УДК 517.9

І. В. Романюк (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ІСНУВАННЯ НЕТРИВІАЛЬНОГО АТРАКТОРУ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

In this paper was proved existence of nontrivial global attractor for impulsive dynamical system, generated by the two-dimensional parabolic system. Solutions of this system have multi-valued impulsive perturbations at the moments of intersection with given subset of the phase space.

У роботі доведено існування нетривіального глобального атрактору для імпульсної динамічної системи, що породжується двовимірною параболічною системою, розв'язки якої зазнають многозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

1. Вступ. Одним з основних методів дослідження нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем є теорія глобальних атракторів [1]. Характер поведінки розподілених систем із збуреннями у фіксовані моменти часу [2] досліджувався у роботах [3–5]. Зокрема, були встановлені критерії існування та властивості глобальних атракторів. Важливим класом систем з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу є імпульсні динамічні системи [2, 6]. У роботах [7–10] у випадку скінченновимірного фазового простору досліджувалась якісна поведінка таких систем. У нескінченновимірному випадку для класу імпульсних динамічних систем із скінченною кількістю стрибків вздовж траєкторії, основним об'єктом вивчення є глобальні атрактори [11, 12]. Більш загальний підхід щодо дослідження поведінки розв'язків таких систем було розроблено в [13, 14]. Його реалізація для скалярного параболічного рівняння з многозначним імпульсним збуренням здійснена в [15]. У даній роботі цей підхід застосовується до імпульсної двовимірної параболічної системи, розв'язки якої зазнають многозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

2. Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ – обмежена область. Відносно невідомих функцій $u(t,x), v(t,x)$ в $(0,+\infty)\times\Omega$ розглядається параболічна система:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a\Delta v + 2b\Delta u, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де

$$a > 0, \ |b| < a. \tag{2}$$

Фазовим простором задачі (1) є простір $H = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ з нормою $\|z\|_H = \sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}$, де тут і надалі $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — це норма та скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Система (1) породжує напівгрупу $V : R_+ \times H \to H$, для якої в силу (2)

$$\exists \delta > 0, \ \ \forall t \geq 0, \ \ \forall z_0 \in H \ \ \|V(t,z_0)\|_H \leq e^{-\delta t}\|z_0\|_H \tag{3}$$

та справедлива така формула:

$$\forall t \geq 0, \ \ \forall z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H \ \ \ V(t,z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (u_0,\psi_i) \\ (v_0,\psi_i) - 2b\lambda_i(u_0,\psi_i)t \end{pmatrix} e^{-a\lambda_i t}\psi_i, \tag{4}$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ — розв'язки спектральної задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\psi = -\lambda\psi, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

За функцію ψ, выдповыдно до [14], вызьмемо розв'язок (5):

$$\psi := \psi_1, \quad \lambda := \lambda_1.$$

Очевидно, що в силу оцінки (3) напівгрупа V має тривіальний глобальний атрактор $A = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$.

Для фіксованих $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \mu > 0$ на розв'язках (1) розглядається наступна імпульсна задача:
коли фазова точка $z(t)$ досягає імпульсної множини

$$M = \left\{ z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \in H \ \middle|\ |(u,\psi_1)| \le \gamma, \quad \alpha u + \beta v = 1 \right\}, \tag{6}$$

імпульсне многозначне відображення $I : M \mapsto M'$ переводить її в нове положення $z^+ \in Iz \subset M'$, де

$$M' = \left\{ z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \in H \ \middle|\ |(u,\psi)| \le \gamma,\ \alpha u + \beta v = 1 + \mu \right\}. \tag{7}$$

У роботі для певного класу відображень I доведено, що імпульсна задача (1), (6), (7) породжує імпульсну многозначну динамічну систему, для якої в фазовому просторі H існує нетривіальний глобальний атрактор і встановлено його явну формулу.

3. Основні результати. За побудовою

$$M \cap M' = \varnothing,$$

$$\forall z_0 = \left(\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array} \right) \in M \text{ для } z(t) = \left(\begin{array}{c} u(t) \\ v(t) \end{array} \right) = V(t, z_0) \text{ в силу (4)}$$

$$\forall t \ge 0 \ \ \alpha(u(t),\psi) + \beta(v(t),\psi) = e^{-\alpha\lambda t}(1 - 2b\lambda t\beta(u_0,\psi)).$$

Отже, $\exists \tau = \tau(z_0) > 0,\ \forall t \in (0,\tau) \ \ V(t,z_0) \notin M$.
Введемо позначення:

$$\forall z \in H \ M^+(z) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,z) \right) \cap M.$$

Тоді, якщо $M^+(x) \ne \varnothing$, то існує момент часу $s = \phi(z)$ такий, що

$$\forall\ t \in (0,s)\ V(t,z) \notin M \text{ та } V(s,z) \in M.$$

Таким чином, побудуємо імпульсну траєкторію $\varphi : R_+ \to H$, яка стартує з точки $z \in H$.

