УДК 517.5

$\boxed{\text{М. А. Сухорольський}}$, **І. В. Андрусяк, Л. І. Коляса, О. Я. Бродяк**
(Нац. ун-т "Львівська політехніка")

# БІОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Applying the powers of conformal mappings from a strip onto a disk, we construct biorthogonal systems of functions. We also construct solutions to the boundary value problems for the Helmholtz equation in the case when the boundary functions is defined by series in terms of biorthogonal systems of functions.

Використовуючи конформні відображення смуги на круг, отримано системи функцій, які є базисами у просторах функцій, аналітичних у цій області. Побудовано розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца у вигляді функціональних рядів, членами яких є біортогональні системи функцій.

**1. Вступ.** Одна із систем аналітичних функцій, біортогональних на відповідних замкнених кривих у однозв'язній області комплексної площини, задає базис у просторі функцій, аналітичних у цій області. У роботах [1], [2], [3], [4], [5] досліджено розвинення функцій у ряди за системами многочленів (Фабера, Бернуллі, Ейлера та інших) та многочленів за експоненціальними функціями з використанням контурного інтегрування та конформних перетворень. У роботах [7], [8] розглянуто властивості біортогональних систем функцій та їх використання для побудови розв'язків плоских та просторових крайових задач для рівняння Гельмгольца.

У даній роботі побудовано системи біортогональних функцій з використанням конформних відображень смуги на круг, які є базисами у просторах функцій, аналітичних у цій області. Ґрунтуючись на розвиненнях аналітичних функцій в ряди за базисами, побудовано розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца.

**2. Біортогональні системи функцій.** Нехай

$$w = \varphi(z) \tag{1}$$

– конформне відображення однозв'язної області $D$ (точка 0 належить області $D$) розширеної комплексної $z$-площини на круг $K := \{w : |w| < 1\}$ комплексної $w$-площині таке, що $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\varphi(z)}{z} = 1$, і нехай $z = h(w)$ обернене відображення.

Система функцій $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ і спряжена до неї система $\{1/w^{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ є біортогональними на замкнутому контурі, тобто

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{w^n}{w^{m+1}} dw = \delta_{nm}, \tag{2}$$

де $C_r := \{w : |w| = r,\ 0 < r < 1\}$. Як показано в [див. [2], с. 612], система $\{w^n\}$ є базисом у просторі функцій, аналітичних у крузі $K$, а система $\{1/w^{m+1}\}$ – базис у просторі функцій, аналітичних зовні круга $\overline{K} = \{w : |w| \le 1\}$.

Підставляючи вираз перетворення $w = \varphi(z)$ в умову біортогональності (2), одержимо наступні співвідношення:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r} \varphi^n(z)\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{m+1}(z)}dz = \delta_{nm}; \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r} \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi^{n+1}(z)}{n+1}\right)\frac{1}{\varphi^{m+1}(z)}dz = \delta_{nm}, \quad (3)$$

де $L_r \subset D$ – прообраз кола $C_r$ при відображенні (1).

Введемо системи функцій

$$\big\{g_n(z) = \varphi^n(z)\big\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{g_n^*(z) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}\,\varphi^{n+1}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad z \in D. \quad (4)$$

Функції $g_n(z)$ і $g_n^*(z)$ аналітичні в околі точки нуль тому, що $\varphi(z)$ аналітична в $D$, і їх розвинення у ряди Лорана не містять членів з від'ємними степенями змінної. Відповідно до (3), визначимо системи функцій $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$, $\{\omega_m^*(z)\}_{m=0}^{\infty}$ спряжені до (4), як головні частини (тобто члени ряду з від'ємними степенями) ряду Лорана для функцій $\varphi'(z)\varphi^{-(m+1)}(z)$, $\varphi^{-(m+1)}(z)$, відповідно, в околі нуля (див. [2]).

