УДК 519.21

Л. О. Сінельник, Г. М. Торбін (Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова)

СИНГУЛЯРНІСТЬ НЕСКІНЧЕННИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ, ПОРОДЖЕНИХ ЧИСЛАМИ ПІЗО

The paper is devoted to study asymptotic properties of the Fourier-Stieltjes transforms (characteristic functions) $f_\xi(t)$ of infinite Bernoulli convolutions, i.e. distributions of random variables of the the following type $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$ where $\{\xi_k\}$ is a sequence of independent random variables taking values -1 and 1 with probabilities p_{0k} and p_{1k} respectively; $\{a_k\}$ is a sequence of real numbers such that the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converges absolutely. We study the family of distributions, which are generated by series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ such that $a_k = \lambda^k l_k$, where $\{l_k\}$ is a sequence of positive integers, and $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ is a Pisot number. As the main result of the paper we prove the singularity (w.r.t. Lebesgue measure) and non-Reichmann-property ($L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| > 0$) for the family (it is of continuum cardinality) of infinite Bernoulli convolutions generated by the above mentioned sequences.

Робота присвячена дослідженню асимптотики перетворення Фур'є-Стілт'єса (характеристичної функції) $f_\xi(t)$ нескінченних згорток Бернуллі, тобто розподілів випадкових величин виду $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$ де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно; $\{a_k\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно збігається. Досліджено сімейство, що породжується рядами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ такими, що $a_k = \lambda^k l_k$, де $\{l_k\}$ – довільна послідовність натуральних чисел, а $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ – число Пізо. Основним результатом роботи є доведення сингулярності (відносно міри Лебега) та нерайхмановості ($L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| > 0$) для континуального сімейства нескінченних згорток Бернуллі, породжених вказаними послідовностями.

1. Вступ. Розглянемо розподіл випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k \tag{1}$$

де $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно; $\{a_k\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно збігається. Функція розподілу такої випадкової величини називається нескінченною згорткою Бернуллі. З теореми Джессена-Вінтнера [1] випливає, що випадкова величина ξ має чистий розподіл (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний (відносно міри Лебега) або чисто сингулярно неперервний). Теорема П.Леві [2] дає необхідні і достатні умови дискретності: міра μ_ξ дискретна тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.

У симетричному випадку $p_{0k} = p_{1k} = \frac{1}{2}$, коли $a_k = \lambda^k$, де $\lambda \in (0,1)$ тип розподілу випадкової величини в залежності від λ інтенсивно досліджується вже понад 80 років (див., наприклад, [3–6, 8–11]). При $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ спектр S_ξ — ніде не щільна множина нульової міри Лебега, і тому ймовірнісна міра μ_ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Якщо $\lambda = \frac{1}{2}$, то ймовірнісна міра μ_ξ має абсолютно неперервний розподіл.

Якщо $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, то структура розподілу випадкової величини ξ є значно складнішою. Спектром S_ξ у цьому випадку буде відрізок $\left[\frac{-\lambda}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}\right]$. Тому деякий час існувала гіпотеза про абсолютну неперервність ймовірнісної міри μ_ξ. Користуючись методом характеристичних функцій, П.Ердеш довів [3], що для тих значень $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, при яких $\frac{1}{\lambda}$ є числом Пізо (нагадаємо, що дійсне алгебраїчне число $\alpha > 1$ називається числом Пізо (або числом Пізо-Віджаярагхавана, або PV-числом), якщо всі алгебраїчно спряжені з ним числа за модулем строго менші одиниці), має місце нерівність $L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| > 0$, де $f_\xi(t)$ – характеристична функція випадкової величини ξ (перетворення Фур'є-Стільт'єса відповідної ймовірнісної міри μ_ξ). Отже, випадкова величина ξ має сингулярний розподіл. На сьогоднішній день невідомі приклади інших значень $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ при яких ймовірнісна міра μ_ξ є сингулярною (більш того, у 1995 році Борис Солом'як [9, 10] довів одну з широковідомих гіпотез Ердеша про те, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) чисел $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ відповідна нескінченна згортка Бернуллі буде мати абсолютно неперервний розподіл). Основною причиною проблем, які виникають при дослідженні структури таких мір є той факт, що при $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ нескінченні згортки Бернуллі, хоч і мають самоподібні розподіли, але належать до мір з суттєвими перекриттями (майже всі (в сенсі міри Лебега) точки спектра мають континуальну кількість зображень у вигляді $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k a_k$, де $\alpha_k \in \{-1, 1\}$).

