УДК 519.21, 519.71

С. В. Антонюк, І. В. Малик (Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЮ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

The infinite time horizon hereditary portfolio optimization problem in a financial market is considered in this paper. The mathematical model of this problem, which assumes that the savings account compounds continuously with a constant interest rate and the unit price process of the underlying stock follows a nonlinear stochastic hereditary differential equation, is built. The optimal consumption-trading strategy which maximizes the expected utility from the total discounted consumption over the infinite time horizon is found.

В даній роботі вивчається задача оптимізації портфелю цінних паперів на фінансовому ринку з урахуванням податків на приріст капіталу та фіксованих і пропорційних трансакційних витрат. Побудована математична модель даної задачі , яка припускає, що ощадний рахунок формується неперервно зі сталою відсотковою ставкою, а ціновий процес основного фонду задовольняє стохастичне диференціально-функціональне рівняння з нескінченною передісторією. В роботі знайдена оптимальна споживчо-торгівельна стратегія, при якій максимізується очікувана корисність від загального дисконтованого споживання на нескінченному часовому діапазоні.

Розглянемо задачу оптимізації портфелю цінних паперів на фінансовому ринку з врахуванням податків на приріст капіталу та фіксованих і пропорційних трансакційних витрат. Вважаємо, що фінансовий ринок складається з одного ощадного і одного фондового рахунків. Припускається, що ощадний рахунок формується неперервно зі сталою відсотковою ставкою $\lambda > 0$, а ціновий процес $\{S(t), t \geq 0\}$ основного фонду задовольняє стохастичне диференціально-функціональне рівняння з нескінченною передісторією. Основна мета фондового рахунку є відстеження запасів основних акцій (тобто фіксуються моменти часу, і базові ціни, за якими акції були придбані або короткостроково продані) з метою розрахунку податків на приріст капіталу тощо. При розгляданні цінової динаміки, ми припускаємо, що $f(S_t)$ (середній коефіцієнт прибутку), $g(S_t)$ (коефіцієнт мінливості) і $h(S_t, \theta)$ (величина стрибка) залежать від всієї передісторії цін на акції S_t протягом інтервалу $(-\infty, t]$, а не лише від поточної ціни $S(t)$ в момент $t \geq 0$.

В межах області платоспроможності S_k, яка буде визначена нижче, та у відповідності з вимогами оплати фіксованих і пропорційних трансакційних витрат та податків на приріст капіталу, інвестор має право споживати зі свого ощадного рахунку згідно з процесом витрат $C = \{C(t), t \geq 0\}$, і здійснювати трансакції між своїм ощадним і фондовим рахунками відповідно до торгової стратегії $\mathrm{T} = \{(\tau(i), \zeta(i)), i = 1, 2, ...\}$, де $\tau(i)$, $i = 1, 2, ...$ – це послідовність моментів часу, в які здійснювались трансакції, а $\zeta(i)$ – означає кількість трансакцій в момент $\tau(i)$.

Інвестор буде дотримуватись наступних правил, що стосуються витрат, трансакцій та оподаткування. Дії інвестора на ринку називають трансакцією (угодою), якщо мова йде про торгівлю акціями фонду, тобто купівлю і продаж:

1. Під час кожної угоди, інвестор повинен оплатити вартість операції, яка складається з фіксованої вартості $\kappa > 0$ та пропорційної вартості трансакції з коефіцієнтом $\mu > 0$, як для купівлі так і для продажу акцій фонду. Всі покупки і продаж будь-якої кількості акцій фонду будуть важатися однією угодою, якщо

вони виконуються в один і той же момент часу, і тому бере на себе тільки одну фіксовану плату $\kappa > 0$.

2. В області платоспроможності, інвестор має право споживати і брати гроші зі свого ощадного рахунку на покупку цінних паперів. Інвестор може також продати та / або викупити за поточною ціною акції фонду, які він купив та / або короткостроково продав в попередній момент часу.

3. Прибуток від продажу акцій з вирахуванням трансакційних витрат і податків на приріст капіталу буде покладено на ощадний рахунок, і купівля акцій фонду разом з відповідними трансакційними витратами і податком на приріст капіталу фінансуватиметься з ощадного рахунку.

4. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що відсотковий прибуток на ощадному рахунку не оподатковується через те, що використовуємо ефективну відсоткову ставку рівну відсотковій ставці, що оплачується банком мінус податкова ставка.

5. На момент трансакції ($t \geq 0$), інвестор зобов'язаний сплатити податок на приріст капіталу (відповідно, буде оплачено кредити по втраті капіталу) у сумі, пропорційній сумі прибутку (відповідно, збитку). Продаж акцій фонду вважається прибутковим, якщо поточна ціна акції $S(t)$ вище, ніж базова ціна $B(t)$, і збитковим – в протилежному випадку. Базова ціна $B(t)$ визначається як ціна, за якою фондові акціїї раніше були куплені або короткостроково продані, тобто $B(t) = S\left(t - \tau(t)\right)$, де $\tau(t) > 0$ – інтервал часу, на які ці акції були утримані в момент часу t. Інвестор також буде сплачувати податок на приріст (відповідно, виплачуються кредити по втраті капіталу) на суму прибутку (відповідно, збитку) від короткострокових продаж акцій фонду, а потім викуповувати акції за більш низькою (відповідно, вищою) ціною в пізніший момент часу.

6. Податок буде виплачений (або кредит буде наданий) в момент викупу. Скрізь від'ємні суми податку будуть інтерпритуватися як кредит на втрату капіталу. Податкова ставка на приріст капіталу і кредитна ставка на втрату капіталу вважаються, для простоти, однаковими і рівними $\beta > 0$. Тому, якщо $|m|$ ($m > 0$ при покупці і $m < 0$ при продажі) акцій фонду, маючи базову ціну $B(t) = S\left(t - \tau(t)\right)$, продаються за поточною ціною $S(t)$, то величина податку, що відповідає трансакційному моменту має вигляд

$$|m|\beta\left(S(t) - S\left(t - \tau(t)\right)\right).$$

Податки та / або кредит не перевищуватиме всю іншу валову виручку і / або загальну вартість фондових акцій, тобто,

$$m\left(1-\mu\right)S(t) \geq \beta m\left|S(t) - S\left(t-\tau\right)\right|, \text{ якщо } m \geq 0$$

і

$$m\left(1-\mu\right)S(t) \leq \beta m\left|S(t) - S\left(t-\tau\right)\right|, \text{ якщо } m < 0,$$

де $m \geq 0$ – кількість придбаних акцій, $m < 0$ – кількість проданих фондових акцій.

