритою інваріантною множиною, бо разом з $\varphi$ блукаючими є і всі точки деякого її околу. Множина $\Omega$ є непорожньою замкненою інваріантною множиною.

Як показано в [5], будь-який розв'язок системи (3) з часом наближається до множини неблукаючих точок, точніше, яке б не було $\varepsilon > 0$ будь-яка фазова точка $\varphi_t(\varphi)$ знаходиться лише скінченний проміжок часу, що не перевищує $T = T(\varepsilon)$, поза $\varepsilon-$ околом $U_\varepsilon(\Omega)$ множини $\Omega$.

**Теорема 1.** *Якщо для системи рівнянь (1) існує додатно визначена квадратична форма $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$ з симетричною матрицею $S(\varphi)$ така, що повна похідна її, складена в силу вихідної системи (1), тобто квадратична форма*

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, x) =< \hat{S}(\varphi)x, x >,$$

*де*

$$\hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S}{\partial \varphi}\cdot a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi),$$

*є від'ємно визначеною на множині $\Omega$ неблукаючих точок системи (3), то тривіальний тор системи рівнянь (1) є асимптотично стійким.*

***Доведення.*** Функція $V(\varphi, x)$ як додатно визначена квадратична форма допускає оцінку

$$\lambda(\varphi) < x, x >\leq V(\varphi, x) \leq \Lambda(\varphi) < x, x >,\ \varphi \in T_m, x \in R^n, \tag{4}$$

де $\lambda(\varphi)$ і $\Lambda(\varphi)$ відповідно найменше і найбільше власне число симетричної матриці $S(\varphi)$. Похідну від функції $V(\varphi, x)$ по $t$ складену в силу системи (1), тобто квадратичну форму $< \hat{S}(\varphi)x, x >$, як від'ємно визначену на множині $\Omega$ можна оцінити аналогічно

$$-\hat{\Lambda}(\varphi) < x, x >\leq< \hat{S}(\varphi)x, x >\leq -\hat{\lambda}(\varphi) < x, x >,\ \varphi \in \Omega, x \in R^n, \tag{5}$$

де $\hat{\lambda}(\varphi)$ і $\hat{\Lambda}(\varphi)$ — відповідно найменше і найбільше з власних чисел симетричної матриці

$$-\frac{1}{2}(\hat{S}(\varphi) + \hat{S}^T(\varphi)).$$

Зафіксуємо тепер достатньо малий $\varepsilon_0$ - окіл $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ множини $\Omega$. Як стверджувалось вище, існує таке число $T = T(\varepsilon_0)$, що будь-яка траєкторія $\varphi_t(\varphi),\ \varphi \in T_m$ на множині блукаючих точок $T_m \setminus U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ перебуває не довше, ніж $T$.

В силу додатньої визначеності квадратичної форми $V(\varphi, x)$ і від'ємної визначеності її похідної на множині $\Omega$, справедливі оцінки:

$$\lambda_0 < x, x >\leq V(\varphi, x) \leq \Lambda_0 < x, x >,\ \varphi \in U_{\varepsilon_0}(\Omega, )\ x \in R^n, \tag{6}$$

$$-\hat{\Lambda}_0 < x, x > \leq \frac{d}{dt} V(\varphi, x) \leq -\hat{\lambda}_0 < x, x >, \ \varphi \in U_{\varepsilon_0}(\Omega, ) \ x \in R^n, \tag{7}$$

де

$$\lambda_0 = \min_{\varphi \in \bar{U}_\varepsilon - 0(\Omega)} \lambda(\varphi), \qquad \Lambda_0 = \max_{\varphi \in \bar{U}_{\varepsilon_0}(\Omega)} \Lambda(\varphi),$$

$$\hat{\lambda}_0 = \min_{\varphi \in \bar{U}_{\varepsilon_0}(\Omega)} \hat{\lambda}(\varphi), \qquad \hat{\Lambda}_0 = \max_{\varphi \in \bar{U}_{\varepsilon_0}(\Omega)} \hat{\Lambda}(\varphi).$$

Тепер міркуємо так: якщо $\varphi \in U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ і для всіх $t > 0$ $\varphi_t(\varphi) \in U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, то з оцінок (6) і (7) для будь-якого розв'язку $x(t) \equiv x_t(t_0, \varphi, x_0)$ маємо:

$$\frac{1}{\Lambda_0} V(\varphi_t(\varphi), x(t)) \leq < x(t), x(t) > \leq -\frac{1}{\hat{\lambda_0}} \frac{d}{dt} V(\varphi_t(\varphi), x(t)),$$

а тому

$$\frac{d}{dt} V(\varphi_t(\varphi), x(t)) \leq -\frac{\hat{\lambda_0}}{\Lambda_0} V(\varphi_t(\varphi), x(t)).$$

Отже,

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq V(\varphi, x_0) e^{-\frac{\hat{\lambda_0}}{\Lambda}(t - t_0)},$$

а значить $x_t(t_0, \varphi, x_0) \to 0$, коли $t \to \infty$.