У даній статті для загального випадку незалежності випадкових величин ξ_k досліджуються асимптотичні властивості характеристичних функцій нескінченних згорток Бернуллі при $a_k = \lambda^k \cdot l_k$, де $\{l_k\}$ — деяка послідовність натуральних чисел, а $\frac{1}{\lambda}$ є числом Пізо (у цьому випадку досліджувані розподіли μ_ξ не є, взагалі кажучи, самоподібними). Основним результатом роботи є повне дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини ξ і доведення сингулярності та нерайхмановості ($L_\xi > 0$) для континуального сімейства нескінченних згорток Бернуллі, породжених вказаними послідовностями.

2. Про сингулярність нескінченних згорток Бернуллі, породжених PV-числами. Як відомо, характеристичні функції є потужним інструментом вивчення властивостей ймовірнісних розподілів. Зокрема, за асимптотичними властивостями модуля характеристичної функції можна судити про тип функції розподілу. Відомо [12], що будь-яка функція розподілу може бути єдиним чином представлена у виді:

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_{as}(x), \tag{2}$$

де $F_d(x)$ — дискретна, $F_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна, $F_{as}(x)$ — сингулярно неперервна функції розподілу, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Функція розподілу називається чистою, якщо один із коефіцієнтів в розкладі (2) дорівнює 1.

Нехай $L_\xi := \overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)|$. Відомо [12], що у випадку коли $f_\xi(t)$ є характеристичною функцією чисто дискретного розподілу ($\alpha_1 = 1$), то $L_\xi = 1$. Якщо $f_\xi(t)$ відповідає деякому абсолютно неперервному розподілу ($\alpha_2 = 1$), то $L_\xi = 0$. Якщо $f_\xi(t)$ — характеристична функція сингулярного розподілу ($\alpha_3 = 1$), тоді величина L_ξ може бути будь-яким числом між 0 і 1.

Розглянемо розподіл випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, де $\{\xi_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 і 1, з ймовірностями p_{0k} і p_{1k} відповідно; $a_k = \lambda^k l_k$, де $\{l_k\}$ – довільна послідовність натуральних чисел.

Теорема 1. *Якщо $\{l_k\}$ – обмежена послідовність натуральних чисел, а $\frac{1}{\lambda}$ – PV-число, то ймовірнісна міра μ_ξ сингулярно (відносно міри Лебега) розподілена і $L_\xi > 0$. При цьому μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$$

і сингулярно неперервною, якщо останній нескінченний добуток розбігається до нуля.

Доведення. Розглянемо характеристичну функцію випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$. Неважко показати (див., наприклад, [11]), що для характеристичної функції даної випадкової величини справедлива рівність:

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)}.$$

Тоді

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sin^2(a_k t)\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(a_k t).$$

Оскільки $\{l_k\}$ – обмежена послідовність натуральних чисел, то існує таке $M > 0$, що $l_k \leq M$, $\forall k \in N$. Нехай s_0 – найменше натуральне число, для якого:

$$M \cdot \lambda^{s_0} < \frac{1}{10}. \tag{3}$$

Виберемо послідовність $t_n = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \pi$. Тоді

$$|f_\xi(t_n)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2\left(\lambda^k l_k \cdot \frac{\pi}{\lambda^n}\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda l_1\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda^2 l_2\right) \cdot \ldots \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^n} \cdot \lambda^n l_n\right) \cdot \ldots =$$
$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-1}} \cdot l_1\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-2}} \cdot l_2\right) \cdot \ldots \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot l_{n-1}\right) \cos^2\left(\pi l_n\right) \cdot$$
$$\cdot \cos^2\left(\pi\lambda l_{n+1}\right) \cos^2\left(\pi\lambda^2 l_{n+2}\right) \cdot \ldots \cdot \cos^2\left(\pi\lambda^{s_0} l_{n+s_0}\right) \cdot$$
$$\cdot \cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+1} l_{n+s_0+1}\right) \cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+2} l_{n+s_0+2}\right) \cdot \ldots \cdot \cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+k} l_{n+s_0+k}\right) \ldots =$$
$$= A(n,\lambda) \cdot B(n,\lambda) \cdot C(n,\lambda),$$