Якщо $M^+(z) = \varnothing$, тоді $\varphi(t) = V(t,z)\ \forall t \ge 0$.

Якщо $M^+(z) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(z)$, $z_1 = V(s_0, z)$ та $z_1^+ \in Iz_1$ визначимо φ на $[0, s_0]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t,z), \ t \in [0, s_0), \\ z_1^+, \quad\ \ t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(z_1^+) = \varnothing$, тоді $\varphi(t) = V(t - s_0, z_1^+)$ $\forall t \geq s_0$.

Якщо $M^+(z_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(z_1^+)$, $z_2 = V(s_1, z_1^+)$ та $z_2^+ \in Iz_2$ визначимо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - s_0, z_1^+), \ t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ z_2^+, \quad\ \ t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{z_n^+\}_{n \geq 1}$ та відповідних моментів часу $\{s_n\}_{n \geq 0}$. Покладемо $t_0 = 0$, $\ t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k$, $\ n \geq 0$.

Якщо $\tilde{\varphi}$ має нескінченну кількість імпульсних збурень, тоді траєкторія описується наступним чином:

$$\forall n \geq 0, \ \ \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \ \ \varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, z_n^+), \ t \in [t_n, t_{n+1}), \\ z_{n+1}^+, \quad\ \ t = t_{n+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Позначимо через K_z множину всіх імпульсних траєкторій, що починають рух з точки z та доведемо, що вони визначені на $[0, +\infty)$.

Для цього, в силу (3), дане твердження достатньо довести для $z_0 \in M'$. Для $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = V(t, z_0)$ розглянемо функцію

$$g(t) = \alpha(u(t), \psi) + \beta(v(t), \psi) = e^{-a\lambda t}(1 + \mu - 2\beta b \lambda t (u_0, \psi)).$$

В силу (4) $\forall t \geq 0$ $|(u(t), \psi)| \leq \gamma$. Крім того, $g(0) = 1 + \mu$, $\ \lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$.

Отже, $\exists s_0 > 0$ — момент першого потрапляння фазової точки на множину M, тобто

$$\forall s_0 > 0 : |(u(s_0), \psi)| \leq \gamma, \ g(s_0) = 1.$$

Зі наступних співвідношень

$$\begin{cases} e^{a\lambda s_0} = 1 + \mu - 2\beta b \lambda s_0 (u_0, \psi), \\ |(u_0, \psi)| \leq \gamma, \end{cases}$$

одержуємо, що

$$s_0 \geq \overline{s}, \tag{9}$$

де $\overline{s} > 0$ є коренем рівняння $e^{a\lambda s} = 1 + \mu - 2\beta |b| \lambda \gamma s$. Зокрема, $\overline{s}$ не залежить від z_0.

Отже, кожна імпульсна траєкторія, що стартує з множини M', має нескінчену кількість імпульсних точок і $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$. Отже, φ визначена на $[0, +\infty)$.

Таким чином, коректно визначена імпульсна многозначна динамічна система $G : R_+ \times H \to 2^H$:

$$\forall t \geq 0, \ \ \forall z \in H \ \ G(t, z) = \{\varphi(t) | \ \varphi \in K_z\}. \tag{10}$$

Означення 1 ([14]). *Підмножина $A \subset X$ називається глобальним атрактором многозначної динамічної системи G, якщо*

1) A — *компактна множина,*

2) A — *рівномірно притягуюча, тобто для будь-якої обмеженої $B \subset H$*

$$dist(G(t,B),A) \to 0,\ t \to \infty;$$

3) A — *мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 2).*

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай імпульсне відображення I має такий вигляд:*

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M$$

$$Iz = \left\{ \begin{pmatrix} c_1' \\ d_1' \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid |c_1'| \leq \gamma,\ \ \alpha c_1' + \beta d_1' = 1 + \mu \right\}. \tag{11}$$

