УДК 519.21

Т. В. Боярищева, М. В. Далекорей, М. М. Михасюк, І. Й. Поляк, П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОЦІНОК ЗОЛОТАРЬОВА ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem generalized for sequences series random variables.

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин.

У даній роботі результати роботи [1] узагальнюються на випадок послідовності серій випадкових величин.

Нехай $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — послідовність серій незалежних і однаково розподілених в кожній серії випадкових величин, $F_n(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}, $f_n(t)$ – характеристична функція ξ_{ni} , $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$.

Позначимо: $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$, $H_n(x) = F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)$.

Введемо псевдомоменти такого вигляду:

$$\varkappa_n = 3\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |H_n(x)|\, dx, \qquad \varkappa_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) |H_n(x)|\, dx.$$

Теорема 1. *Для всіх $n \geq 1$ справедливі нерівності:*

$$\rho_n \leq C_1 \frac{max\left\{\varkappa_{n0}, \quad (\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}}\right\}}{\sqrt{n}}, \qquad \rho_n \leq C_2 \frac{max\left\{\varkappa_n, \quad (\varkappa_n)^{\frac{n}{3n+1}}\right\}}{\sqrt{n}},$$

де C_1, C_2 – деякі абсолютні сталі.

Для довільного $y > 0$ позначимо

$$\nu_{n0}^{(1)}(y) = \int_{|x| \leq y} \max\left(1, |x|^3\right) |dH_n(x)|, \quad \nu_{n0}^{(2)}(y) = \int_{|x| > y} \max\left(1, x^2\right) |dH_n(x)|.$$

Теорема 2. *Для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність*

$$\rho_n \leq C_3 \inf_{y>0} \left\{\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right\},$$

де C_3 – абсолютна стала.

Наслідок. *Для всіх $n \geq 1$*

$$\rho_n \leq C_3 \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}},$$

де $\nu_{n0}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) |dH_n(x)|$.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$, $\mathrm{M}\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$. Якщо покладемо $\xi_{ni} = \xi_i/\sqrt{n}$, то $F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = F(x)$. Тоді із теореми 1 і наслідку одержуємо результати роботи [1].

Для доведення теореми необхідні наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|$. *Тоді для всіх* $t \in \mathfrak{R}$ *мають місце наступні нерівності*:

$$\omega_n(t) \le \varkappa_n \frac{|t|^3}{6}, \tag{1}$$

$$\omega_n(t) \le \varkappa_{n0} min\left(|t|, \frac{t^3}{6}\right) \le \varkappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}}, \tag{2}$$

$$\omega_n(t) \le \nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{3}$$

$$\omega_n(t) \le \frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{4}$$

$$\omega_n(t) \le \frac{1}{2} t^2 \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right). \tag{5}$$

Доведення. Із умов $M\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \frac{1}{n}$, одержуємо

$$\omega_n(t) = \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sqrt{n}} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) e^{itx} dx \right| =$$

$$= \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right|. \tag{6}$$

Із нерівності ([1], ст.372)

$$\left| e^{iz} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iz)^j}{j!} \right| \le \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \ 0 \le \gamma \le 1, \tag{7}$$

одержуємо

$$\omega_n(t) = \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right| \le$$

$$\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_n.$$

Отже, нерівність (1) леми 1 доведена. За щойно доведеною нерівністю маємо:

$$\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}.$$

Із рівності (6)

$$\omega_n(t) = \left|t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) e^{itx} dx\right| \leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = |t| \varkappa_{n0}.$$

Оскільки, $\omega_n(t) \leq |t| \varkappa_{n0}$ і $\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}$, то

$$\omega_n(t) \leq min\left(\frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0},\ |t| \varkappa_{n0}\right) = \varkappa_{n0} min\left(\frac{|t|^3}{6}, |t|\right).$$

Перша частина нерівності (2) леми 1 доведена.

