УДК 517.9

С. М. Чуйко, Д. В. Сисоєв (Донбаський держ. пед. ун-т)

ЛІНІЙНА МАТРИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of linear boundary value problem for a parametric excitation system of differential-algebraic equations. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the linear boundary value problem for a parametric excitation system of differential-algebraic equations in the critical case have been found.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійної крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків лінійної крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

1. Вступ. Традиційне вивчення періодичних і нетерових крайових задач у критичних випадках було пов'язано з припущенням, що диференціальне рівняння, а також крайова умова, відомі та фіксовані [1, 2]; крім того, вивчення періодичних задач у випадку параметричного резонансу було пов'язано з дослідженням насамперед питань стійкості [3–5]. У той же час дослідження періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу, пов'язаними з численними застосуваннями в електроніці [3], теорії плазми [6], нелінійній оптиці, механіці [7], теорії стійкості руху [3], біології, радіотехніці та верстатобудуванні [8] передбачає, як побудову розв'язків періодичних крайових задач, так і обчислення власної функції відповідного диференціального рівняння. Таким чином, основною відмінністю даної статті є знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від власної функції крайової задачі. Істотною відмінністю даної статті є також матричний запис невідомої, який узагальнює вигляд, як матричного диференціального рівняння, так і крайової умови. У статті знайдені умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для матричного диференціального рівняння.

Використовувана класифікація нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від простоти або кратності рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від аналогічної класифікація періодичних задач у випадку параметричного резонансу [4, 5] і відповідає загальній класифікації періодичних і нетерових крайових задач [1]. Крім того, отримане для нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від традиційного рівняння для породжуючих констант за відсутності параметричного резонансу залежністю від малого параметра, як самого рівняння, так і його коренів.

2. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків $Z(t, \varepsilon)$:

$$Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a; b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0; \varepsilon_0] := \mathbb{C}[0; \varepsilon_0] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) + \mathcal{F}(t,\varepsilon) + \varepsilon\,\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0;\varepsilon_0], \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}(\varepsilon), \quad \mathfrak{A}(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}[0;\varepsilon_0]. \tag{2}$$

Розв'язок матричної крайової задачі (1), (2) шукаємо у малому околі розв'язку породжуючої диференціально-алгебраїчної задачі

$$\mathcal{A}Z_0'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}Z_0(t,\varepsilon) + \mathcal{F}(t,\varepsilon), \quad \mathcal{L}Z_0(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут [15, 16]

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t,\varepsilon)R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t,\varepsilon)\Psi_j(t)$$

— лінійні матричні оператори,

$$S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\alpha}[a,b], \quad R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{C}_{\beta\times\delta}[a,b],$$

$$\mathcal{F}(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b], \quad \mathcal{F}(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[0;\varepsilon_0]$$

— неперервні матриці; крім того $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матричний оператор $\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ припускаємо лінійним за першим аргументом $Z(t,\varepsilon)$ у малому околі розв'язку $Z_0(t,\varepsilon)$ породжуючої задачі (3), а також неперервно диференційовним за другим аргументом $h(\varepsilon)$, і, крім того, неперервним за $t \in [a,b]$ та $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$. Крім того, $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) : \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma},$$

неперервний за $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$. Поставлена задача продовжує дослідження крайових задач у випадку параметричного резонансу [9–11] на випадок лінійних матричних крайових задач [20–22], а також матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач [12–16].

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A] : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор [16, 17]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big] : \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Задача про знаходження розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (3) приводить до задачі про знаходження вектора

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0;\varepsilon_0],$$

компоненти якого $z_j(t,\varepsilon)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t,\varepsilon), \quad z_j(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon)$, за визначенням, зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t) z_j'(t,\varepsilon),$$

при цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon)\Big] = \Omega(t)\cdot z'(t,\varepsilon), \quad \Omega(t) := \Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t,\varepsilon)\Big] = \Theta(t)\cdot z(t,\varepsilon),\ \ \Theta(t) := \Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},\ \ \Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right].$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного рівняння (3) приведено до задачі про побудову розв'язків $z_0(t,\varepsilon) := \mathcal{M}[Z_0(t,\varepsilon)]$ традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [13, 23–25]

$$\Omega(t)\cdot z_0'(t,\varepsilon) = \Theta(t)\cdot z_0(t,\varepsilon) + \mathcal{M}\mathcal{F}(t,\varepsilon). \tag{4}$$

Умови розв'язності та структура розв'язків матричного диференціального рівняння [12, 20]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \tag{5}$$