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай $w = \varphi(z)$ – конформне відображення (1) і $|z| < l$ ($l$ – додатне дійсне число) – найбільший круг, в якому збігається ряд Маклорена цієї функції і який лежить в області $D$. Тоді системи функцій (4) є базисом у просторі $E_r$, $0 < r < l$ функцій, аналітичних в крузі $|z| < r$.*

***Доведення.*** Розглянемо функцію

$$F(\xi) = \frac{1}{\varphi(l/\xi)},$$

яка однолиста в області $|\xi| > l$ і задовольняє умови $F(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{\xi\to\infty}\dfrac{F(\xi)}{\xi}=1$. Також, нехай $\psi(\xi)$ – функція, однолиста в області $|\xi| > l$ така, що $\psi(\infty) = 1$. Тоді, за теоремою 10 (див. [2], с. 616]), система поліномів $\big\{p_n(\xi)\big\}_{n=0}^{\infty}$ є базисом у просторі $E_r$, $r > l$, де $p_n(\xi)$ – головна частина ряду Лорана функції $\dfrac{F^n(\xi)F'(\xi)}{\psi(\xi)}$ в околі нескінченно віддаленої точки. Система функцій $\widetilde{\omega}_m(\xi) = \dfrac{\psi(\xi)}{F^{m+1}(\xi)}$, $m = 0, 1, \ldots$ є спряжена до цих поліномів, а також є базисом у просторі $\widetilde{E}_\rho$ функцій, аналітичних в області $|\xi| > \rho$, $\rho \geq l$ і рівна нулеві у нескінченно віддаленій точці.

Умова біортогональності є наступна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r'\geq r} p_n(\xi)\widetilde{\omega}_m(\xi)d\xi = \delta_{nm}.$$

Перетворимо цю умову, використовуючи відображення $\xi = l/z$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+} \widetilde{\omega}_m\left(\frac{l}{z}\right)p_n\left(\frac{l}{z}\right)\frac{l\,dz}{z^2} = \delta_{nm}. \quad (5)$$

Тут $\Gamma^+ : |z| = \dfrac{l}{z}$ – коло, орієнтоване проти годинникової стрілки.

Система функцій $\left\{\dfrac{\widetilde{\omega}_m(l/z)}{z}\right\}$ – базис в просторі функцій, аналітичних в крузі $|z| < l$, і $\left\{\dfrac{lp_n(l/z)}{z}\right\}$ – спряжена до неї система многочленів за від'ємними степенями змінної,

$$\frac{\widetilde{\omega}_m(l/z)}{z} = \frac{\psi(l/z)}{zF^{m+1}(l/z)} = \varphi^m(z)\,\frac{\varphi(z)\psi(l/z)}{z},$$
$$\frac{lp_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{lF^n(l/z)}{z}\,\frac{F'(l/z)}{\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\,\frac{z}{\varphi(z)\psi(l/z)}\right],$$

де $F'(\xi) = F'(l/z) = \dfrac{z^2\varphi'(z)}{l\varphi^2(z)}$, і $\Gamma[g(z)]$ – головна частина ряду Лорана функції $g(z)$ в околі точки нуль.

Якщо вибрати $\psi(l/z) = \dfrac{z}{\varphi(z)}$ і $\psi(l/z) = \dfrac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, то з (5) отримаємо умови біортогональності для системи функцій (4) і відповідних спряжених до них систем

$$\omega_n(z) = \frac{lp_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\,\frac{z}{\varphi(z)\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\right],$$
$$\omega_n^*(z) = \frac{lp_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\,\frac{z}{\varphi(z)\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{1}{\varphi^{n+1}(z)}\right].$$

Отже, якщо функція $f(z)$, аналітична в крузі $|z| < l$, то вона розвивається в середині цього круга у рівномірно збіжний ряд за системами (4)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z), \qquad |z| \le r < l, \tag{6}$$

де $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=r'\le r} f(\xi)\omega_n(\xi)d\xi$, $\;b_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi|=r'\le r} f(\xi)\omega_n^*(\xi)d\xi$.

Теорема доведена.