Скрізь припускатимемо, що $\mu + \beta < 1$. Це означатиме, що витрати (пропорційні трансакційні витрати і податки), пов'язані з торгівлею, не будуть перевищувати прибутків.

При зроблених припущеннях і правилах 1-6, мета інвестора полягає в пошуку оптимальної споживчо-торгові стратегії (C^{*}, T^{*}) для того, щоб максимізувати очікувану корисність від загального дисконтованого споживання на нескінченному часовому діапазоні

$$E\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}\right],$$

де $\alpha > 0$ – облікова ставка, а $0 < \gamma < 1$ – фактор неприйняття ризику.

У зв'язку з фіксованими і пропорційними трансакційними витратами і спадковою природою фондової динаміки, проблему, розглядувану в цій роботі можна сформулювати як поєднання задачі класичного керування (для споживання) і імпульсного керування (для трансакцій).

Спадкова цінова структура з необмеженою, але затухаючою пам'яттю. Нехай R – дійсний евклідовий простір і $1 \leq p < \infty$. є простором історії, тобто простір $R^{n} \times D^{p}_{\rho}$, де $[D^{p}_{\rho}$ – простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій $\varphi : R^{-} \to R$ таких, що

$$\int_{0}^{\infty} |\varphi(s)|^{p}\rho(s)ds < \infty.$$

Норма в просторі вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_{X} \equiv \left(|\varphi(0)|^{p} + \int_{-\infty}^{0} |\varphi(s)|^{p}\rho(s)ds\right)^{1/p} \equiv \left(|\varphi(0)|^{p} + \|\varphi\|^{p}_{\rho}\right)^{1/p}, \tag{1}$$

$$\|\varphi\|^{p}_{\rho} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Означення 1. *Функція $\rho : R^{-} \to R^{+}$ називаєтья функцією із згладжуючою властивістю, якщо вона задовольняє таким умовам:*

1. ρ – сумовна в R^{-};

2. для $\forall z \leq 0$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \bar{K}(z) &\equiv ess\sup_{s\in R^{-}}\frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \leq \bar{\bar{K}} < \infty; \\ \underline{K}(z) &\equiv ess\sup_{s\in R^{-}}\frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{aligned} \tag{2}$$

3. ρ – обмежена в R^{-};

4. $\rho > 0$ – строго додатна на $s \in (-\infty, 0)$;

5. $s\rho(s) \to 0$ коли $s \to -\infty$.

Наприклад, в якості $\rho(s)$ можна розглянути функцію e^{s}.

Якщо $x : R \to R$–вимірна, її історія до моменту часу t є функцією $x_{t}(s) \equiv x(t+s)$, $s \in R^{-}$.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathrm{P}; F_{t})$ з потоком $\sigma-$ алгебр $\{F_{t}, t \geq 0\}$ задані узгоджені з потоком F_{t} вінерів процес $\{w(t), F_{t}\} \subset R$, $t \in R_{+}$ і незалежна від нього центрована пуассонова міра $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$ на

$(\Theta \times R_+, Z \times \mathcal{B}_+)$, $(\Theta \in R^+)$ для якої $E\{\tilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$, де Π – деяка σ–скінченна міра на Z.

Нехай $\mathcal{X}_0$ – є простір вимірних випадкових процесів $\varphi(t)$, $t \leq 0$, таких, що $\varphi_0 \in X$ з ймовірністю 1, і таких, що при кожному t, $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу і центрованої пуассонової міри:

$$\{w(s) - w(t_0), s \geq 0\}, \quad \{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(0, A), s \geq 0, A \in Z\}.$$

Позначимо через $\mathcal{R}_0 \equiv \sigma\{x(s)\,|s \leq 0\}$ підмножин $\mathcal{X}_0$, а через $\mathcal{R}_t \equiv \mathcal{R}_0 \vee F_t$, F_t – мінімальний потік породжений величинами $\{w(s), \tilde{\nu}(d\theta, ds), s \leq t\}$.

Нехай для кожного $t \in (-\infty, \infty)$, $S(t)$ є ціною акції в момент t. Ціновий процес $\{S(t), t \geq 0\}$ задовольняє стохастичне диференціально-функціональне рівняння з нескінченною передісторією:

$$dS(t) = S(t)\left[f(S_t)dt + g(S_t)dw(t) + \int\limits_{\Theta} h(S_{t-}, \theta)\tilde{\nu}(d\theta, dt)\right], \tag{3}$$

де функціонали $f(S^t)$ і $g(S^t)$ описують відповідно середній коефіцієнт прибутку і коефіцієнт мінливості, а $h(S^t, \theta)$ – описує розмір стрибка цінового процесу в момент $t \geq 0$.

Будемо вважати, що відрізок початкової функції

$$S_0 = \varphi_0 \in \mathcal{X}_0. \tag{4}$$

У рівнянні (3) запис S^{t-} підкреслює, що функціонал $h(S^{t-}, \theta)$ не повинен залежати від $S(t)$, а може залежати лише від $S(s)$ при $s < t$. Надалі скрізь для спрощення запису знак "$-$" будемо упускати, тобто будемо записувати $h(S_t, \theta)$, маючи на увазі все сказане вище.

Слід розуміти (3) в інтегральній формі

$$\begin{gathered} S(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t S(s)f(S_s)ds + \int\limits_0^t S(s)g(S_s)dw(s) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\Theta} S(s)h(S_s, \theta)\tilde{\nu}(d\theta, ds); \quad t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{5}$$

В роботі [1] встановлено, що при $t \geq 0$ процес S_t – прогресивно вимірний відносно R_t, без розривів другого роду і неперервний справа, а також встановлені необхідні і достатні умови існування сильного розв'язку задачі (5), (4).

Вважатимемо, що фондовий рахунок має більш високий середній коефіцієнт зростання, ніж процентна ставка $\lambda > 0$ $(f(x) > \lambda, \forall x \in D^p_\rho)$ для ощадного рахунку. Інакше, для інвестора було б більш вигідним і менш ризикованим поставити всі свої гроші на ощадний рахунок з метою оптимізації очікуваної рентабельності від загального споживання.