де

$$A(n,\lambda) = \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-1}} \cdot l_1\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-2}} \cdot l_2\right) \cdot \ldots \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot l_{n-1}\right) \cos^2\left(\pi l_n\right),$$

$$B(n,\lambda) = \cos^2\left(\pi\lambda l_{n+1}\right)\cos^2\left(\pi\lambda^2 l_{n+2}\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\pi\lambda^{s_0} l_{n+s_0}\right),$$

$$C(n,\lambda) = \cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+1} l_{n+s_0+1}\right)\cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+2} l_{n+s_0+2}\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\pi\lambda^{s_0+k} l_{n+s_0+k}\right)\ldots$$

Розглянемо нескінченний добуток $C(\lambda)$:

$$C(n,\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2\left(\pi\cdot l_{n+s_0+k}\cdot\lambda^{s_0+k}\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\lambda^k\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\pi}{10}\lambda^k\right)^2\right) > 0,$$

оскільки збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{10}\lambda^k\right)^2 < \infty$.

Отже, $C(n,\lambda) \geq c_0 > 0$, де $c_0 = const$.

Розглянемо добуток $B(n,\lambda)$. Він має скінченну кількість (s_0) множників. Тому $B(n,\lambda) > 0$, тоді і коли серед його множників відсутні нулі, що рівносильно умові

$$l_{n+k}\cdot\lambda^k \notin \left\{\frac{p}{2},\quad p=2m+1,\quad m\in N\right\},\ \forall k\in\{1,2,\ldots,s_0-1\}.$$

Покажемо, що $l_{n+k}\cdot\lambda^k \neq \frac{p}{2}$, де $p=2m+1$, $m\in \mathrm{N}$, $\forall k\in\{1,2,\ldots,s_0-1\}$.

Припустимо, що $\lambda^k = \frac{p}{2\cdot l_{n+k}}$ для деякого k. Тобто що $\alpha^k = \frac{2l_{n+k}}{p}$, $p=2m+1$, $m\in\mathrm{N}$, (оскільки $\lambda=\frac{1}{\alpha}$, де α – число Пізо). Тоді

$$|\alpha| = \sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}}.$$

Можливі два випадки: $|\alpha|>1$ або $|\alpha|\leq 1$.

Якщо припустити, що $|\alpha| = \sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}} \leq 1$, то отримуємо суперечність з означенням числа Пізо (за означенням, число Пізо більше одиниці).

Розглянемо випадок, коли $|\alpha|>1$. Тоді, α – корінь рівняння $x^k p = 2l_{n+k}$. Але всі корені такого рівняння лежатимуть на колі радіуса $\sqrt[k]{\frac{2l_{n+k}}{p}}$. Це означає, що всі спряжені числа алгебраїчного числа α за модулем будуть більші за 1, що суперечить тому, що α – число Пізо.

Таким чином, $l_{n+k}\cdot\lambda^k \notin \left\{\frac{p}{2},\quad p=2m+1,\quad m\in Z\right\},\ \forall k\in\{1,2,\ldots,s_0-1\}$ і серед множників добутку $B(n,\lambda)$ немає жодного нуля. Покажемо тепер, що $B(n,\lambda)$ відокремлений від нуля деякою константою, що не залежить від n.