**Теорема 2.** *Системи функцій (4) – базиси у просторі функцій, аналітичних в області $D$.*

***Доведення.*** Покажемо, що ряд (6) рівномірно збігається в будь-якій області $\overline{D}' \subset D$, якщо функція $f(z)$ аналітична в $D$. Оскільки (1) відображує область $D$ на одиничний круг, то будь-яка точка $z \in \overline{D}'$ лежить на лінії $L_\rho$, яка є прообразом кола $|w| = \rho < 1$. Тоді маємо оцінки для функцій систем (4):

$$|g_n(z)| = |\varphi(z)|^n = \rho^n, \quad |g_n^*(z)| = |\varphi(z)|^n|\varphi'(z)| \le A_\varphi\rho^n,\ z \in L_\rho, \tag{7}$$

де $A_\varphi = \max\limits_{z\in L_\rho}|\varphi'(z)|$.

Нехай $L_{\rho_0}$ – прообраз кола $|w| = \rho_0$, $\rho < \rho_0 < 1$, and $F = \max\limits_{z\in L_{\rho_0}}|f(z)|$, $A_\psi = \max\limits_{|w|=\rho_0}|h'(w)|$. Перетворимо вирази для коефіцієнтів ряду (6), враховуючи те, що інтеграл по контуру $L_{\rho_0} \subset D$ від аналітичної функції в області $D$ дорівнює нулеві:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=L_{\rho_0}} f(\xi)\omega_n(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=L_{\rho_0}} \frac{f(\xi)\varphi'(\xi)d\xi}{\varphi^{n+1}(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho_0} \frac{f(h(w))dw}{w^{n+1}},$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=L_{\rho_0}} f(\xi)\omega_n^*(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=L_{\rho_0}} \frac{f(\xi)d\xi}{\varphi^{n+1}(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\rho_0} \frac{f(h(w))h'(w)dw}{w^{n+1}},$$

і знайдемо наступні оцінки:

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=\rho_0} \frac{|f(h(w))||dw|}{|w|^{n+1}} \le \frac{F}{\rho_0^n}, \quad |b_n| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=\rho_0} \frac{|f(h(w))||h'(w)||dw|}{|w|^{n+1}} \le \frac{FA_\psi}{\rho_0^n}. \tag{8}$$

Враховуючи оцінки (7), (8), і нерівність $\rho < \rho_0$, переконуємося в тому, що ряд (6) рівномірно збіжний в області $\overline{D}' \subset D$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||g_n(z)| \le F \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{F\rho_0}{\rho_0 - \rho},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||g_n^*(z)| \le FA_\psi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{FA_\psi\rho_0}{\rho_0 - \rho}.$$

Теорема доведена.

Розглянемо приклад системи функцій, який побудовано з використанням експоненціальної функції.

**3. Базис у просторі функцій, аналітичних у смузі.** Нехай область $D$ – смуга $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}$. Конформне відображення області $D$ на одиничний круг $K : |w| < 1$ і обернене до нього відображення задаються функціями (див. [9]):

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1}, \quad z \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{1+iw}{1-iw},$$

при цьому, точкам $z = \pi/4,\ z = -\pi/4,\ z = i\infty,\ z = -i\infty$ відповідають точки $w = 1,\ w = -1,\ w = i,\ w = -i$, відповідно, а межа $L$, яка складається з двох прямих $z = \pm\pi/4$ відображується в коло $C : |w| = 1$.

Введемо систему функцій, відповідно до першої системи в (4)

$$g_0(z) = 1, \ \ \left\{g_n(z) = \operatorname{tg}^n z\right\}_{n=1}^{\infty}, \ z \in D. \tag{9}$$

Функції $g_n(z)$ аналітичні в околі точки нуль, в той час, як функції $\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{m+1}(z)} = \frac{\operatorname{ctg}^{m+1}(z)}{\cos^2 z}$, що визначають відповідні спряжені функції, мають в точці нуль полюси $(m+1)$-го порядку.