Простір фондових запасів. Нехай простір фондових запасів $\mathbf{Y}$ є простором обмежених функцій $\xi : (-\infty, 0] \to R$

$$\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} n(-k) I_{\{\tau(-k)\}}(s), \quad s \in (-\infty, 0], \tag{6}$$

де $\{n(-k), k = 0, 1, 2, ...\}$ – послідовність така, що $n(-k) = 0$ для всіх, крім скінченної кількості k; $-\infty < ... < \tau(-k) < ... < \tau(-1) < \tau(0) = 0$; $I_{\{\tau(-k)\}}$ – індикатор при $\tau(-k)$. Норму в просторі $\mathbf{Y}$ визначимо

$$\|\xi\|_Y = \sup_{s\in(-\infty,0]} |\xi(s)|, \quad \forall\xi \in Y.$$

Припущення, що $n(-k) = 0$ для всіх, крім скінченної кількості k, означає, що інвестор може мати лише скінченну кількість відкритих позицій. Кількість цих відкритих позицій час від часу змінюється. Кажуть, що інвестор має довгостроково (короткостроково) відкриту позицію в момент τ, якщо він досі володіє (винен) всіма або частиною акцій, що були придбані (короткостроково продані) за попередній період часу τ.

Єдиний спосіб закрити позицію – це продати те, чим володіє і викупити те, що заборгував.

Зауваження. *Запаси в момент*

$$t = 0$$

описані в (6) можуть бути також еквівалентно виражені через наступну подвійну послідовність

$$\xi = \{(n(-k), \tau(-k)), \quad k = 0, 1, 2, ...\},$$

де $n(-k) > 0$ *(*$n(-k) < 0$*) означає кількість акцій, які були придбані (короткостроково продані) інвестором в момент* $\tau(-k)$*,* $k = 0, 1, 2, ...$

Якщо $\eta : R \to R$ є обмеженою функцією виду

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(k) I_{\{\tau(k)\}}(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

де $-\infty < ... < \tau(-k) < ... < 0 = \tau(0) < \tau(1) < ... < \tau(k) < ... < \infty$, а $I_{\{s\}}(t) = \begin{cases} 1, & t = s; \\ 0, & t < s. \end{cases}$

Тоді для кожного $t \geq 0$, визначимо функцію $\eta_t : (-\infty, 0] \to R$ як

$$\eta_t(s) = \eta(t + s), \quad s \in (-\infty, 0].$$

Тоді

$$\eta_t(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n(k) I_{\{\tau(k)\}}(t + s) = \sum_{k=-\infty}^{Q(t)} n(k) I_{\{\tau(k)\}}(s), s \in (-\infty, 0],$$

де $Q(t) = \sup\{k \geq 0 \mid \tau(k) \leq t\}$. Відмітимо, що якщо функція η_t відображає запаси на фондовому рахунку інвестора, то вона також може бути подана через подвійну послідовність

$$\eta_t = \{(n(k), \tau(k)), \ k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., Q(t)\}.$$

Споживчо-торгівельна стратегія. Нехай $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in R \times \mathbf{Y} \times [0, \infty) \times D_\rho^p$ – це початковий портфель цінних паперів інвестора безпосередньо до $t = 0$. Тобто інвестор починає з $x \in R$ доларами на ощадному рахунку, початковими запасами акцій

$$\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} n\,(-k)\, I_{\{\tau(-k)\}}(s), \quad s \in (-\infty, 0)$$

і з початковою траєкторією цін на акції $(\varphi\,(0)\,, \varphi) \in [0, \infty) \times D_\rho^p$, де $n(-k) > 0$ (відповідно, $n(-k) < 0$) являють собою довго -(коротко-)строково відкриті позиції в момент $\tau(-k)$. В платоспроможній області $\mathbf{S}_k$ інвестор може споживати зі свого ощадного рахунку, укладати угоди між ощадним і фондовим рахунком згідно споживчо-торгової стратегії $\pi = (C, \mathfrak{T})$, яка буде описана нижче.

Означення 2. [2] *Кажуть, що пара $\pi = (C, \mathfrak{T})$ є споживчо-торговою стратегією, якщо мають місце наступні умови:*

1) процес витрат $C = \{C(t), t \geq 0\}$ невід'ємний $\mathcal{R}_t$–прогресивно вимірний процес такий, що

$$\int_0^T C\,(t)\,dt < \infty, \text{ з ймовірністю 1 для } \forall\; T > 0.$$

2) $\mathfrak{T} = \{(\tau(i), \zeta(i))\,, i = 1, 2, ...\}$ – торгова стратегія, де $\tau(i)$, $i = 1, 2, ...$ – послідовність торгових моментів, які є моментами зупинки, такими, що

$$0 = \tau(0) \leq \tau(1) < ... < \tau(i) < ...$$

і

$$\lim_{i \to \infty} \tau(i) = \infty \text{ з ймовірністю 1,}$$

і для кожного $i = 0, 1, ...$

$$\zeta(i) = (..., m(i-k), ..., m(i-2), m(i-1), m(i))$$

вимірний випадковий вектор, що представляє торгові величини в торгові моменти $\tau(i)$.

Як і раніше, $m(i) > 0$ (відповідно $m(i) < 0$) кількість фондових акцій, знову придбаних (короткостроково проданих) в поточний момент $\tau(i)$ і при поточній ціні $S\,(\tau(i))$.

При $k = 1, 2, ...;\ m(i-k) > 0$ – це кількість викуплених (проданих) фондових акцій в поточний момент $\tau(i)$ і при поточній ціні $S(\tau(i))$ при відкритій короткостроковій (довгостроковій) позиції в попередній момент $\tau\,(i-k)$ при базовій ціні $S\,(\tau\,(i-k))$.

Для кожного ξ, вираженого (6), правила 1-6 диктують, що інвестор може придбати або короткостроково продати нові акції ($-\infty < m(0) < \infty$), може продати все або частину того, чим володіє, тобто

$$m(-k) \leq 0 \text{ і } n(-k) + m(-k) \geq 0, \text{ якщо } n(-k) > 0$$

і/або викупити все чи частину того, що заборгував, тобто

$$m(-k) \geq 0 \text{ і } n(-k) + m(-k) \leq 0, \text{ якщо } n(-k) < 0,$$

в один і той самий момент часу.