Оскільки $\{l_n\}$ – обмежена послідовність ($l_k \leq M$), то значення виразу $l_{n+k}\cdot\lambda^k$ належить множині

$$\begin{gathered}\{1\cdot\lambda, 1\cdot\lambda^2, 1\cdot\lambda^3,\ldots,1\cdot\lambda^{s_0},\\ 2\cdot\lambda, 2\cdot\lambda^2, 2\cdot\lambda^3,\ldots,2\cdot\lambda^{s_0},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ M\cdot\lambda, M\cdot\lambda^2, M\cdot\lambda^3,\ldots,M\cdot\lambda^{s_0}\}.\end{gathered}$$

Як було показано вище,

$$l_{n+k}\cdot\lambda^k \notin \left\{\frac{p}{2},\quad p=2m+1,\quad m\in Z\right\}.$$

Розглянемо наступний добуток:

$$P(\lambda) = \cos^2(1\cdot\lambda\pi)\cos^2(1\cdot\lambda^2\pi)\cos^2(1\cdot\lambda^3\pi)\cdot\ldots\cdot\cos^2(1\cdot\lambda^{s_0}\pi)\cdot$$

$$\cdot\cos^2(2\cdot\lambda\pi)\cos^2(2\cdot\lambda^2\pi)\cos^2(2\cdot\lambda^3\pi)\cdot\ldots\cdot\cos^2(2\cdot\lambda^{s_0}\pi)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\cos^2(M\cdot\lambda\pi)\cos^2(M\cdot\lambda^2\pi)\cos^2(M\cdot\lambda^3\pi)\cdot\ldots\cdot\cos^2(M\cdot\lambda^{s_0}\pi).$$

З проведених вище міркувань випливає, що такий добуток додатній: $P(\lambda) = b_0 = const$, і, очевидно, не залежить від n.

Оскільки $B(n,\lambda) \geq P(\lambda)$, то

$$B(n,\lambda) = \cos^2\left(\pi\lambda l_{n+1}\right)\cos^2\left(\pi\lambda^2 l_{n+2}\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\pi\lambda^{s_0} l_{n+s_0}\right) \geq b_0 > 0.$$

Розглянемо добуток $A(n,\lambda)$:

$$A(n,\lambda) = \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-1}}\cdot l_1\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda^{n-2}}\cdot l_2\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}\cdot l_{n-1}\right)\cdot\cos^2(\pi\cdot l_n) =$$

$$= \cos^2\left(\pi\cdot\alpha^{n-1}l_1\right)\cos^2\left(\pi\cdot\alpha^{n-2}l_2\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\pi\cdot\alpha l_{n-1}\right)\cdot 1.$$

Оскільки α є PV-числом, то існує така константа $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, що $\rho(\alpha^n, N) \leq \theta^n, \forall n \in N$, тобто $|z_n - \alpha^n| \leq \theta^n$, де z_n – найближче до α^n натуральне число. Тоді

$$\alpha^{n-1}l_1 = \left(\alpha^{n-1} - z_{n-1} + z_{n-1}\right)\cdot l_1 = \left(\alpha^{n-1} - z_{n-1}\right)\cdot l_1 + z_{n-1}\cdot l_1.$$

Звідси:

$$\cos^2\left(\pi\alpha^{n-1}\cdot l_1\right) = \cos^2\left(\left(\alpha^{n-1} - z_{n-1}\right)\cdot l_1\pi\right) \geq \cos^2\left(\theta^{n-1}\cdot l_1\pi\right).$$

Аналогічно отримаємо

$$\cos^2\left(\pi\alpha^{n-2}\cdot l_2\right) \geq \cos^2\left(\theta^{n-2}\cdot l_2\pi\right),$$

$$\ldots$$

$$\cos^2\left(\pi\alpha\cdot l_{n-1}\right) \geq \cos^2\left(\theta\cdot l_{n-1}\pi\right).$$

Таким чином:

$$A(n,\lambda) \geq \cos^2\left(\theta^{n-1}\cdot l_1\pi\right)\cdot\cos^2\left(\theta^{n-2}\cdot l_2\pi\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\theta\cdot l_{n-1}\pi\right).$$

Оскільки $\{l_k\}$ –обмежена послідовність, то існує таке число m_0, що для всіх $k \geq m_0$ і для всіх $s \in N$:

$$\theta^k l_s \leq \theta^k\cdot M < \frac{1}{10}.$$

Тоді:

$$A(n,\lambda) \geq \cos^2(\theta^{n-1}\cdot l_1\pi)\cdot\ldots\cdot\cos^2(\theta^{m_0+1}\cdot l_{n-m_0-1}\pi)\cdot\cos^2(\theta^{m_0}\cdot l_{n-m_0}\pi)\cdot\ldots\cdot\cos^2(\theta\cdot l_{n-1}\pi)$$