наведені у монографії [20]. Конструктивні умови розв'язності та структура періодичного розв'язку системи (5) за умови $\alpha = \beta = \lambda = \mu$ отримані у статті [22] з використанням узагальненого обернення матриць та операторів, наведених у статті [18]. Дослідження матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у даній статті грунтується на дослідженні алгебраїчних матричних рівнянь, зокрема, результати, отримані для матричного диференціального рівняння Ляпунова [18] та результати дослідження матричних рівнянь, у тому числі, рівнянь типу Сильвестра [17, 19]. За умови [14, 15]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{M}\mathcal{F}(t,\varepsilon) = 0, \tag{6}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\Theta(t), \quad \Omega^+(t)\mathcal{F}(t), \quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b] \tag{7}$$

система (4) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz_0}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z_0 + \mathfrak{F}(t,\varphi(t));$$

тут

$$\mathfrak{F}(t,\varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t,\varepsilon) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t);$$

$P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta)$– матриця-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t) : \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t))$, $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$– матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$– матриці-ортопроектора

$$P_\Omega(t) : \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t)).$$

Позначимо $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю [1]

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умови (6), (7) система (4) має розв'язок вигляду

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X(t)c_0(\varepsilon) + K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0,\varepsilon_0],$$

$$K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)\mathfrak{F}(s,\varphi(s))ds,$$

який визначає розв'язок диференціально-алгебраїчного рівняння (3)

$$Z_0(t,\varepsilon) = W(t, c_0(\varepsilon)) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon). \tag{8}$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову [15, 16] розв'язності задачі Коші для системи (3).

Лема 1. *За умов (6) та (7) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}[0,\varepsilon_0]$. За умов (6) та (7) загальний розв'язок (9) матричної задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) визначає узагальнений оператор Гріна*

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t)\Big\}$$

задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) та загальний розв'язок

$$W(t, c_0(\varepsilon)) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c_0(\varepsilon)\Big], \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0,\varepsilon_0]$$

задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини рівняння (3).

Зазначимо, що за умов (6), (7), та у випадку $\varrho := \operatorname{rank} P_\Omega(t) := 0$ матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon)$. Якщо ж $\varrho \neq 0$, то за умов (6), (7) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ та довільної фіксованої функції

$$\varphi(t) : \quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b].$$

Припустимо, що для породжуючої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) має місце критичний випадок: ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), при цьому умову

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}(\varepsilon) - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{9}$$

виконано. Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$ матриці $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. Позначимо $\alpha(\varepsilon) := \mathcal{M}\{\mathfrak{A}(\varepsilon)\}$ За умови (7) і тільки за неї отримуємо загальний розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^+\Big\{\alpha(\varepsilon) - \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}+$$

$$+\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon); \quad \Theta_0(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r(\varepsilon)\Big];$$

тут $P_{\mathcal{Q}_r}$ — матриця утворена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$ матриці $\mathcal{Q}$. Наступна лема визначає достатню умову [15, 16] розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3).

Лема 2. *За умов (6) та (7) матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (3) розв'язна за умови (9) і тільки за неї. За умов (6), (7) та (9) загальний розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)*

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^+\Big\{\alpha(\varepsilon) - \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}+$$

$$+\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon)$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) та загальний розв'язок

$$W(t,\Theta_0(\varepsilon)) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r(\varepsilon)\Big], \quad c_r(\varepsilon) \in \mathbb{C}_r[0,\varepsilon_0]$$

однорідної частини матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3).

Припустимо далі, що задача (1), (2) у малому околі розв'язку

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon)$$

породжуючої задачі (3) має розв'язок

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0],$$

для якого у достатньо малому околі початкового значення власної функції $h_0(\varepsilon)$ існує неперервна власна функція

$$h(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0].$$

Таким чином, приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$X(t,\varepsilon): \quad X(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad X(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

та власної функції $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0]$ матричної крайової задачі

$$\mathcal{A}X'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}X(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\,\Pi(Z_0(t,c_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}X(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного рівняння (10) приводимо до задачі про побудову розв'язків

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0;\varepsilon_0]$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [13, 23–25]

$$\Omega(t)\cdot z_0'(t,\varepsilon) = \Theta(t)\cdot z_0(t,\varepsilon) + \mathcal{M}\mathcal{F}(t,\varepsilon)+ \tag{11}$$

$$+\varepsilon\,\mathcal{M}\Pi(Z_0(t,c_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon).$$

За умови (6), (7), у випадку

$$P_{\Omega^*}\mathcal{M}\Pi(Z_0(t,c_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