Торгова кількість $\{m(-k),\ k = 0, 1, ...\}$ повинна задовольняти обмежену множину $\mathcal{R}(\xi) \subset \mathbf{Y}$, визначену наступним чином

$$\mathrm{R}(\xi) = \Bigg\{ \zeta \in \mathbf{Y} |\, \zeta = \sum_{k=0}^{\infty} m\,(-k)\, I_{\{\tau(-k)\}}, -\infty < m\,(0) < \infty, \quad \text{або}$$

$$n(-k) > 0,\ m(-k) \leq 0 \text{ і } n(-k) + m(-k) \geq 0 \text{ чи} \tag{7}$$

$$n(-k) < 0,\ m(-k) \geq 0 \text{ і } n(-k) + m(-k) \leq 0 \text{ при } k \geq 1 \Bigg\}.$$

Область платоспроможності. Базовий простір інвестора $\mathbf{S} = R \times \mathbf{Y} \times [0, \infty) \times D_\rho^p$. Елемент $(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}$ називається портфелем цінних паперів, якщо $x \in R$ – це вклади інвестора на його ощадному рахунку, ξ – запас акцій інвестора, $(\varphi(0), \varphi) \in [0, \infty) \times D_\rho^p$ – траєкторія історії цін на акції. Визначимо функцію $H_k : \mathbf{S} \to R$

$$H_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi) = \max\left\{G_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi)\,,\, \min\left\{x, n(-k)\varphi(0),\ k = 0, 1, 2, ...\right\}\right\}, \tag{8}$$

де $G_k : \mathbf{S} \to R$ ліквідуюча функція, визначена співвідношенням

$$G_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi) = x - \kappa + \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\min\left\{(1-\mu)\, n(-k), (1+\mu) n(-k)\right\} \varphi(0) -$$

$$- n(-k)\beta\,(\varphi(0) - \varphi\,(\tau(-k))) \Big]. \tag{9}$$

Тут в правій частині: $x - \kappa =$сума на ощадному рахунку після вирахування фіксованих трансакційних витрат κ; для кожного $k = 0, 1, ...$: $\min\left\{(1-\mu)n(-k), (1+\mu)n(-k)\right\}\varphi(0)$ – прибутки від продажу $n(-k) > 0$ чи викупу $n(-k) < 0$ акцій фонду за вирахуванням пропорційних трансакційних витрат, $-n(-k)\beta\,(\varphi(0) - \varphi\,(\tau(-k)))=$ податок на приріст капіталу, що підлягає сплаченню за купівлю $n(-k)$ акцій фонду за поточною ціною $\varphi(0)$ і базовою ціною $\varphi\,(\tau(-k))$. $G_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi)$, визначена в (9), являє собою суму коштів (якщо активи можуть бути ліквідовані повністю) після закриття всіх відкритих позицій і сплати всіх операційних витрат (фіксованих і пропорційних транзакційних витрат) і податків.

Означення 3. *Область платоспроможності для задачі оптимізації портфеля цінних паперів визначається наступним чином [2]*

$$\mathbf{S}_k = \left\{\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S} |\, H_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \geq 0\right\} =$$

$$= \left\{(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S} |\, G_k\,(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \geq 0\right\} \cup \mathbf{S}_+, \tag{10}$$

де $\mathbf{S}_+ = [0, \infty) \times \mathbf{Y}_+ \times [0, \infty) \times D_\rho^p$, *а* $Y_+ = \left\{\,\xi \in \mathbf{Y} |\, \xi(s) \geq 0, \forall s \in (-\infty, 0]\right\}$.

Слід відмітити, що в межах області платоспроможності S_k існують позиції, які не можуть бути закриті взагалі, а саме ті $(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in S_k$, що

$$(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}_k \text{ і } G_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right) < 0.$$

Це пов'язано з недостатністю коштів для оплати операційних витрат та / або податків тощо.

Динаміка портфеля цінних паперів і допустимі стратегії. У момент $t \geq 0$, портфель цінних паперів інвестора на фінансовому ринку буде описуватись як $(X(t), N_t, S(t), S_t)$, де $X(t)$ означає розмір вкладів інвестора на його ощадному рахунку, $N_t \in \mathbf{Y}$ – запас акцій інвестора на його фондовому рахунку, і $(S(t), S_t)$ – описує траекторію цін на акції (за одиницю) за всю передісторію $(-\infty, t]$.

Заданий початковий портфель цінних паперів

$$\pi = (C, \mathcal{T})\left(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0\right) = (x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}$$

і застосовується споживчо-торгова стратегія $\pi = (C, \mathcal{T})$.

Динаміка портфелю цінних паперів $\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t)\,, t \geq 0\}$ може бути описана наступним чином:

1) між торговими моментами запаси ощадного рахунку $\{X(t), t \geq 0\}$ задовольняють наступне диференціальне рівняння:

$$dX(t) = [\lambda X(t) - C(t)]\, dt, \;\; \tau(i) \leq t < \tau(i+1), \;\; i = 0, 1, 2, ..., \tag{11}$$

і в торговий момент $\tau(i)$:

$$\begin{gathered}(\tau\,(i)) = X\,(\tau\,(i)\,-) - \kappa - \\ -\sum_{k=0}^{\infty} m\,(i-k)\left[(1-\mu)\,S\,(\tau\,(i)) - \beta\,(S\,(\tau\,(i)) - S\,(\tau\,(i-k)))\right] \times \\ \times I_{\{n(i-k)>0, -n(i-k)\leq m(i-k)\leq 0\}} - \\ -\sum_{k=0}^{\infty} m(i-k)\left[(1+\mu) S\,(\tau(i)) - \beta\,(S\,(\tau(i)) - S\,(\tau(i-k)))\right] \times \\ \times I_{\{n(i-k)<0, 0\leq m(i-k)\leq -n(i-k)\}}.\end{gathered} \tag{12}$$

Нагадаємо, що $m(i) > 0$ (відповідно $m(i) < 0$) означає купівлю (продаж) нових акцій фонду в момент $\tau(i)$, і $m(i-k) > 0$ (відповідно $m(i-k) < 0$) – викупівля (продаж) частини чи всіх акцій, які заборгували (якими володіють).