Нехай тепер $\varphi \in T_m \setminus U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, або ж $\varphi \in U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, але не для всіх $t > 0$ $\varphi_t(\varphi) \in U_{\varepsilon_0}(\Omega)$,

тобто траєкторія $\varphi_t(\varphi)$ може залишати на деякий час множину $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, пізніше знову повертатися в $\varepsilon_0$ - окіл множини $\Omega$, але перебувати поза множиною $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$ така траєкторія може сумарно не більше $T$ часу.

Виходячи з нерівності Важевського [2] дістанемо оцінку зміни будь-якого розв'язку $x_t(t_0, \varphi, x_0)$

на протязі будь-якого часового проміжку довжини $T$ :

$$||x_{t+T}(\tau, \varphi, x(\tau))|| \leq e^{\Lambda(t+T-\tau)} ||x(\tau, \varphi, x_o)||, \ t \geq \tau,$$

$$||x_{\tau+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))|| \leq e^{\Lambda T} ||x_\tau(t_0, \varphi, x_0)||,$$

де $\Lambda = \max\limits_{\varphi \in T_m} \Lambda(\varphi)$, а $\Lambda(\varphi)$ - найбільше з власних чисел симетричної матриці $\frac{1}{2}(P(\varphi) + P^T(\varphi))$. Таким чином, можемо оцінити величину зміни функції $V(\varphi, x)$ вздовж такого розв'язку на часовому проміжку довжини $T$ :

$$V(\varphi_{\tau+T}(\varphi), x_{\tau+T}(\tau, \varphi, x_\tau(t_0, \varphi, x_0))) \leq K e^{2\Lambda T} V(\varphi_\tau(\varphi), x_\tau(t_0, \varphi, x_0)),$$

де через $K$ позначено $\max_{\varphi \in T_m} ||S(\varphi)||$.

Позначивши через $\tau^*(\varphi)$ момент часу входження траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ в множину $U_{\varepsilon_0}(\Omega)$, після якого вона з неї не виходить, для $t \geq \tau^*(\varphi)$ маємо:

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq V(\varphi_{\tau^*}(\varphi), x_{\tau^*}(t_0, \varphi, x_0)) e^{-\frac{\hat{\lambda_0}}{\Lambda_0}(t - \tau^*(\varphi))}, \ t \geq \tau^*(\varphi).$$

З врахуванням попередньої нерівності, остаточно дістаємо, що

$$V(\varphi_t(\varphi), x_t(t_0, \varphi, x_0)) \leq Ke^{2\Lambda T} \cdot e^{-\frac{\hat{\lambda_0}}{\Lambda_0}(t-t_0)}, \ t \geq t_0.$$

Звідси робимо висновок, що

$$||x_t(t_0, \varphi, x_0)|| \to 0, \ t \to \infty,$$

а це і завершує доведення теореми 1.

**Теорема 2.** *Якщо для системи рівнянь (1) існує квадратична форма* $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$ *така, що похідна від* $V(\varphi, x)$*, складена в силу рівнянь (1), є додатно визначеною на множині* $\Omega$ *неблукаючих точок динамічної системи* $\varphi = a(\varphi)$*, а сама функція* $V(\varphi, x)$ *на цій множині не є від'ємно сталою, то тривіальний тор системи (1) нестійкий.*

***Доведення.*** Для довільного числа $\delta > 0$ в області $\varphi \in \Omega$, $||x|| < \delta$ в умовах теореми знайдеться точка $(\varphi_0, x_0)$ така, що $V(\varphi_0, x_0) > 0$. Покажемо, що розв'язок вихідної системи (1), що виходить з цієї точки, з часом залишить зафіксований $\varepsilon_0$- окіл тора $x \equiv 0$. Дійсно, припустимо що це не так. Тобто для всіх $t \geq t_0$, $x(t) \equiv x_t(t_0, \varphi, x_0) \in J_{\varepsilon_0}(T_m)$.