система (11) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t,\varphi(t)) + \varepsilon\,\Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(t,c_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

при цьому вихідна матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) розв'язна за умови

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(s,c_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{13}$$

Позначимо вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{r+\rho}[0,\varepsilon_0].$$

У наслідок неперервності по $Z(t,\varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ нелінійної функції $\Pi(Z,h,t,\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3) та початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$, за умови (6), (7), (12) для розв'язку $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та для початкового значення $h_0(\varepsilon)$ власної функції крайової задачі (1), (2) має виконуватись рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) := P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(s,c_r(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Необхідну умову існування розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема, яка є узагальненням відповідного твердження [11] на випадок матричної крайової задачі, узагальненням відповідного твердження [1, 2] на випадок параметричного резонансу та явної залежності неоднорідностей породжуючої крайової задачі (3) від малого параметра, а також узагальненням відповідного твердження для матричної крайової задачі [30].

Лема 3. *Припустимо, що для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок та виконуються умови розв'язності (6), (7) та (9) породжуючої задачі (3). Припустимо також, що у малому околі породжуючого розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ та початкового значення $h_0(\varepsilon)$ власної функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має розв'язок*

$$Z(t,\varepsilon): \quad Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0],$$

при цьому у досить малому околі функції $h_0(\varepsilon)$ існує функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$; у цьому випадку має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0. \tag{15}$$

Аналогічно до нетерових слабконелінійних крайових задач у критичному випадку [1], а також періодичними крайовими задачами [2,4,5], рівняння (15) будемо називати рівнянням для породжуючих функцій матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу. Корені рівняння для породжуючих функцій (15), у даному випадку — матриці $\Theta_0(\varepsilon)$, а також власні функції $h_0(\varepsilon)$ визначають породжуючий розв'язок $Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon))$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки вихідної матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу. Якщо ж рівняння (15) не має розв'язків

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0], \quad h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0],$$

то вихідна матрична крайова задача (1), (2) у випадку параметричного резонансу не має шуканих розв'язків.

3. Достатня умова існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Припустимо, що рівняння для породжуючих функцій (15) має неперервні дійсні розв'язки. Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+\rho}$ рівняння (15), отримуємо задачу про існування розв'язку

$$X(t,\varepsilon): \quad X(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad X(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

матричної крайової задачі (1), (2) в околі породжуючого розв'язку

$$Z_0(t,\Theta_r(\varepsilon)) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + G\Big[F(s);\mathcal{A}\Big](t), \quad \Theta_r(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r(\varepsilon)\Big],$$

а також функції $h(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0]$ в околі точки $h_0(\varepsilon)$. У зазначеному околі має місце розвинення

$$\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon), t, \varepsilon\Big] = \Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon\Big] +$$

$$+D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big]+D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),\zeta(\varepsilon)\Big]+$$

$$+R\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big].$$

Дійсно, у малому околі розв'язку $\check{c}_0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{r+\rho}$ рівняння для породжуючих функцій (15) має місце розвинення вектор-функції [31, с. 636]

$$\mathcal{M}\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]=$$

$$=\mathcal{M}\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]+\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]x(t,\varepsilon)+$$

$$+\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)+\mathcal{R}\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big].$$

Тут

$$\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]:=\frac{\partial}{\partial x}\Pi\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta)$ – матриця,

$$\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]:=\frac{\partial}{\partial \zeta}\Pi\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\gamma\cdot\delta\times\rho)$ – матриця, $\mathcal{R}[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]\in\mathbb{R}^{\gamma\delta}$ — залишок цього розвинення та

$$x(t,\varepsilon):=\mathcal{M}X(t,\varepsilon):\quad x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\beta}[a,b],\quad x(t,\cdot)\in\mathbb{C}_{\alpha\beta}[0,\varepsilon_0]$$

— невідома вектор-функція. Таким чином

$$D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]x(t,\varepsilon)\Big\}$$

та

$$D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),\zeta(\varepsilon)\Big]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)\Big\}$$

— диференціали матричної функції

$$\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

та

$$R[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{R}[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]\Big\}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— залишок цього розвинення. Враховуючи рівняння для породжуючих функцій (15), зазначимо, що задача про знаходження розв'язку

$$X(t,\varepsilon)=W(t,\Theta_r(\varepsilon))+X^{(1)}(t,\varepsilon)$$

та власної функції $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ матричної крайової задачі (10) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X(t,\varepsilon)\Big] + D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)\Big]+$$

$$+R\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot) = 0.$$

Тут $W(t, \Theta_r(\varepsilon))$ — загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (10) та