2) запаси фондового рахунку в момент $t \geq 0$, $N_t \in Y$ не змінюються між торговими моментами і можуть бути виражені таким чином

$$N_t = N_{\tau(i)} = \sum_{k=-\infty}^{Q(t)} n(k) I_\tau(k), \text{ якщо } \tau(i) \leq t < \tau(i+1), \;\; i = 0, 1, 2, ...,$$

де $Q(t) = \sup\{\, k \geq 0 |\, \tau(k) \leq t\}$. А в торговий момент $\tau(i)$:

$$N_{\tau(i)} = N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i), \tag{13}$$

де $N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i) : (-\infty, 0] \to \mathbf{N}$ визначається як

$$\left(N_{\tau(i)-} \oplus \zeta(i)\right)(s) = \sum_{k=0}^{\infty} n(i-k) I_{\{\tau(i-k)\}}\left(\tau(i)+s\right) =$$

$$= m(i) I_{\{\tau(i)\}}\left(\tau(i)+s\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[n(i-k) + m(i-k) \times\right.$$

$$\left.\times \left(I_{\{n(i-k)<0, 0 \le m(i-k) \le -n(i-k)\}} + I_{\{n(i-k)>0, -n(i-k) \le m(i-k) \le 0\}}\right)\right] I_{\{\tau(i-k)\}}\left(\tau(i)+s\right)$$

3) ціновий процес не постраждає від діяльності інвестора на фінансовому ринку, і буде як і раніше описуватись (3).

Означення 4. [2] *Якщо інвестор починає свою діяльність з початковим портфелем цінних паперів* $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}_k$, *тоді споживчо-торговою стратегією* $\pi = (C, \mathcal{T})$ *є допустимою в* $(x, \xi, \varphi(0), \varphi)$, *якщо*

$$\zeta(i) \in R\left(N_{\tau(i)-}\right), \ \ \forall i = 1, 2, ...$$

і

$$(X(t), N_t, S(t), S_t) \in \mathbf{S}_k, \ \ \forall t \ge 0.$$

Клас усіх споживчо-інвестиційних стратегій, допустимих в $(x, \xi, \varphi(0), \varphi)$ позначатимемо $U_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right)$.

Постановка задачі. Враховуючи початковий стан портфеля цінних паперів $(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = (x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}_k$, метою інвестора є знаходження допустимої споживчо-торгової стратегії, яка максимізує наступну очікувану корисність від дисконтованого споживання:

$$J_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi; \pi\right) = E^{x,\xi,\varphi(0),\varphi;\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma} dt\right] \tag{14}$$

з класу допустимих споживчо-торгових стратегій $U_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right)$, де $E^{x,\xi,\varphi(0),\varphi;\pi}[\ldots]$ – математичне сподівання відносно ймовірнісної міри, породженої керованим (стратегією π) процесом станів $(X(t), N_t, S(t), S_t)\,, t \ge 0$ і обумовленої початковим станом

$$(X(0-), N_{0-}, S(0), S_0) = \left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right).$$

Тут $\alpha > 0$ позначає коефіцієнт дисконтування, і $0 < \gamma < 1$ вказує, що функція корисності $U(c) = \frac{c^{\gamma}}{\gamma}$, для $c > 0$ – це функція неприйняття ризику. Функціїї такого типу розглядались у більшості робіт, пов'язаних з пошуком опттмальної споживчо-торгової стратегії.

Означення 5. *Допустима споживчо-торгова стратегія* $\pi^* \in U_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right)$, *яка максимізує* $J_k\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi; \pi\right)$ *називається оптимальною споживчо-торговою стратегією, а функціонал* $V_\kappa : \mathbf{S}_\kappa \to R^+$, *визначений як*

$$V_\kappa\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right) = \sup_{\pi \in U_\kappa(x,\xi,\varphi(0),\varphi)} J_\kappa\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi; \pi\right) =$$

$$= J_\kappa \left(x, \xi, \varphi(0), \varphi; \pi^*\right) \tag{15}$$

називається функціоналом якості задачі оптимізації портфеля цінних паперів.

Задача оптимізації даного портфеля цінних паперів, де враховується уся предісторія цін на акції, буде сформульована як задача комбінованого класично-імпульсного керування.

Отже, задача полягає в том, щоб для кожного стану $(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}_\kappa$ визначити оптимальну стратегію і відповідний їй функціонал якості $V_\kappa : \mathbf{S}_\kappa \to [0, \infty)$.

Подібні питання вивчаються в роботі [2], [4] на випадок скінченної післядії.

При початковому стані $(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in \mathbf{S}_\kappa$ і допустимій споживчо-торговій стратегії $\pi = (C, T) \in U_\kappa \left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right)$, $\mathbf{S}_k$–значний керований процес станів будемо позначати $\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t)\,,\, t \geq 0\}$.

У [3] встановлена марковської властивість і формула Динкіна для процесу станів $\{Z(t), t > 0\}$. А також визначенно слабкий інфінітезимального оператора для марковського процесу S_t, в просторі X для функціоналів $v : R_+ \times X \to R$.

Розглянемо без доведення наступне твердження:

Лема. [2] *Нехай $(x, \xi, \varphi(0), \varphi) \in S_k$ задане і нехай Q відкрита підмножина S_k, що містить $(x, \xi, \varphi(0), \varphi)$. Для $\pi = (C, T) \in U_k(x, \xi, \varphi(0), \varphi)$ задане $(X(t), N_t, S(t), S_t)$. Визначимо $\tau = \inf\left\{t \geq 0 \,\middle|\, (X(t), N_t, S(t), S_t) \notin \bar{Q}\right\}$, де $\bar{Q}$ замикання множини Q. Тоді для кожного $t \in [0, \infty)$ матимамо наступне рівняння оптимальності*

$$V_k(x, \xi, \varphi(0), \varphi) =$$

$$\sup_{\pi \in U_k(x, \xi, \varphi(0), \varphi)} E\left[\int\limits_0^{t \wedge \tau} e^{-\alpha s} \frac{C^\gamma(s)}{\gamma} ds + I_{\{t \wedge \tau < \infty\}} e^{-\alpha (t \wedge \tau)} V_k(X(t \wedge \tau), N_{t \wedge \tau}, S(t \wedge \tau), S_{t \wedge \tau})\right],$$

де $t \wedge \tau = \min\{t, \tau\}$.