Спочатку знайдемо розвинення функції $g_n(z)$ у ряд Маклорена, який збігається у крузі $|z| < \pi/2$. Використовуючи розвиненням

$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^t+1)^n} = \frac{e^{(x-n/2)t}}{\mathrm{ch}^n(t/2)} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)}(x)\frac{t^k}{k!},$$

де $E_k^{(n)} = \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l E_l^{(n)} x^{k-l}$ – многочлени Ейлера $n$-го порядку, степеня $l$, знаходимо

$$\frac{1}{\cos^n t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{2k} E_{2k}^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)\frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad E_{2k+1}^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right) = 0, \ |t| < \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Зауважимо, що $E_k^{(1)}(x) = E_k(x)$ – многочлени Ейлера, а $E_k = 2^k E_k^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)$ – числа Ейлера. Випишемо вирази чотирьох перших членів многочленів Ейлера

$$E_0^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right) = 1, \quad E_2^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{4}n,$$
$$E_4^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{16}n(3n+2), \quad E_6^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right) = -\frac{1}{64}n\big[15(n+1)^2+1\big].$$

Також запишемо формули для степенів $n$-го порядку тригономентричних функцій

$$\sin^{2n+1} t = \sum_{l=n}^{\infty}(-1)^l G_{2l+1}^{-(2n+1)}\frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}, \quad \sin^{2n} t = \sum_{l=n}^{\infty}(-1)^l G_{2l}^{-(2n)}\frac{t^{2l}}{(2l)!},$$
$$\cos^n t = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l G_{2l}^{+(n)}\frac{t^{2l}}{(2l)!}, \tag{11}$$

де

$$G_{2l}^{\pm(2n)} = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=1}^{n}(\pm1)^k C_{2n}^{n-k}(2k)^{2l}, \ n \geq 1, \ l \geq 1;$$
$$G_p^{\pm(2n+1)} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(\pm1)^k C_{2n+1}^{n-k}(2k+1)^p,$$
$$G_0^{+(2n+1)} = 1, \quad G_0^{+(2n)} = 1, \ n \geq 1; \qquad G_{2n}^{-(2n)} = (-1)^n(2n)!,$$
$$G_{2n+1}^{-(2n+1)} = (-1)^n(2n+1)!, \quad G_p^{-(2n+1)} = 0, \ p < n.$$

Використовуючи відповідні формули (10)–(12), знайдемо розвинення функції (9) за степенями змінної:

$$\mathrm{tg}^{2n} t = \frac{\sin^{2n} t}{\cos^{2n} t} = \sum_{l=n}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{l+k}2^{2k}G_{2l}^{-(2n)}E_{2k}^{(2n)}(n)\,\frac{t^{2(l+k)}}{(2l)!(2k)!} =$$
$$= \sum_{l=n}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}(-1)^k 2^{2k-2l}G_{2l}^{-(2n)}E_{2k-2l}^{(2n)}(n)\,\frac{t^{2k}}{(2k-2l)!(2l)!} =$$

$$
=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\sum_{l=n}^{k}2^{2k-2l}C_{2k}^{2l}G_{2l}^{-(2n)}E_{2k-2l}^{(2n)}(n),
$$

$$
\mathrm{tg}^{2n+1}t=\frac{\sin^{2n+1}t}{\cos^{2n+1}t}=\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{l+k}2^{2k}G_{2l+1}^{-(2n+1)}E_{2k}^{(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{t^{2(l+k)+1}}{(2l+1)!(2k)!}=
$$

$$
=\sum_{l=n}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}(-1)^k2^{2k-2l}G_{2l+1}^{-(2n+1)}E_{2k-2l}^{(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{t^{2k+1}}{(2k-2l)!(2l+1)!}=
$$

$$
=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\sum_{l=n}^{k}2^{2k-2l}C_{2k+1}^{2l+1}G_{2l+1}^{-(2n+1)}E_{2k-2l}^{(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{2}\right).
$$

Таким чином, маємо збіжні в області $|z|<\pi/2$ ряди функції(9). Запишемо їх у наступному вигляді:

$$
\mathrm{tg}^{2n}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}R_{2k}^{(2n)}z^{2k},\quad \mathrm{tg}^{2n+1}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}R_{2k+1}^{(2n+1)}z^{2k+1}, \tag{12}
$$

де

$$
R_{2k}^{(2n)}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{l=n}^{k}2^{2k-2l}C_{2k}^{2k-2l}G_{2l}^{-(2n)}E_{2k-2l}^{(2n)}(n),
$$

$$
R_{2k+1}^{(2n+1)}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{l=n}^{k}2^{2k-2l}C_{2k+1}^{2k-2l}G_{2l+1}^{-(2n+1)}E_{2k-2l}^{(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{2}\right).
$$