Нехай $min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = |t|$, тоді $|t| \leq \frac{|t|^3}{6}$, $1 \leq \frac{t^2}{6}$, $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \geq 1$. Тому

$$min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = |t| \leq |t| \frac{|t|}{\sqrt{6}} = \frac{t^2}{\sqrt{6}}.$$

Якщо ж $min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = \frac{|t|^3}{6}$, то $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq 1$, тому

$$min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = \frac{|t|^3}{6} = \frac{t^2}{\sqrt{6}} \frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq \frac{t^2}{\sqrt{6}}.$$

Нерівність (2) доведена.

$$\omega_n(t) = \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right).$$

Із (6) і (7) для довільного $y > 0$

$$\omega_n(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_{|x| \leq y} \max\left(1,\ |x|^3\right) \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| +$$

$$+\int_{|x|>y} \max\left(1,\ x^2\right)\ \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right| = \nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right),$$

$$\omega_n\left(t\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\int_{|x|\le y}\left|\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)\right|\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|+$$

$$+\int_{|x|>y}\left|\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)\right|\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\frac{|t|^3}{6}\int_{|x|\le y}|x|^3\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|+t^2\int_{|x|>y}x^2\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+t^2\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right).$$

Крім того,

$$\omega_n\left(t\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-it\right)d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\omega_n\left(t\right)\le\frac{1}{2}t^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le\frac{1}{2}t^2\left(\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right)\right).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2.1 *Нехай* $c\epsilon\left(0,2^{-1}\right)$. *Якщо* $\varkappa_{n0}\le c$ *і* $|t|\le T_{11}=\sqrt{-2\ln\varkappa_{n0}}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_{11}t^2}, \tag{8}$$

де $c_{11}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}>0$,
а якщо $\varkappa_{n0}\le c$ *і* $|t|>T_{11}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le 2\varkappa_{n0}\left|t\right|. \tag{9}$$

Якщо ж $\varkappa_{n0}>c$, *то при* $|t|\le T_{12}=\frac{c}{\varkappa_{n0}}$,

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_{12}t^2}, \tag{10}$$

де $c_{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}c\sqrt{e}>0$.

Доведення. Будемо використовувати нерівність

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|=\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}}+e^{\frac{-t^2}{2}}\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right). \tag{11}$$

Нехай $\varkappa_{n0}\le c$ і $|t|\le T_{11}$.

Із (11), нерівності (2) леми 1, визначення T_{11} ($e^{\frac{\left(T_{11}\right)^2}{2}}=\left(\varkappa_{n0}\right)^{-1}$) і нерівності $1+x\le e^x$

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-\frac{t^2}{2}}+\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{(T_{11})^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\,e^{\frac{t^2}{\sqrt{6}}}=e^{-t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}.$$

Нехай $\varkappa_{n0}\leq c, |t|>T_{11}$.

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right)\leq e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}}+\varkappa_{n0}\left|t\right|.$$

Оскільки, $e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}}=\varkappa_{n0},\quad \varkappa_{n0}\leq c<2^{-1}$, а

$$T_{11}=\sqrt{-2\mathrm{ln}\varkappa_{n0}}\geq\sqrt{-2\mathrm{ln}c}>\sqrt{-2\mathrm{ln}2^{-1}}=\sqrt{\mathrm{ln}4}>1,$$

то ми отримаємо наступне:

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq\varkappa_{n0}\left(1+|t|\right)\leq 2\varkappa_{n0}\left|t\right|.$$

Розглянемо наступний випадок: $\varkappa_{n0}>c, |t|\leq T_{21}$, де $T_{21}=\frac{c}{\varkappa_{n0}}$.
За умовою $T_{12}<1$. Із (11) і (2)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\omega_n\left(t\right)\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{|t|^3}{6}\right)\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{(T_{12})^2}{2}}\varkappa_{n0}\,T_{12}\frac{t^2}{6}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\,\varkappa_{n0}\,\frac{c}{\varkappa_{n0}}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2c\sqrt{e}}{6}}=$$

$$=e^{-t^2c_{12}}.$$

Лема 2 доведена.
Лема 2.2. *Нехай* $c\in\left(0,e^{-1}\right)$.
Якщо $\varkappa_n\leq c$*і* $|t|\leq T_{21}=\sqrt{-2\mathrm{ln}\varkappa_n}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-t^2c_{21}},\tag{12}$$