Розглянемо добуток

$$D(n) := \cos^2\left(\theta^{n-1}\cdot l_1\pi\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\theta^{m_0+1}\cdot l_{n-m_0-1}\pi\right) \geq$$

$$\geq \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta^2\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta^{n-m_0-1}\right) \geq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta^k\right)\right) \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta^k\right)^2\right) = d_0 > 0,$$

оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{10}\cdot\theta^k\right)^2$ збігається. Таким чином, $D(n) \geq d_0 > 0,\ \forall n \in N$.

Розглянемо добуток

$$E(n) := \cos^2\left(\theta^{m_0}\cdot l_{n-m_0}\pi\right)\cdot\ldots\cdot\cos^2\left(\theta\cdot l_{n-1}\pi\right).$$

Зауважимо, що якщо існує $\theta_1 \in (0,1)$, яке задовольняє нерівність

$$|z_k - \alpha^k| \leq \theta_1^k, \quad \forall k \in N,$$

то довільне трансцендентне число $\theta \in (\theta_1, 1)$ буде також задовольняти нерівність:

$$|z_k - \alpha^k| \leq \theta^k, \quad \forall k \in N.$$

Тому, не порушуючи загальності міркувань, ми можемо обрати θ трансцендентним числом, і тоді для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, m_0\}$ число $\theta^k \cdot l_{n-k}$, є трансцендентним. Тому серед множників добутку $E(n)$ немає жодного нульового. Отже, $E(n) \geq e_0 > 0$, де $e_0 = const$.

Тоді

$$A(n,\lambda) \geq D(n)\cdot E(n) \geq d_0\cdot e_0 > 0.$$

Таким чином, ми показали, що:

$$|f_\xi(t_n)| \geq A(n,\lambda)\cdot B(n,\lambda)\cdot C(n,\lambda) \geq d_0\cdot e_0\cdot b_0\cdot c_0 > 0,\ \forall n \in N.$$

Тому $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}\,|f_\xi(t)| \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|f_\xi(t_n)| > 0$, тобто $L_\xi > 0$.

З умови $L_\xi > 0$ випливає, що розподіл випадкової величини ξ не є абсолютно неперервним. З теореми Джессена-Вінтнера [1] випливає чистота розподілу. Отже, розподіл випадкової величини ξ є сингулярним відносно міри Лебега. Беручи до уваги теорему P.Lévy [2], приходимо до висновку, що даний розподіл є чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$ і сингулярно неперервним, якщо останній нескінченний добуток розбігається до нуля.

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України) та Alexander von Humboldt Stiftung.

Список використаної літератури

1. *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function //Trans. Amer. Math. Soc. –1935. –**38**. –P. 48-88 .
2. *Lévy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes// Studia Math. –1931. –**3**. –P. 19-155 .
3. *Erdos P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions// Amer. J. Math. –1939. –**61**. –P. 974–976.

4. *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions.// Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. –**102**. –P. 409-432.
5. *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions// Bull. Sci. Math. –2008. –**132**, №8. – P. 711–727.
6. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it// Rev. Roum. Math. Pures Appl. –2009. –**54**, №2. –P. 85-115.
7. *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовірностей та математична статистика. –2008. –**79**. –P. 34-49.
8. *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions// Fractal geometry and Stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), 39–65, Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel, 2000.
9. *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof// Math. Res. Lett. –1996. –**3** №2. – P. 231–239.
10. *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda$(an Erdos problem)// Ann. of Math. –1995. –**142** №3. –P. 611–625.
11. *Сінельник Л., Торбін Г.* Асимптотичні властивості перетворень Фур'є-Стілт'єса для деяких класів нескінченних згорток Бернуллі// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки –2012. –**13** №2. –С. 229-242.
12. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424 с.

Одержано 30.05.2016