Тоді многозначна динамічна система G, задана формулою (10)*, має в фазовому просторі H глобальний атрактор A, причому*

$$A = \bigcup_{t \in [0,\overline{\tau}],\ |c_1| \leq \gamma} \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 - 2b\lambda c_1 t \end{pmatrix} e^{-a\lambda t} \psi_1 \ \middle| \ \begin{array}{l} \alpha c_1 + \beta d_1 = 1 + \mu \\ (1 + \mu - 2b\beta\lambda c_1 \overline{\tau}) e^{-a\lambda\overline{\tau}} = 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{12}$$

Доведення. Згідно [4], [5] для існування глобального атрактору необхідно перевірити наступні умови:

1) дисипативність:

$$\exists R_0 > 0, forall R > 0\ \ \exists T = T(R),\ \ \forall t \geq T,\ \ \forall z_0 \in H,\ \|z_0\|_H \leq R,$$

$$\forall \varphi \in K_{z_0},\ \ \|\varphi(t)\|_H \leq R_0, \tag{13}$$

2) асимптотичну компактність:

$$\forall t_n \to \infty \text{ будь-яка обмежена } \{z_n^0\} \subset H\ \ \forall \xi_n \in G(t_n, z_n^0) \tag{14}$$

$$\text{послідовність } \{\xi_n\} \text{ передкомпактна в } H.$$

Доведемо (13). Нехай $\|z_0\|_H \leq R$, де $R > 0$ достатньо велике. Якщо траєкторія $\varphi \in K_{z_0}$ не зазнає імпульсних збурень, то в силу (3)

$$\forall t \geq \frac{1}{\delta} \ln R \|\varphi(t)\|_H \leq 1. \tag{15}$$

Інакше для моменту $s_0 > 0$ маємо рівняння

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2\beta b\lambda s_0(u_0,\psi)) = 1.$$

Таким чином, отримуємо $s_0 \leq s(R)$, де $s(R) > 0$ — корінь наступного рівняння

$$e^{a\lambda s} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}R + 2\beta|b|\lambda s R.$$

Після цього фазова точка опиняється в положенні $z_1^+ \in I(V(s_0, z_0))$. З (11) виводимо оцінку:

$$\forall z \in H, \ \ \forall z^+ \in I(z) \ \ \|z^+\|_H^2 \leq \zeta^2 + \|z\|_H^2, \tag{16}$$

де $\zeta^2 := \gamma^2 + (\frac{1+\mu+\alpha\gamma}{\beta})^2$.
Зокрема

$$\|z_1^+\|_H^2 \leq \zeta^2 + \|V(s_0, z_0)\|_H^2 \leq \zeta^2 + R^2.$$

Таким чином, властивість дисипативності достатньо довести для

$$z_0 \in M', \ \|z_0\|_H \leq R.$$

Нехай $\varphi \in K_{z_0}$ має стрибки в моменти $\{s_0, s_0+s_1, ...\}$ з імпульсними точками $\{z_i^+\}_{i=1}^{\infty}$. З (9) отримуємо $\forall i \geq 0 \ \ s_i \geq \overline{s}$.
Тоді з (3), (16) одержуємо:

$$\|\varphi(s_0)\|_H^2 \leq e^{-2\delta\overline{s}}R^2 + \zeta^2,$$

$$\|\varphi(s_0+s_1)\|_H^2 \leq e^{-4\delta\overline{s}}R^2 + e^{-2\delta\overline{s}}\zeta^2 + \zeta^2.$$

Після $k \geq 1$ одержуємо

$$\left\|\varphi\left(\sum_{i=0}^{k} s_i\right)\right\|_H^2 \leq e^{-2\delta(k+1)\overline{s}}R^2 + \frac{\zeta^2}{1-e^{-2\delta\overline{s}}}. \tag{17}$$

Таким чином з (3), (17) одержуємо шукану дисипативність.

Доведемо асимптотичну компактність (14).

Нехай $z_n^0 = \sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix} c_i^{(n)} \\ d_i^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \psi_i$, $\|z_n^0\|_H \leq R$ — довільна обмежена послідовність початкових даних і $t_n \nearrow +\infty$.
Якщо для нескінченно багатьох $n \geq 1$ $M^+(z_n^0) = \varnothing$, то в силу (3)

$$G(t_n, z_n^0) = V(t_n, z_n^0) \to 0, n \to \infty.$$

Інакше, для моментів імпульсів $\{s_i^{(n)}\}_{i=0}^{\infty}$ та імпульсних точок $\{z_i^{(n)+}\}_{i=1}^{\infty}$ маємо:

$$\forall i \geq 0 \ \ t_{i+1}^{(n)} := \sum_{k=0}^{i} s_k^{(n)} \geq (i+1)\overline{s}, \tag{18}$$

$$z_i^{(n)+} = \begin{pmatrix} \bar{c_1}^{(n)} \\ \bar{d_1}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \psi_1 + \sum_{j=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_j^{(n)} \\ d_j^{(n)} - 2bc_j^{(n)}\lambda_j t_{j+1}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot e^{-a\lambda_j t_{j+1}^{(n)}}, \tag{19}$$

де $|\bar{c_1}^{(n)}| \leq \gamma, \ \alpha\bar{c_1}^{(n)} + \beta\bar{d_1}^{(n)} = 1+\mu$.