Розглянемо функцію $V(\varphi, x)$ та її похідну $\frac{d}{dt}V(\varphi, x)$ вздовж цього розв'язку. Так як множина $\Omega$ неблукаючих точок є інваріантною, то $\varphi_t(\varphi_0) \in \Omega$ для всіх $t \in R$. В силу додатно визначеності квадратичної форми $< \hat{S}(\varphi)x, x >$ на множині $\Omega$ можемо стверджувати, що для всіх $t \geq t_0$ $V(\varphi_t(\varphi_0), x_t(t_0, \varphi_0, x_0)) \geq V(x_0)$.

З цієї нерівності випливає, що існує таке додатне число $a > 0$, що $||x_t(t_0, \varphi_0, x_0)|| \geq a$ для всіх $t \geq t_0$.

Звідси робимо висновок, що існує таке додатне число $\beta > 0$, що для всіх $t \geq t_0$

$$\frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi_0), x_t(t_0, \varphi_0, x_0)) \geq \beta,$$

а, отже,

$$V(\varphi_t(\varphi_0), x_t(t_0, \varphi_0, x_0)) \geq V(\varphi_0, x_0) + \beta(t - t_0).$$

А це суперечить нашому припущенню про те що $x_t(t_0, \varphi_0, x_0) \in J_{\varepsilon_0}(T_m)$, бо в цій множині функція $V(\varphi, x)$ є обмеженою.

Доведена теорема 2 є аналогом класичної теореми Ляпунова про нестійкість положення рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь. Доведемо ще одну теорему, яка є аналогом другої теореми Ляпунова про нестійкість положення рівноваги динамічної системи.

**Теорема 3.** *Якщо для системи рівнянь (1) існують квадратична форма* $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$ *і додатне число* $\alpha$ *такі, що повна похідна по* $t$ *від* $V(\varphi, x)$*, складена в силу системи (1)*

$$\frac{dV}{dt} =< \hat{S}(\varphi)x, x >, \quad \hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi),$$

*має вигляд*

$$\frac{d}{dt}V(\varphi,x)=\alpha V(\varphi,x)+W(\varphi,x), \tag{8}$$

*де $W(\varphi,x)$ або тотожній нуль, або ж додатно стала на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi}=a(\varphi)$ квадратична форма, і якщо в цьому випадку $V(\varphi,x)$ не є від'ємно сталою на множині $\Omega$, то тривіальний тор системи (1) нестійкий.*

***Доведення.*** Як і при доведенні попередньої теореми виберемо в будь-якому малому $\delta$- околі тривіального тора початкову точку $(\varphi_0,x_0)$ з умови $V(\varphi_0,x_0)>0,\ \varphi_0\in\Omega$ і переконаємося, що в умовах теореми розв'язок $(\varphi_t(\varphi),x_t(t_0,\varphi_0,x_0))$ з часом залишить фіксований $\varepsilon_0$ - окіл тривіального тора. Припустимо, що це не так. Розглянемо функції $V(\varphi,x)$ і $\frac{d}{dt}V(\varphi,x)$ вздовж вказаного розв'язку.

В силу інваріантності множини $\Omega$, розв'язок першої із систем (1) $\varphi_t(\varphi_0)\in\Omega,\ t\in R$,

а тому

$$\frac{d}{dt}V(\varphi_t(\varphi_0),x_t(t_0,\varphi_0,x_0))\geq\alpha V(\varphi_t(\varphi_0),x_t(t_0,\varphi_0,x_0)),$$

отже

$$V(\varphi_t(\varphi_0),x_t(t_0,\varphi_0,x_0))\geq V(\varphi_0,x_0)e^{\alpha(t-t_0)},\ t\geq t_0.$$

і з часом функція $V(\varphi,x)$ вздовж вказаного розв'язку стає як завгодно великою, тобто розв'язок $(\varphi_t(\varphi_0),x_t(t_0,\varphi_0,x_0))$ з часом залишить зафіксований $\varepsilon_0$ - окіл тривіального тора. Теорему доведено.

Вкажемо один випадок, коли для системи (1) існує квадратична форма $V(\varphi,x)$, що задовольняє умовам теореми 3.