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon), s, \varepsilon;\ 0\ \Big](t)$$

— частковий розв'язок неоднорідної матричної крайової задачі (10). Позначимо $\xi_j(\varepsilon)$ скалярні функції, які визначають розвинення матриці

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon), \quad \xi_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$$

за векторами $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, та вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \xi(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta+\rho}[0,\varepsilon_0], \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad \zeta(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\rho} \theta^{(j)}\zeta_j(\varepsilon);$$

тут $\theta^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho,\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \rho$ — природний базис [32] простропу $\mathbb{R}^\rho$ та $\zeta_j(\varepsilon)$ — константи, які визначають розвинення векторної функції

$$\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0]$$

за векторами $\theta^{(j)}$ базиса простору $\mathbb{R}^\rho$. Таким чином, матрична крайова задача (10) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), W(t,\Theta_r(\varepsilon))\Big]+$$

$$+D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) =$$

$$= -\ P_{Q^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] + R\Big[Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot).$$

Знайдена необхідна та достатня умова розв'язності матричної крайової задачі (10) являє собою лінійне алгебраїчне рівняння відносно матриці $\Theta_r(\varepsilon)$, а також векторної функції $\zeta(\varepsilon)$. Позначимо матрицю

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(\check{c}_0(\varepsilon)) := \Big\{\ \mathcal{D}_0^{(0)}\ ;\ \mathcal{D}_0^{(1)}\ \Big\} \in \mathbb{C}_{d\times(\alpha\cdot\beta+\rho)}[0,\varepsilon_0];$$

тут

$$\mathcal{D}_0^{(0)} := \Big\{\ P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), W\Big(t, \Xi^{(i)}\Big)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}\ \Bigg|\begin{matrix}\alpha\cdot\beta \\ \\ i=0\end{matrix}\ ,$$

$$\mathcal{D}_0^{(1)} := \left\{ \; P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),\theta^{(j)}\Big]\Big\}(\cdot) \; \right\} \Bigg|_{j=0}^{\rho} .$$

крім того

$$\mathcal{D}_0^{(0)} \in \mathbb{C}_{d\times\alpha\cdot\beta}[0,\varepsilon_0], \quad \mathcal{D}_0^{(1)} \in \mathbb{C}_{d\times\rho}[0,\varepsilon_0].$$

Для знаходження вектора $\check{c}(\varepsilon)$ отримуємо рівняння

$$\mathcal{D}_0\,\check{c}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]+$$

$$+R\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Big\}(\cdot).$$

За умови [11]

$$P_{\mathcal{D}_0^*}P_{Q_d^*} = 0, \quad \mathcal{D}_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}_{(\alpha\cdot\beta+\rho)\times d}[0,\varepsilon_0] \tag{16}$$

матрична крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок. Тут $P_{\mathcal{D}_0^*}$ — $(d\times d)-$ матриця-ортопроектор [1, 32]:

$$P_{\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))}:\; \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}\Big(\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))\Big).$$

Таким чином, за умови (9) принаймні один розв'язок матричної крайової задачі (1), (2) визначає наступна операторна система

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{D}_0^+\,P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]+ \tag{17}$$

$$+R\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Big\}(\cdot), \quad \Theta_r(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}(\varepsilon)\Big], \quad \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}(\varepsilon),$$

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Pi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon;\; 0\;\Big](t);$$

тут

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times(\rho+\alpha\beta)}, \quad \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I_\rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho\times(\rho+\alpha\beta)}$$

— сталі матриці. Для знаходження наближеного розв'язку операторної системи (17) можна застосувати метод послідовних наближень [1, 2, 31]. Таким чином, доведено наступне твердження, яке узагальнює відповідні твердження для нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь на випадок параметричного резонансу [4, 11], а також матричних задач у випадку параметричного резонансу [30] на випадок диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Теорема 1. *Припустимо, що для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок та виконуються умови розв'язності (6), (7) та (9) породжуючої задачі (3). У цьому разі для кожного розв'язку $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_r[0, \varepsilon_0]$, $h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$ рівняння для породжуючих функцій (15) за умови (16) у малому околі розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та у достатньо малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ задача (10) має принаймні один розв'язок*

$$X(t,\varepsilon): \quad X(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad X(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