де $c_{21}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\;\mathrm{ln}c}>0$;
Якщо $\varkappa_n\leq c$ *і* $|t|>T_{21}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq\ \varkappa_n|t|^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\right).\tag{13}$$

Якщо $\varkappa_n>c$ *і* $|t|\leq T_{22}=\frac{c}{\varkappa_n}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-t^2c_{22}},\tag{14}$$

де $c_{22}=1-\frac{\sqrt{e}}{6}c$.
Доведення. Нехай $\varkappa_n\leq c$, Із (11) і нерівності (1) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right)\leq e^{\frac{-t^2}{4}}\left(e^{\frac{-t^2}{4}}+e^{\frac{t^2}{4}}\omega_n\left(t\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+\left(\varkappa_n\right)^{-\frac{1}{2}}\varkappa_n\frac{t^2}{6}T_{21}\right)=e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+t^2\frac{1}{6}\sqrt{-2\varkappa_n\mathrm{ln}\varkappa_n}\right).$$

Оскільки, $x\ln x$ спадає на $(0,\ e^{-1}]$, а $0<\varkappa_n\le c<e^{-1}$, то

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+t^2\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\right)\le e^{-t^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\right)}=e^{c_{21}t^2}.$$

Із умови $0<c\le e^{-1}$ і того, що $x\ln x$ спадає на $(0,\ e^{-1}]$, випливає $\sqrt{-2c\ln c}\le\sqrt{2e^{-1}}$. Тому $c_{21}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\ge\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{2e^{-1}}>0$.

Нехай $\varkappa_n\le c, |t|>T_{21}$. Оскільки $\varkappa_n\le c\le e^{-1}$, $\ln\varkappa_n\le\ln c\le -1$, то

$$T_{21}=\sqrt{-2\ln\varkappa_n}\ge\sqrt{2}.$$

Із (11) і (1)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n(t)\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\varkappa_n\frac{|t|^3}{6}\le e^{-\frac{(T_{21})^2}{2}}+\varkappa_n\frac{|t|^3}{6}=$$

$$=\varkappa_n\left(1+\frac{|t|^3}{6}\right)\le\varkappa_n|t|^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\right).$$

Нехай $\varkappa_n>c,\ |t|\le T_{22}$, тоді із (11) і (1) леми 1 ($T_{22}<1$)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\frac{|t|^3}{6}\varkappa_n=e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\frac{|t|^3}{6}\varkappa_n\right)\le$$

$$\le e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+t^2e^{\frac{(T_{22})^2}{2}}\frac{T_{22}}{6}\varkappa_n\right)\le e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+t^2\frac{\sqrt{e}}{6}c\right)\le e^{c_{22}t^2}.$$

Лема доведена.

Лема 2.3. *Нехай* $c\in\left(0,2^{-4}\right)$, $\nu_{n0}^{(2)}\le c$, $\nu_{n0}(y)=max\left\{\nu_{n0}^{(1)}(y);\ \nu_{n0}^{(2)}(y)\right\}$. *Якщо* $\nu_{n0}(y)\le c$ і $|t|\le X_1=\sqrt{-2\ln\nu_{n0}(y)}$, *де*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_1t^2}, \tag{15}$$

де $c_1=\frac{1}{4}-\sqrt{c}>0$, *а при* $\nu_{n0}(y)\le c$ і $|t|>X_1$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le 3\nu_{n0}(y), \tag{16}$$

якщо ж $\nu_{n0}(y)>c$, *то при* $|t|\le X_2=\frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_2t^2}, \tag{17}$$

де $c_2=\frac{1}{2}-\frac{7}{6}c\sqrt{e}>0$.