**Теорема 4.** *Якщо в системі (1) матриця $P(\varphi)$ є сталою на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi}=a(\varphi)$, $P(\varphi)=P_0,\ \varphi\in\Omega$, і хоч одне з власних чисел сталої матриці $P_0$ має додатну дійсну частину, то для системи (1) існує квадратична форма $V(\varphi,x)$, що задовольняє умовам теореми 3, а, отже, тривіальний тор системи (1) нестійкий.*

***Доведення.*** Запишемо систему рівнянь (1) в вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\quad \frac{dx}{dt}=P_0x+(P(\varphi)-P_0)x. \tag{9}$$

З теореми 3 [4 §22 с 70] випливає, що завжди знайдеться квадратична форма $V_0(x)$ і додатне число $\alpha$ такі, що

$$<gradV_0(x),P_0x>=\alpha V_0(x)+<x,x>$$

і при цьому квадратична форма $V_0(x)$ не є від'ємно сталою. Обчислимо повну похідну по $t$ від квадратичної форми $V_0(x)$ вздовж розв'язків системи (1):

$$\frac{d}{dt}V_0(x)=<gradV_0(x),P(\varphi)x>=<gradV_0(x),P_0x>+$$

$$+<gradV_0(x),(P(\varphi)-P_0)x>=\alpha V_0(x)+<x,x>+W(\varphi,x),$$

де через $W(\varphi, x)$ позначено квадратичну форму $< gradV_0(x), (P(\varphi) - P_0)x >$. Оскільки остання перетворюється в нуль на множині $\Omega$, то $< x, x > + W(\varphi, x)$ є додатно визначеною на $\Omega$, а тому $V_0(x)$ задовольняє умови теореми 3, отже, тривіальний тор системи (1) в цьому випадку нестійкий.

Твердження теорем 1-3 можна застосувати до дослідження стійкості нелінійних по $x$ розширень динамічних систем на торі, тобто систем виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x, \tag{10}$$

де $P(\varphi, x)$ - нелінійна матрична функція $2\pi-$ періодична по $\varphi \in T_m$, визначена для $x \in R^n$, $||x|| \le h$, $h > 0$, і є неперервною в $h-$ околі тора $T_m$.

**Теорема 5.** *Якщо для системи рівнянь*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, 0)x \tag{11}$$

*існує додатно визначена квадратична форма $V(\varphi, x =< S(\varphi), x, x >)$ така, що повна похідна її по $t$, складена в силу рівнянь (11)*

$$\frac{dV}{dt} =< \hat{S}(\varphi)x, x >, \quad \hat{S}(\varphi) = \frac{\partial S}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi, 0) + P^T(\varphi, 0)S(\varphi),$$

*є від'ємно визначеною на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, то тривіальний тор системи рівнянь (10) є асимптотично стійким.*

***Доведення.*** Нехай $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$- додатно визначена квадратична форма, що задовольняє умові теореми 5. Обчислимо повну похідну від $V(\varphi, x)$ по $t$ в силу системи рівнянь (10):

$$\frac{dV}{dt} =< \hat{S}(\varphi)x, x > + < [S(\varphi)(P(\varphi, x) - P(\varphi, 0)) +$$

$$+ (P^T(\varphi, x) - P^T(\varphi, 0)S(\varphi))]x, x >=$$

$$=< \hat{S}(\varphi)x, x > + W(\varphi, x).$$

Оскільки $< \hat{S}(\varphi)x, x >$ за умовою теореми є від'ємно визначеною на множині $\Omega$, а функція $W(\varphi, 0) = 0$, то і функція

$$< \hat{S}(\varphi)x, x > + W(\varphi, x)$$

є від'ємно визначеною при $\varphi \in \Omega$, $||x|| \le h_0$ для достатньо малого $h_0 > 0$.

Повторюючи схему доведення теореми 1 з врахуванням, що $||x|| \le h_0$, переконуємося в справедливості трердження теореми 5.

Наведемо ще одне твердження про нестійкість тривіального тора системи рівнянь (10).

**Теорема 6.** *Нехай для системи рівнянь (11) існує квадратична форма $V(\varphi, x) =< S(\varphi)x, x >$, повна похідна якої, складена в силу рівнянь (11) $\frac{dV}{dt} <$*

*$\hat{S}(\varphi)x, x >$ є додатно визначеною на множині $\Omega$ неблукаючих точок динамічної системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$, а сама функція $V(\varphi, x)$ на цій множині не є від'ємно сталою, то тривіальний тор системи рівнянь (10) нестійкий.*

***Доведення.*** Обчислимо похідну по $t$ в силу системи рівнянь (10) функції $V(\varphi, x)$, що задовольняє умови теореми:

$$\frac{dV}{dt} = < \hat{S}(\varphi)x, x > + W(\varphi, x)$$

$$W(\varphi, x) = < [S(\varphi)(P(\varphi, x) - P(\varphi, 0)) + (P(\varphi, x) - P(\varphi, 0))^T S(\varphi)]x, x > .$$

Так як функція $< \hat{S}(\varphi)x, x >$ за умовою теореми є додатно визначеною на множині $\Omega$, а функція $W(\varphi, 0) = 0$, то і функція

$$< \hat{S}(\varphi)x, x > + W(\varphi, x)$$

є додатно визначеною при $\varphi \in \Omega$, $||x|| \leq h_0$.