В роботі [2] вивчено вплив на функціонал якості ситуацій коли є споживання, але немає трансакцій, і навпаки, коли є трансакції, але немає споживання і одержана наступна нерівність:

$$\max\left\{\mathcal{A}V_\kappa, \mathcal{M}_\kappa V_\kappa - V_\kappa\right\} \leq 0 \;\; on \;\mathbf{S}_\kappa^\circ.$$

Тут $\mathbf{S}_\kappa^\circ$ – внутрішня частина області платоспроможності $\mathbf{S}_k$,

$$\mathcal{A}\Phi = \left(\mathbf{A} + rx\partial_x - \alpha\right)\Phi + \sup_{c \geq 0}\left(\frac{c^\gamma}{\gamma} - cx\partial_x\Phi\right),$$

$$\mathbf{A}\Phi(\varphi(0), \varphi) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbf{E}\left\{\Phi(S(t), S_t) - \Phi(\varphi(0), \varphi)\right\}$$

$$\mathcal{M}_\kappa \Phi\left(x, \xi, \varphi(0), \varphi\right) = \sup\left\{\Phi\left(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\varphi}\left(0\right), \hat{\varphi}\right) \middle|\, \varsigma \in R\left(\xi\right)\right\} - \{0\}\,, \left(\hat{x}, \hat{\xi}, \hat{\varphi}\left(0\right), \hat{\varphi}\right) \in S_\kappa,$$

$$\hat{x} = x - \kappa - \left(m(0) + \mu\left|m(0)\right|\psi(0)\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[(1 + \mu)m(-k)\psi(0) - \right.$$

$$\left. -\beta m(-k)\left(\varphi(0) - \varphi\left(\tau(-k)\right)\right)\right] I_{\{n(-k) < 0, 0 \leq m(-k) \leq -n(-k)\}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1-\mu)m(-k)\varphi(0)-\beta m(-k)\left(\varphi(0)-\varphi\left(\tau(-k)\right)\right)\right]\times$$

$$\times I_{\{n(-k)>0,-n(-k)\le m(-k)\le 0\}},$$

і для всіх $\theta\in(-\infty,0]$

$$\hat{\xi}\left(\theta\right)=\left(\xi\oplus\xi\right)\left(\theta\right)=$$

$$=m(0)I_{\{\tau(0)\}}\left(\theta\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(n(-k)+m(-k)\left[I_{\{n(-k)<0,0\le m(-k)\le -n(-k)\}}+\right.$$

$$\left.+\,I_{\{n(-k)>0,-n(-k)\le m(-k)\le 0\}}\right]\Big)\,I_{\{\tau(-k)\}}\left(\theta\right),\ \left(\hat{\varphi}(0),\hat{\varphi}\right)=\left(\varphi(0),\varphi\right).$$

Коли є пропорційна, але не фіксована вартість трансакції (тобто $\kappa=0$ і $\mu>0$), область платоспроможності можна записати у вигляді

$$\mathbf{S}_0=\left\{\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\right|G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\ge 0\}\cup S_+,$$

де G_0 функція ліквідності, при $\kappa=0$, тобто

$$G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)=x+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\min\left\{(1-\mu)n(-k),(1+\mu)n(-k)\right\}\psi(0)-\right.$$

$$\left.-n(-k)\beta\left(\psi(0)-\psi\left(\tau(-k)\right)\right)\right]$$

У випадку $\kappa=0$ ми стверджуємо, що

$$\mathbf{S}_+\subset\left\{\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\right|G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\ge 0\right\},$$

оскільки

$$x\ge 0 \text{ і } n(-i)\ge 0,\ \ \forall i=0,1,2,...\Rightarrow\ G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\ge 0.$$

У цьому випадку всі акції, що належать фондовому рахунку або заборговані можуть бути ліквідовані через відсутність фіксованої операційної вартості $\kappa=0$. Тому

$$\mathbf{S}_0=\left\{\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\right|G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\ge 0\right\}.$$

Ми легко бачимо, що $\mathbf{S}_0$ є необмеженою опуклою множиною.

Розклад межі області сплатоспроможності $\partial\mathbf{S}_\kappa$. Для $I\subset\aleph_0\equiv\{0,1,2,...\}$ межу $\partial\mathbf{S}_\kappa$ області $\mathbf{S}_\kappa$ можна розкласти наступним чином:

$$\partial\mathbf{S}_\kappa=\bigcup_{I\subset\aleph_0}\left(\partial_{-,I}\mathbf{S}_\kappa\cup\partial_{+,I}\mathbf{S}_\kappa\right),$$

де

$$\partial_{-,I}\mathbf{S}_\kappa=\partial_{-,I,1}\mathbf{S}_\kappa\cup\partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa,$$

$$\partial_{+,I}\mathbf{S}_\kappa=\partial_{+,I,1}\mathbf{S}_\kappa\cup\partial_{+,I,2}\mathbf{S}_\kappa,$$

$$\partial_{+,I,1}\mathbf{S}_\kappa=\left\{\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\right|G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)=0,\ x\ge 0,\ n(-i)<0$$

$$\text{для всіх } i\in I\ \ \&\ \ n(-i)\ge 0 \text{ для всіх }\ i\notin I\right\},$$

$$\partial_{+,I,2}\mathbf{S}_\kappa=\left\{\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\right|G_0\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)=0,\ x\ge 0,\ n(-i)=0$$

$$\text{для всіх } i \in I \;\; \& \;\; n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } \; i \notin I\},$$

$$\partial_{-,I,1}\mathbf{S}_\kappa = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0,\, x \geq 0,\, n(-i) < 0$$

$$\text{для всіх } i \in I \;\; \& \;\; n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } \; i \notin I\},$$

$$\partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0,\, x \geq 0,\, n(-i) = 0$$

$$\text{для всіх } i \in I \;\; \& \;\; n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } \; i \notin I\}.$$

Перетин $\partial_{+,I,1}\mathbf{S}_\kappa$ і $\partial_{+,I,2}\mathbf{S}_\kappa$ позначимо

$$Q_{+,I} = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0,\, x \geq 0,\, n(-i) = 0$$

$$\text{для всіх } i \in I \;\; \& \;\; n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } \; i \notin I\}.$$

А перетин $\partial_{-,I,1}\mathbf{S}_\kappa$ і $\partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa$ позначимо

$$Q_{-,I} = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0,\, x = 0,\, n(-i) = 0$$

$$\text{для всіх } i \in I \;\; \& \;\; n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } \; i \notin I\}.$$

Наприклад, якщо $I = \aleph$, тоді $n(-i) < 0$, $\forall i = 0, 1, 2, ...,$ і

$$G_k\,(x, \xi, \psi(0), \psi) \geq 0 \rightarrow x \geq \kappa.$$

В цьому випадку, $\partial_{-,\aleph}\mathbf{S}_\kappa = \varnothing$

$$\partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0,\, x \geq 0, \quad \text{і } n(-i) < 0 \text{ для всіх } \; i \in \aleph\},$$

і $\partial_{+,\aleph_0,2}\mathbf{S}_\kappa = \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0,\, x \geq 0,$
і $n(-i) = 0$ для всіх $i \in \aleph_0\} = \{ (x, 0, \psi(0), \psi) |\, 0 \leq x \leq \kappa\}$.