Доведення. Нехай $\nu_{n0}(y)\le c, |t|\le X_1$. Тоді із (11) і (5) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(e^{-\frac{t^2}{4}}+e^{\frac{t^2}{4}}\omega_n(t)\right)\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+e^{\frac{t^2}{4}}\frac{t^2}{2}\left(\nu_{n0}^{(1)}(y)+\nu_{n0}^{(2)}(y)\right)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+e^{\frac{{X_1}^2}{4}}t^2\nu_{n0}(y)\right)=e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+t^2\sqrt{\nu_{n0}(y)}\right)\le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+t^2\sqrt{c}\right)\leq e^{-c_1t^2}.$$

Якщо $\nu_{n0}(y)\leq c$ і $|t|>X_1$, то із (11) і (3) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{{X_1}^2}{2}}+\nu_{n0}^{(1)}(y)+\nu_{n0}^{(2)}(y)\leq 3\nu_{n0}(y).$$

У випадку $\nu_{n0}(y)>c$ із умов леми 2.3 випливає, що $\nu_{n0}^{(1)}(y)>c$. Із (4) леми 1 і (11) при $|t|\leq X_2\,(X_2\ <1)$

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\omega_n(t)\right)\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\left(\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2\nu_{n0}^{(2)}(y)\right)\right)\leq e^{-c_2t^2}.$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\left(\frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)}\frac{t^2}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2c\right)\right)\leq e^{-c_2t^2}.$$

Лема доведена.

Доведення теореми 1. Використаємо нерівність ([3], ст.299):

$$\sup_{\mathrm{x}}|F(x)-G(x)|\ \leq\frac{2}{\pi}\int_0^T|f(t)-g(t)|\,\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi T}\left|\sup_x G'(x)\ \right|. \tag{18}$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x)=\Phi_n(x)\,;\ G(x)=\Phi(x)\,;\ f(t)=(f_n(t))^n;\ g(t)=e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n=\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|\ \leq\frac{2}{\pi}\ \int_0^T\left|f_n^n(t)-e^{\frac{-t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi T}}.$$

Зробимо заміну $t=z\sqrt{n}$ в інтегралі із правої частини нерівності, тоді

$$\rho_n\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi T}}. \tag{19}$$

Використаємо рівність

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1},$$

де покладемо $a=f_n\left(t\sqrt{n}\right),\ b=e^{\frac{-t^2}{2}}$, тоді

$$\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\leq\omega_n(t)\sum_{k=1}^{n}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|^{n-k}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)}. \tag{20}$$

Із (2) леми 1 і (8), (10) леми 2.1 при $|t| \leq T_{1m}$ ($m = 1$ при $\varkappa_{n0} \leq c$ і $m = 2$ при $\varkappa_{n0} > c$)

$$\left| f_n^n \left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0} \sum_{k=1}^{n} e^{-c_{1m}t^2(n-k)} e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq \tag{21}$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0} \cdot n e^{-c_{1m}t^2(n-1)}.$$

Ми використали, що $c_{1m} \leq \frac{1}{2}$.

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} > c$. У (19) покладемо $T = T_{12}\sqrt{n}$, а в нерівності (21) $m = 2$, тоді одержимо таку оцінку:

$$I = \int_0^{T_{12}} \left| f_n^n \left(z\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-z^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{\varkappa_{n0} n}{6} \int_0^{T_{12}} t^2 e^{-c_{12}t^2(n-1)} dt \leq$$

$$\leq \varkappa_{n0} \frac{n}{12[c_{12}(n-1)]^{3/2}} \int_0^{\infty} z^{1/2} e^{-z} dz \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{c_{12}^3}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \tag{22}$$

Тоді із (19) для $n \geq 2$ одержимо

$$\rho_n \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} C_4,$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_{12}^3}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi c}}.$$

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} \leq c$, $X = \varkappa_{n0}^{-\frac{n}{n+1}} c, T' = min\left(T_{11}, X\right)$. Покладемо в (19) $T = X\sqrt{n}$. Тоді

$$I = \int_0^X \left| f_n^n \left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{T'} \left| f_n^n \left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^X \left| f_n^n \left(t\sqrt{n}\right) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^X e^{\frac{-t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{23}$$

Будемо розглядати випадок $T' = T_{11}$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ і доведення стає очевидним. Із нерівності (21), аналогічно до (22),

$$I_1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} C_5, \tag{24}$$

де $C_5 = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2\pi}{c_{11}^3}}$.