Далі, повторюючи схему доведення теореми 2 і враховуючи, що $||x|| \leq h_0$, переконуємося в справедливості твердження теореми 6.

Твердження доведених теорем можна використати для доведення існування тороїдальних многовидів систем диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, x)x + C(\varphi), \tag{12}$$

в яких $a(\varphi)$, $P(\varphi, x)$ задовольняють умовам, накладеним на них вище, а $C(\varphi)$ - неперервна на $T_m$ $n-$ вимірна вектор функція, $2\pi-$ періодична по кожній з компонент $\varphi_j$, $j = \overline{1, n}$.

Зокрема, при виконанні умов теореми 5, можна переконатися, що для системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi, 0)x + C(\varphi) \tag{13}$$

існує функція $G(\tau, \varphi)$ Гріна-Самойленка задачі про існування асимптотично стійкого тороїдального многовиду системи рівнянь (13) для будь-якої $2\pi-$ періодичної неперервної функції $C(\varphi)$.

Цей многовид задається виразом

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} G(\tau, \varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \tag{14}$$

Застосовуючи класичну методику [7] побудови тороїдальних многовидів нелінійних систем, в умовах теореми 5 можна довести і існування асимптотично стійкого тороїдального многовиду системи рівнянь (12).

Залишаючи питання існування тороїдальних многовидів для подальших досліджень, в даній статті наведемо лише один ілюстративний приклад.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \cos\varphi \cdot x + f(\varphi), \tag{15}$$

в якій $a(\varphi)$ і $f(\varphi)$ - неперервні $2\pi-$ періодичні функції на колі $S$ (одновимірному торі), $\varphi \in S$, а $x$- скалярна величина, $x \in R$. Додатково вимагатимемо, що $a(\varphi)$ - ліпшицева функція. Нехай $a(\pi) = 0$, а для всіх інших $\varphi \in S$ $a(\varphi)$ набуває значень одного знаку.

В даному прикладі множиною неблукаючих точок $\Omega$ динамічної системи на колі є тільки одна точка $\varphi = \pi$. Додатно визначена функція $V(\varphi, x) = x^2$ задовольняє умови теореми 5. Її похідна, складена в силу рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = \cos\varphi \cdot x, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}V(\varphi, x) = 2\cos\varphi \cdot x^2$$

є від'ємно визначеною на $\Omega$, а тому функція Гріна-Самойленка має вигляд

$$G(\tau, \varphi) = e^{\int_\tau^0 \cos\varphi_S(\varphi)dS}, \ \tau < 0.$$

Отже, для будь-якої неперервної $2\pi-$ періодичної по $\varphi$ функції $C(\varphi)$ система (14) має асимптотично стійку інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^0 e^{\int_\tau^0 \cos\varphi_S(\varphi)dS} C(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.$$

Нехай тепер в рівняннях (15) $a(0) = 0$, а при всіх інших значення $\varphi \in S$ $a(\varphi)$ набуває значень одного знаку. В цьому випадку функція $V(\varphi, x) = x^2$ задовольняє умови теореми 2. Її похідна $\frac{dV}{dt} = 2\cos\varphi x^2$ є додатно визначеною на множині $\Omega$ ($\varphi = 0$). Функція Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори в цьому випадку також існує

$$G(\tau, \varphi) = e^{\int_\tau^0 \cos\varphi_S(\varphi)dS}, \ \tau > 0,$$

але інваріантна множина

$$x = u(\varphi) = -\int_0^\infty G(\tau, \varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$$

в цьому випадку є нестійкою.

## Список використаної літератури


1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 480 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1992. – 272 с.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальних уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 552 с.
6. *Перестюк М. О., Фекета П. В.* Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем // Укр. мат. журн., - 2013. - 65, №11. – С 1498–1505.
7. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.


Одержано 26.06.2016