З іншого боку, якщо $I = \varnothing$ (порожня множина) (тобто $n(-i) \geq 0$ для всіх $i \in \aleph_0\}$), тоді

$$\partial_{+,\varnothing,1}\mathbf{S}_\kappa =$$

$$= \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0, x \geq 0, \text{ і } n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } i \in \aleph_0\},$$

$$\partial_{+,\varnothing,2}\mathbf{S}_\kappa =$$

$$= \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0, x \geq 0, \text{ і } n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } i \in \aleph_0\},$$

$$\partial_{-,\varnothing,1}\mathbf{S}_\kappa =$$

$$= \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0, x < 0, \text{ і } n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } i \in \aleph\},$$

$$\text{і } \partial_{-,\varnothing,2}\mathbf{S}_\kappa =$$

$$= \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) |\, G_0\,(x, \xi, \psi(0), \psi) < 0, x = 0, \text{ і } n(-i) \geq 0 \text{ для всіх } i \in \aleph_0\}.$$

В роботі [2] встановлено, що

$$\begin{cases} \max\{\mathcal{A}\Phi, \mathcal{M}_k\Phi - \Phi\} = 0 \text{ на } S_k^0, \\ \mathcal{A}\Phi = 0 \text{ на } \cup_{I\subset\aleph_0}\,\partial_{+,I,2}\mathbf{S}_\kappa, \\ \mathcal{L}^0\Phi \equiv (A - \alpha + rx\partial_x)\Phi = 0 \text{ на } \cup_{I\subset\aleph_0}\partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa, \\ \mathcal{M}_k\Phi - \Phi = 0 \text{ на } \cup_{I\subset\aleph_0}\partial_{I,1}\mathbf{S}_\kappa. \end{cases} \tag{16}$$

Нехай

$$\tilde{\mathcal{L}}\Phi \equiv \begin{cases} \mathcal{A}\Phi \text{ на } \mathbf{S}_k^0 \cup_{I \subset \aleph_0} \partial_{+,I,2}\mathbf{S}_\kappa, \\ \mathcal{L}^0\Phi \equiv (A - \alpha + rx\partial_x)\Phi \text{ на } \cup_{I \subset \aleph_0} \partial_{-,I,2}\mathbf{S}_\kappa. \end{cases} \tag{17}$$

Теорема.

(а) Нехай $U_k = S_k - \cup_{i \in N_0} \partial_{I,1} S_k$. *Припустимо, що існує невід'ємна, локально-обмежена функція* Φ *з області визначення слабкого інфінітезимального оператора така, що*

$$\tilde{\mathcal{L}}\Phi \leq 0 \text{ на } U_k$$

і $\Phi \geq \mathcal{M}_k\Phi$ *на* U_k

Тоді $\Phi \geq V_k$ *на* U_k.

(б) Визначимо

$$D \equiv \{ (x, \xi, \psi(0), \psi) \in U_k |\, \Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) > \mathcal{M}_k\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) \}.$$

Припустимо, що

$$\tilde{\mathcal{L}}\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = 0 \text{ на } D,$$

тоді $\hat{\zeta}(x, \xi, \psi(0), \psi) = \hat{\zeta}_\Phi$ *існує для всіх* $(x, \xi, \psi(0), \psi) \in S_k$ *за припущенням. Нехай*

$$c^* = \begin{cases} (\partial_k\Phi)^{\frac{1}{\gamma-1}} \text{ на } S_k^0 \cup \bigcup_{I \in N_0} \partial_{+,I,2}\partial S_k, \\ 0 \text{ на } \bigcup_{I \in N_0} \partial_{-,I,2}\partial S_k \end{cases} \tag{18}$$

Визначимо імпульсне керування $\mathcal{T}^* = \{(\tau^*(i), \zeta^*(i)), i = 1, 2, \ldots\}$ *як пару: Спершу, візьмемо* $\tau^*(0) = 0$ *і рекурентно матимемо:*

$$\tau^*(i+1) = inf\left\{t > \tau^*(i) |\, \left(X^{(i)}(t), N_t^{(i)}, S(t), S_t\right) \notin D\right\}, \tag{19}$$

$$\zeta^*(i+1) = \hat{\zeta}\left(X^{(i)}(\tau^*(i+1)-), N^i_{\tau^*(i+1)-}, S(\tau^*(i+1)), S_{\tau^*(i+1)}\right), \tag{20}$$

$\left\{\left(X^{(i)}(t), N_t^{(i)}, S(t), S_t\right), t \geq 0\right\}$ *керований процес стану, отриманий шляхом застосування*

$$\pi^*(i) = (c^*, (\tau^*(1), \tau^*(2), \ldots, \tau^*(i); \xi^*(1), \xi^*(2), \ldots, \xi^*(i))), \; i = 1, 2, \ldots.$$

Припустимо, що

$$\pi^*(i) = (C^*, \mathcal{T}^*) \in \mathcal{U}_k(x, \xi, \psi(0), \psi),$$

$$e^{-at}\Phi(X^*(t), N_t^*, S(t), S_t) \to 0, \text{при } t \to 0$$

і сім'я

$$\left\{e^{-at}\Phi(X^*(t), N_t^*, S(t), S_t) \,|\tau \in G - \text{моментом зупинки}\right\} \tag{21}$$

є неперервно-інтегровна. Тоді $\Phi(x, \xi, \psi(0), \psi) = V_k(x, \xi, \psi(0), \psi)$ *і* π^* *отримане в* (19) *і* (20) *є оптимальним.*

Доведення. (а) Нехай $\pi = (C, \mathcal{T}) \in \mathcal{U}_k(x, \xi, \psi(0), \psi)$, де $C = \{C(t), t \geq 0\}$ є процесом витрат і $\mathcal{T} = \{(\tau(i), \xi(i)), i = 1, 2, \ldots\}$ є торговою стратегією. Позначимо кероване управління процесами (для π) з початковим станом $(x, \xi, \psi(0), \psi)$ $\{Z(t) = (X(t), N_t, S(t), S_t), t \geq 0\}$.