Оцінимо спочатку інтеграл $I_2 = \int_{T'}^X \left| f_n^n \left(t\sqrt{n}\right) \right| \frac{dt}{t}$.

Із нерівності (2) леми 1 і нерівності (9) леми 2.1 при $n \geq 2$

$$I_2 \leq (2\varkappa_{n0})^n \int_{T_{11}}^X t^n \frac{dt}{t} \leq (2\varkappa_{n0})^n \frac{X^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(2c)^n \varkappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}} \frac{(2c)^2}{\sqrt{2}}. \tag{25}$$

Залишилось оцінити I_3. Враховуємо, що $T_{11} > 1$. Тоді

$$I_3 = \int_{T_{11}}^{X} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} \leq \int_{T_{11}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = \int_{T_{11}\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(T_{11}\sqrt{n})^2} e^{-\frac{1}{2}(T_{11}\sqrt{n})^2} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^n}{n} \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{26}$$

Із (19), (23)–(26) випливає справедливість першого твердження теореми у випадку $\varkappa_{n0} \leq c$, $n > 1$.

Нехай $n = 1$. Якщо $\varkappa_{n0} > c$, то $\rho_1 \leq 1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{c}$.

Якщо $\varkappa_{n0} \leq c$. Тоді із (2) леми 1, нерівності (19), у якій покладемо $T = X$,

$$\rho_1 = sup\left|\Phi_1(x) - \Phi(x)\right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_1(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^X \varkappa_{10} t \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{2}{\pi}\varkappa_{10} X + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\varkappa_{10}\varkappa_{10}^{-\frac{1}{2}} c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = (\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi}c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \right).$$

Перше твердження теореми повністю доведене.

Друге твердження теореми доводиться повністю аналогічно. Лише відзначимо, що у випадку $n \geq 2$, $\varkappa_n \leq c$ у (19) вибираємо $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\varkappa_n)^{-\frac{n}{3n+1}}, T' = min(T_{21}, X)$.

Доведення теореми 2. Будемо вважати, що $\nu_{n0}^{(2)}(y) \leq c$, бо у випадку $\nu_{n0}^{(2)}(y) > c$

$$\rho_n \leq 1 \leq \frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c}$$

і теорема 2 стає очевидною.

Із лем 1 і 2.3, нерівності (4). (15), (17), при $|t| \leq X_m$ ($m = 1$ при $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $m = 2$ при $\nu_{n0}(y) > c$) одержимо

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \omega_n(t) \sum_{k=1}^{n} \left| f_n(t\sqrt{n}) \right|^{n-k} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \sum_{k=1}^{n} e^{-c_m t^2(n-k)} e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq$$

$$\leq n \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_m t^2(n-1)}. \tag{27}$$

Нехай $n \geq 2, \nu_{n0}(y) > c$. Тоді в (19) покладемо $T = X_2\sqrt{n}$, а в останній нерівності $m = 2$, тоді зі (27) одержимо

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{X_2} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}n\int_0^{X_2}\left(\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2\nu_{n0}^{(2)}(y)\right)e^{-c_2t^2(n-1)}\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}}\leq$$

$$\leq \frac{n}{3\pi}\nu_{n0}^{(1)}(y)\int_0^{\infty}t^2e^{-c_2t^2(n-1)}dt+\frac{2n}{\pi}\nu_{n0}^{(2)}(y)\int_0^{\infty}te^{-c_2t^2(n-1)}dt+$$

$$+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}}=\nu_{n0}^{(1)}(y)\frac{n}{3\pi}\cdot\frac{1}{2\left[c_2(n-1)\right]^{3/2}}\int_0^{\infty}z^{1/2}e^{-z}dz+$$

$$+\nu_{n0}^{(2)}(y)\frac{n}{\pi}\cdot\frac{1}{c_2(n-1)}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}}\leq$$

$$\leq C_6\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}}+C_7\nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{28}$$

де $C_6=\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_2^3}}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}$, $C_7=\frac{2}{c_2}$.