Далі побудуємо спряжену до (12) систему функцій. Спочатку знайдемо розвинення функції $(z\,\mathrm{ctg}\,z)^n$ в околі точки нуль за степенями змінної. Маємо (див. [6])

$$
\frac{t^ne^{xt}}{(e^t-1)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^{(n)}(x)\,\frac{t^k}{k!},
$$

де $B_k^{(n)}(x)=\sum_{l=0}^{k}C_k^lB_l^{(n)}x^{k-l}$ – многочлени Бернуллі $n$-го порядку, степеня $k$, а $B_k^{(n)}(0)=B_l^{(n)}$ – числа Бернулі. Отже, беручи $x=n/2$, отримаємо

$$
\frac{t^n}{\sin^n t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k2^{2k}B_{2k}^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)\frac{t^{2k}}{(2k)!},\quad B_{2k+1}^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)=0,\ |t|<\pi. \tag{13}
$$

Запишемо кілька перших членів многочленів Бернуллі:

$$
B_0^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)=1,\quad B_2^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)=-\frac{1}{12}n,
$$

$$
B_4^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{240}n(5n+2),\quad B_6^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)=-\frac{1}{64}n\left[\frac{1}{9}(n+1)(5n+1)+\frac{1}{7}\right].
$$

Враховуючи відповідні розвинення (11)–(13), отримаємо

$$
(t\,\mathrm{ctg}\,t)^n=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{l+k}2^{2k}G_{2l}^{+(n)}B_{2k}^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right)\frac{t^{2(l+k)}}{(2l)!(2k)!}=
$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^k 2^{2k-2l} G_{2l}^{+(n)} B_{2k-2l}^{(n)} \left(\frac{n}{2}\right) \frac{t^{2k}}{(2k-2l)!(2l)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \sum_{l=0}^{k} 2^{2k-2l} C_{2k}^{2l} G_{2l}^{+(n)} B_{2k-2l}^{(n)} \left(\frac{n}{2}\right), \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, звідси знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\mathrm{ctg}^n t$ в околі точки нуль

$$F_n(t) = \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} Q_{2l}^{(n)} \frac{1}{t^{n-2l}},$$

де $Q_{2k}^{(n)} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \sum\limits_{l=0}^{k} 2^{2k-2l} C_{2k}^{2l} G_{2l}^{+(n)} B_{2k-2l}^{(n)} \left(\dfrac{n}{2}\right)$. Аналогічно, знайдемо головну частину ряду Лорана для функції $\dfrac{-1}{m}\dfrac{d}{dz}\varphi^{-m}(z) = \varphi^{-(m+1)}(z)\varphi'(z)$, $m \geq 1$, яка задає відповідну спряжену до (12) функцію:

$$\omega_m(z) = \frac{-1}{m}\frac{d}{dz} F_m(z) = \sum_{l=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^l \frac{(m-2l)}{m} Q_{2l}^{(m)} \frac{1}{z^{m-2l+1}}.$$

У випадку $m = 0$, $\varphi^{-1}(z)\varphi'(z) = (\cos z \sin z)^{-1} = 2\sin^{-1} 2z$, згідно (13), маємо $\omega_0(z) = 1/z$. Отже, для функцій системи $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$, отримаємо наступні формули:

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}; \quad \omega_m(z) = \sum_{l=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^l \frac{(m-2l)}{m} Q_{2l}^{(m)} \frac{1}{z^{m-2l+1}}, \ m \geq 1. \qquad (14)$$

Системи функцій (12) і (14) є біортогональними на довільному колі $L: \ |z| = r, \ 0 < r < \pi/4$, такі, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_0<r} g_n(z)\omega_m(z)dz = \delta_{nm},$$

і за теоремою 1, система (12) є базисом у просторі $E_r, \ 0 < r < \pi/4$.