Для $R \geq 0$, підставимо

$$T(R) = R \wedge \inf\{t > 0 | \|Z(t)\| \geq R\}$$

і отримаємо

$$\theta(i+1) = \theta(i+1; R) = \tau(i) \vee (\tau(i+1) \wedge T(R)),$$

де $\|Z(t)\|$ є нормою $Z(t)$ на $R \times N \times R \times D_p^2$ в результаті топології. Потім за узагальненою формулою Динкіна [1], отримаємо

$$E\left[e^{-a\theta(i+1)}\Phi\left(Z(\theta(i+1)-)\right)\right] =$$

$$E\left[e^{-a\tau(i)}\Phi\left(Z\left(\tau(i)\right)\right) + \int\limits_{\tau(i)}^{\theta(i+1)-} e^{-at}\mathcal{L}^{C(t)}\Phi\left(Z(t)\right)dt\right] \leq$$

$$E\left[e^{-a\tau(i)}\Phi\left(Z\left(\tau(i)\right)\right)\right] - E\left[\int\limits_{\tau(i)}^{\theta(i+1)-} e^{-\delta t}\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}dt\right],$$

оскільки $\tilde{\mathcal{L}}\Phi \leq 0$.

Еквівалентно маємо

$$E\left[e^{-a\tau(i)}\Phi\left(Z\left(\tau(i)\right)\right)\right] - E\left[e^{-a\theta(i+1)}\Phi\left(Z(\theta(i+1)-)\right)\right] \geq$$

$$\geq E\left[\int\limits_{\tau(i)}^{\theta(i+1)-} e^{-\delta t}\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}dt\right].$$

Нехай $R \to \infty$, використовуючи лему Фату і підсумовуючи від $i = 0$ до $i = k$ отримаємо

$$\Phi\left(x, \xi, \psi(0), \psi\right) + \sum_{i=1}^{k} E\left[e^{-a\tau(i)}\left(\Phi\left(Z(\tau(i))\right) - \Phi\left(Z(\tau(i-))\right)\right)\right] -$$

$$-E\left[e^{-a\tau(k+1)}\Phi\left(Z(\tau(k+1)-)\right)\right] \geq E\left[\int\limits_{0}^{\theta(k+1)-} e^{-\delta t}\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}dt\right].$$

Тепер

$$\Phi\left(Z(\tau(i))\right) \leq \mathcal{M}_k\Phi\left(Z(\tau(i)-)\right) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, \text{ тому}$$

$$\Phi\left(x, \xi, \psi(0), \psi\right) + \sum_{i=1}^{k} E\left[e^{-a\tau(i)}\left(\mathcal{M}_k\Phi\left(Z(\tau(i)-)\right) - \Phi\left(Z(\tau(i)-)\right)\right)\right] \geq$$

$$\geq E\left[\int\limits_{0}^{\theta(k+1)-} e^{-\delta t}\frac{C^{\gamma}(t)}{\gamma}dt + e^{-a\tau(k+1)}\Phi\left(Z(\tau(k+1)-)\right)\right].$$

Зрозумідо, що

$$\mathcal{M}_k\Phi\left(Z(\tau(i)-)\right)-\Phi\left(Z(\tau(i)-)\right)\leq 0.$$

Отже,

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq E\left[\int\limits_0^{\theta(k+1)-} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}dt+e^{-a\tau(k+1)}\Phi\left(Z(\tau(k+1)-)\right)\right].$$

Спрямовуючи $k\to\infty$, отримаємо

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq E\left[\int\limits_0^{\infty} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}dt\right], \tag{22}$$

причому, Φ – локально-обмежена невід'ємна функція. Отже

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq J_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi\right),\ \forall\pi\in\mathcal{U}_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right). \tag{23}$$

Тому $\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq V_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)$.

(б) Визначимо $\pi^*=(C^*,\mathcal{T}^*)$, де $\mathcal{T}^*=\left\{\left(\tau^*(i),\xi^*(i)\right),\, i=1,2,\ldots\right\}$ відповідно (19) і (20). Потім повторіть аргумент у частині (а) для $\pi=\pi*$. Очевидно, що нерівності (22)–(23) стають рівностями. Таким чином, отримаємо, що

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq E\left[\int\limits_0^{\tau^*(k+1)} e^{-\delta t}\frac{C^\gamma(t)}{\gamma}dt+e^{-a\tau^*(k+1)}\Phi\left(Z(\tau^*(k+1)-)\right)\right], \tag{24}$$

$$\forall k=1,2,\ldots.$$

Спрямовуючи $k\to\infty$ в (24), для (21) отримаємо

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)=J_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi\right).$$

Об'єднуючи це з (23), отримаємо

$$\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)\geq\sup_{\pi\in\mathcal{U}_k(x,\xi,\psi(0),\psi)} J_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi\right)\geq J_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi;\pi^*\right)=$$

$$=\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right).$$

Отже, $\Phi\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)=V_k\left(x,\xi,\psi(0),\psi\right)$ і π^* є оптимальним. Це доводить твердження теореми.□

Список використаної літератури

1. *Антонюк С.В., Ясинский В.К.* Существование l-го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – **4** – С. 141-151.
2. *Mou-Hsiung Chang.* Stochastic control of hereditary systems and applications // Stochastic modeling and applied probability formerly: applications of mathematics **59**. Springer. – 2008. –404 p.
3. *Антонюк С.В.* Властивості розвязків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з нескінченною післядією : дис. кандидата фіз.-мат. наук: 01.05.01 // *Антонюк Світлана Володимирівна.* – Чернівці, 2009. – 176 с.
4. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием. – М.:Наука, 1992. – 336 с.

Одержано 01.12.2016