При $n=1$і $\nu_{n0}(y)>c$

$$\rho_n\leq 1\leq\frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c}\leq\frac{1}{c}\left(\nu_{n0}^{(1)}(y)+\nu_{n0}^{(2)}(y)\right).$$

Отже, у випадку $\nu_{n0}(y)>c$, теорема 2 доведена.

Нехай $n\geq 2,\ \ \nu_{n0}(y)\leq c$, тоді в (26) покладемо $T=Y\sqrt{n},\ \ Y=\frac{c}{\nu_{n0}(y)}$ і $X'=min\{X_1,Y\}$. Інтеграл у (19)

$$I=\int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t}\leq\int_0^{X'}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{X'}^{Y}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|^n\frac{dt}{t}+\int_{X'}^{Y}e^{\frac{-t^2}{2}n}\frac{dt}{t}=J_1+J_2+J_3. \tag{29}$$

Для оцінки інтеграла J_1, аналогічно до (28), із (27) $(m=1)$ одержимо

$$J_1\leq\frac{2}{\pi}n\int_0^{X'}\left(\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2\nu_{n0}^{(2)}(y)\right)e^{-c_1t^2(n-1)}\frac{dt}{t}\leq$$

$$\leq C_8\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}}+C_9\nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{30}$$

де $C_8=\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_1^3}}, C_9=\frac{2}{c_1}$.

Будемо вважати, що $X'=X_1$, бо інакше $J_2=0, J_3=0$ і (**??**) для $n\geq 2$ є очевидною.

Із леми 2.2, нерівність (**??**), одержимо

$$J_2=\frac{2}{\pi}\int_{X'}^{Y}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|^n\frac{dt}{t}\leq\frac{2}{\pi}(3\nu_{n0}(y))^n\int_{X'}^{Y}\frac{dt}{t}\leq\frac{2}{\pi}(3\nu_{n0}(y))^n\frac{Y}{X'}.$$

Оскільки, $\nu_{n0}(y) \le c < \frac{1}{16}$, то $X_1 = \sqrt{-2\ln\nu_{n0}(y)} \ge \sqrt{-2\ln c} > 2$. Тому,

$$J_2 \le \frac{2}{\pi}(3\nu_{n0}(y))^{n-1} \cdot \frac{3c}{2} \le 3\nu_{n0}(y) \cdot \frac{3c}{\pi} \cdot (3c)^{n-2} \le$$

$$\le \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \frac{1}{\pi c}\sqrt{n}(3c)^n.$$

При $n \ge 2$, вираз $\sqrt{n}(3c)^n$ є обмеженим, тому існує така стала C_{10}, що

$$J_2 \le C_{10} \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right). \tag{31}$$

Оцінимо J_3 наступним чином,

$$J_3 = \frac{2}{\pi}\int_{X'}^{Y} e^{\frac{-t^2}{2}n}\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_{\frac{{X_1}^2 n}{2}}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u} \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{{X_1}^2 n}{2}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{{X_1}^2 n}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi n}(\nu_{n0}(y))^n \le \frac{\nu_{n0}(y)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{c}{2\pi} \le c_8 \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right). \tag{32}$$

Із (19), (29)–(**??**) одержуємо справедливість теореми 2 при $n \ge 2$ у випадку $\nu_{n0}(y) \le c$. Нехай $n = 1$, тоді

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |H_1(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |dH_1(x)| =$$

$$= \int_{|x|\le y} |dH_1(x)| + \int_{|x|>y} |dH_1(x)| \le \nu_{10}^{(1)}(y) + \nu_{20}^{(2)}(y).$$

Теорема 2 доведена.

Список використаної літератури

1. *Zolotarev V.M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531-543.
2. *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Лоев М.* Теория вероятностей / М. Лоев. – М.: из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 30.03.2017