**Приклад 1.** *За формулами (12) і (14), ми можемо знайти точні вирази для кількох перших систем (9) та спряжених до них:*

$$g_0(z) = 1; \quad g_1(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{3\cdot 5}z^5 + \frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}z^7 + \ldots;$$

$$g_2(z) = z^2 + \frac{2}{3}z^4 + \frac{17}{5\cdot 9}z^6 + \frac{62}{5\cdot 7\cdot 9}z^8 + \ldots; \quad g_3(z) = z^3 + z^5 + \frac{11}{3\cdot 5}z^7 + \ldots;$$

$$g_4(z) = z^4 + \frac{4}{3}z^6 + \frac{6}{5}z^8 + \ldots; \quad g_5(z) = z^5 + \frac{5}{3}z^7 + \frac{8}{9}z^9 + \ldots;$$

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z}; \quad \omega_1(z) = \frac{1}{z^2}; \quad \omega_2(z) = \frac{1}{z^3}; \quad \omega_3(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}; \quad \omega_4(z) = -\frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5};$$

$$\omega_5(z) = \frac{1}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6}; \quad \omega_6(z) = \frac{23}{5\cdot 9}\frac{1}{z^3} - \frac{4}{3}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7}.$$

*На прикладах цих розкладів легко бачити, що умови біортогональності (3) виконуються.*

*За теоремою 2, система (12) є базисом у просторі аналітичних в $D$ функцій, а система (14) є спряжена до неї.*

**4. Побудова розв'язку задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца.** Нехай $w = \varphi(z)$ – конформне відображення (1). Запишемо рівняння Гельмгольца, використовуючи змінні $w, \overline{w}$ :

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \overline{w}} + \kappa U = 0, \tag{15}$$

де $\kappa = const$ і $U = U(w, \overline{w})$ – дійснозначна функція.

Множину розв'язків цього рівняння у крузі можна записати у вигляді (див. [6], [7])

$$U = \mathrm{Re}\sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\overline{w}), \tag{16}$$

де $J_m^*(w\overline{w}) = J_m^*\left(|w|^2\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \kappa^n |w|^{2n}}{2^{2n+m}(n+m)!n!}$; $c_m$ – довільні комплексні сталі. Функції $J_m^*(w\overline{w})$, якщо $\kappa > 0$, можна безпосередньо виразити через функції Бесселя $m$-го порядку: $J_m\left(\sqrt{\kappa}|w|\right) = \left(\sqrt{\kappa}|w|\right)^m J_m^*\left(|w|^2\right)$.

Перейшовши до змінних $z = h(w)$, $\overline{z} = \overline{h(w)}$, і врахувавши, що $\varphi'(z) \neq 0$, $z \in D$, рівняння (15) запишемо у вигляді

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \overline{z}} + \kappa\varphi'(z)\overline{\varphi'(z)}U = 0. \tag{17}$$

Множину розв'язків рівняння (17) одержимо з (16) використовуючи заміну змінних $w = \varphi(z)$, $\overline{w} = \overline{\varphi(z)}$,

$$U(z, \overline{z}) = \mathrm{Re}\sum_{m=o}^{\infty} c_m \varphi^m(z) J_m^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right). \tag{18}$$

**4.1. Розв'язок для круга.** Запишемо розв'язок рівняння (15) в крузі $K := \{w : \ |w| < 1\}$, за умови, що

$$U(w, \overline{w})\Big|_C = \mathrm{Re} f(t), \quad t \in C = \partial K, \tag{19}$$

де $f(t)$ – функція, що розвивається в рівномірно збіжний ряд, а саме

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m. \tag{20}$$

Зауважимо, що якщо ряд за системою функцій, аналітичних в закритій області $\overline{G}$, рівномірно збігається на границі $L = \partial G$, то він рівномірно збігається в $\overline{G}$, а його сума неперервна на $L$ і аналітична в $G$ функція (див. [9], с. 192).

Однією з достатніх умов рівномірної збіжності ряду функції $g(t)$ на $L$ за системою функцій, аналітичних в області $\overline{G}$, є її належність до класу неперервних функцій Гельдера (див. [9], с. 275).

Отже, з рівномірної збіжності ряду (20) випливає рівномірна збіжність цього ряду в $\overline{K}$, аналітичність функції $f(z)$ в $K$ і неперервність цієї функції на $C$.