Так як $\forall n \geq 1 \ \ \exists k(n) \geq n$ таке, що $t^{(n)}_{k(n)-1} \leq t_n < t^{(n)}_{k(n)}$, то для $\xi_n = G(t_n, z^0_n)$ маємо:

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n), \tag{20}$$

де $\eta_n = z^{(n)+}_{k(n)}$, $\tau_n = t_n - t^n_{k(n)-1} \in [0, \bar{s}]$.
Отже, з (19) по підпослідовності

$$\eta_n \to \eta = \begin{pmatrix} \bar{c_1} \\ \bar{d_1} \end{pmatrix} \psi_1, \ n \to \infty, \tag{21}$$

де $|\bar{c_1}| \leq \gamma, \ \alpha\bar{c_1} + \beta\bar{d_1} = 1 + \mu$.

Оскільки по підпослідовності $\tau_n \to \tau$, то з (20) та властивостей напівгрупи V виводимо предкомпактність $\{\xi_n\}$, що і доводить існування глобального атрактора A.

Оскільки за побудовою [4] A складається з часткових границь всіх послідовностей виду $\xi_n \in G(t_n, B_{R_0})$, де $t_n \nearrow \infty$, $B_{R_0} = \Big\{ z \mid \|z\|_H \leq R_0 \Big\}$, то або $\xi_n \to 0$, або з (20) та (21)

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \to \xi = V(\tau, \eta),$$

де $\tau \in [0, \bar{\tau}], \bar{\tau} > 0$ однозначно визначається з рівності

$$e^{-a\lambda\bar{\tau}}(1 + \mu - 2\beta b\bar{c_1}\bar{\tau}) = 1,$$

де $|\bar{c_1}| \leq \gamma, \ \alpha\bar{c_1} + \beta\bar{d_1} = 1 + \mu$. Звідси виводимо (12).

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Аналогічно міркуванням роботи* [15] *можна показати виконання наступної властивості:*

$$\forall t \geq 0 \ \ G(t, A \setminus M) = A \setminus M.$$

Список використаної літератури

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. // — К.: Вища школа. 1987. – 287 с.
3. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Глобальний атрактор еволюційного включення з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу // УМЖ. —- 2003. — Т.55, № 8. — С. 1283 – 1294.
4. *Iovane G., Kapustyan O.V., Valero J.* Asymptotic behavior of reaction-diffusion equations with non-damped impulsive effects // Nonlinear Analysis. — 2008. – Vol. 68. – P. 2516 – 2530.
5. *Perestyuk M.O., Kapustyan O.V.* Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. — 2012. – Vol. 56. – P. 89 – 113.
6. *Kaul S.K.* On impulsive semidynamical system // J. Math. Anal. Appl. — 1990. – Vol. 150. – №1. – P. 120 – 128.
7. *Bonotto E.M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. — 2007. – Vol.332. – P. 81 – 96.
8. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2004. – Vol.52. – P. 81 – 91.

9. *Kaul S.K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems// J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 1994. – Vol. 7. – №4. – P. 509 – 523.
10. *Перестюк Ю.М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі. // Нелінійні коливання. -— 2012. — Т. 15, № 4. — С. 494 – 503.
11. *Bonotto E.M., Bortolan M.C., Carvalho A.N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach, // J. Diff. Eqn. — 2015. – vol. 259. – P. 2602 – 2625
12. *Bonotto E.M., Demuner D.P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. — 2013. – Vol. 137. – P. 617 – 642
13. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем // Доповіді НАН України. —- 2015. — № 12. — С. 13 – 17.
14. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем // УМЖ. -— 2016. — Т.68, № 4. — С. 517 – 528.
15. *Романюк I.* Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи // Вісник Київ. нац. унів. імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка. — 2016. – Vol. 35. – С. 14 – 19.

Одержано 28.03.2017