Підставляючи вираз (20) в умову (19), використовуючи зображення (16) і рівність $w\overline{w} = 1$, $w \in C$, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \mathrm{e}^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \mathrm{e}^{im\psi}.$$

Звідси знаходимо коефіцієнти $c_m = \dfrac{d_m}{J_m^*(1)}$ і записуємо розв'язок задачі

$$U(w, \overline{w}) = \mathrm{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\overline{w}). \tag{21}$$

Таким чином, розв'язок задачі задається у вигляді ряду за системою функцій $\{w^m J_m^*(w\overline{w})\}$. При цьому, внаслідок обмеженості функції $J_m^*(|w|^2)$ і рівномірної збіжності ряду (20) в $\overline{K}$, ряд (21) збігається також рівномірно в $\overline{K}$.

**4.2. Побудова розв'язку крайової задачі.** Знайдемо розв'язок рівняння (17) в області $D$ за умови

$$U(z, \overline{z})\big|_L = \mathrm{Re} f(t), \quad t \in L, \tag{22}$$

де $f(t)$ – функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд за системою (4), тобто

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t). \tag{23}$$

Рівномірна збіжність ряду (23) в $\overline{D}$, аналітичність функції $f(z)$ в $D$, а також неперервність цієї функції на межі $L$ випливає з умов на функцію $f(t)$.

Підставляючи вираз зображення (1) у вираз для розв'язку (16) задачі у крузі, отримаємо множину розв'язків рівняння (17) в області $D$ у вигляді ряду (18). Коефіцієнти цього ряду знаходимо з умови (22). Підставляючи вираз (18) у крайову умову (22), і врахувавши залежності $g_n(z) = \varphi^n(z)$, $\varphi(t)\overline{\varphi(t)} = 1$, $\varphi(t) = \mathrm{e}^{i\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, отримаємо наступне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{in\psi} J_n^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\psi}.$$

Звідси, знайдемо коефіцієнти $c_n = \dfrac{a_n}{J_n^*(1)}$, і запишемо розв'язок задачі

$$U(z, \overline{z}) = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{J_n^*(1)} g_n(z) J_n^*\left(\varphi(z)\overline{\varphi(z)}\right). \tag{24}$$

Підстановкою значень $z = t \in L$ у ряд (24), безпосередньо одержимо граничну умову (22). Рівномірна збіжність ряду (24) в області $D$ випливає з обмеженості функцій $J_n^*(\varphi(z)\overline{\varphi(z)})$, оскільки $0 \leq |\varphi(z)| \leq 1$, $z \in D$, і рівномірної збіжності ряду (23).

**5. Висновки.** У роботі, використовуючи конформні відображення $w = \varphi(z)$ смуги на одиничний круг так, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, побудовано базис в просторі функцій, аналітичних в цій області, і знайдено відповідні розв'язки крайової задачі для рівняння Гельмгольца. Розглянутий підхід можна поширити на крайові задачі для цього рівняння в областях ширшого класу і для інших конформних перетворень цих областей на круг чи зовнішність круга. Крім того, при побудові базисів у відповідних просторах аналітичних функцій, природно виникають споріднені їм базиси, які можуть бути використані для побудови розв'язків крайових задач Неймана для рівняння Гельмгольца у цих областях (коли задані похідні на границі області).

### Список використаної літератури


1. Дзядик В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – Москва: Наука, 1977, – 512 с.
2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.– Москва: Наука, 1968, Т.2, – 624 с.
3. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного.. – Москва: Наука, 1964, – 440 с.
4. Сухорольський М. А. Розвинення аналітичних функцій за системою многочленів типу Мелліна. // Вісник НУ "ЛП". Серія фізико-математичні науки. – 2005. – №. 346. – С. 111 – 115.
5. Сухорольський М.А. Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій. // Укр. мат. журн. – 2010. – 62, №2. - С. 238-254.
6. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New York: Dover Publications, Inc: Mineola, 2000, – 1130 p.
7. Сухорольський М.А. Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Під заг. ред. І.О.Луковського, Г.С.Кіта, Р.М.Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України. – 2014. – С. 160–163.
8. Сухорольський М. А., Достойна В. В. Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. - 55, №2 - С. 52-62.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987, – 698 с.


Одержано 20.06.2016