та існує неперервна функція $h(\varepsilon) : h(0) := h_0^*$. При цьому у малому околі розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та в досить малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок

$$Z(t,\varepsilon): \; Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0],$$

який визначає операторна система (17); для знаходження цього розв'язку застосовна ітераційна схема

$$\begin{gathered} Z_{k+1}(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t,\varepsilon), \; X_{k+1}(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon), \\ \check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathcal{D}_0^+ P_{Q_d^*} \mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{ D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X_k^{(1)}(t,\varepsilon) \Big] + \\ +R\Big[Z_k(t,\varepsilon), h_k(\varepsilon), t, \varepsilon \Big] \Big\}(\cdot), \quad \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon) \Big], \qquad (18) \\ X^{(1)}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Pi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon); \; 0 \Big](t), \\ \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 0, \; 1, \; 2 \; \ldots \; . \end{gathered}$$

Проміжок значень малого параметру $[0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon_0 \geq \varepsilon^*$, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми (18), може бути знайдений як безпосередньо з означення оператора стиснення [28, 29], так і за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 2]. Крім того, для побудови розв'язків операторної системи (17) можна застосувати метод малого параметру Пуанкаре. У випадку параметричного резонансу теорема 1 узагальнює відповідні твердження [9–11] на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі та векторної функції $h(\varepsilon)$. У випадку відсутності параметричного резонансу теорема 1 узагальнює відповідні твердження [1,2] на випадок явної залежності неоднорідностей $\mathcal{F}(t, \varepsilon)$ та $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ породжуючої крайової задачі (2) від малого параметру.

Приклад 1. *Умови теореми 1 виконуються у випадку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Матьє*

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) + \mathcal{F}(t,\varepsilon) + \varepsilon\,\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = 0, \qquad (19)$$

де

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{2} S_i(t) Z'(t,\varepsilon) R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) := \sum_{j=1}^{2} \Phi_j(t) Z(t,\varepsilon) \Psi_j(t),$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) := h_1(\varepsilon)\Lambda_1 Z(t,\varepsilon)\Lambda_2 + h_2(\varepsilon)\Lambda_3 Z(t,\varepsilon)\Lambda_4 + \Lambda_5(t)Z(t,\varepsilon)\Lambda_6(t),$$

$$\Lambda_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_6(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin t & 2\sin 2t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) := \check{\Lambda}(Z(0,\varepsilon) - Z(2\pi,\varepsilon)), \quad \check{\Lambda} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(\varepsilon) := \begin{pmatrix} h_1(\varepsilon) \\ h_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2[0,\varepsilon_0].$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$ утворюють матриці

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключові при дослідженні рівняння (19) матриці мають вигляд

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

та

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*,$$

причому умови (6) та (7) виконуються, при цьому матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (19) являє критичний випадок: $P_{\mathcal{Q}^*} = I_2 \neq 0$. Рівняння (15) у випадку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Матьє (19) має дійсний розв'язок

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \left[\begin{array}{c} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^8, \quad h_0(\varepsilon) := \left[\begin{array}{c} h_1(\varepsilon) \\ h_2(\varepsilon) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^2$$

де

$$c_0(\varepsilon) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)^*, \quad h_1(\varepsilon) = 1, \quad h_2(\varepsilon) = 0.$$

Цьому розв'язку відповідає матриця повного рангу

$$D_0\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) = -2\pi \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

для якої умову (16) виконано, отже, згідно до теореми 1, у малому околі породжуючого розв'язку

$$Z_0(t, c_0(\varepsilon)) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 + \sin t & 2 - \cos t \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

та у досить малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння типу Матьє (19) має принаймні один розв'язок

$$Z(t, \varepsilon): \ Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{3\times 2}[0, 2\pi], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{3\times 2}[0, \varepsilon_0].$$

Зазначимо, що матриця $\mathcal{D}_0$, ключова при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач (1), (2) у випадку параметричного резонансу, як і у випадку нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, може бути знайдена безпосередньо з рівняння для породжуючих функцій (15):

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathcal{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{ \mathcal{L} K \Big[\Pi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon) \Big](\cdot) \Big\} = \mathcal{D}_0(\varepsilon).$$

Запропоновану схему дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач (1), (2) у випадку параметричного резонансу, як і у випадку нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно [1, 15] може бути перенесено на матричні крайові задачі з імпульсним впливом [33]. Зазначимо також, що для знаходження наближеного розв'язку операторної системи (17) можна застосувати чисельно-аналітичний метод [34].

Список використаної літератури

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5 — 29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
6. *Силин В.П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973. — 287 с.
7. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
8. *Копелев Ю.Ф.* Параметрические колебания станков. — Металлорежущие станки: респ межвед. науч. – техн. сб. — Киев, 1984. Вып. 12. — С. 3 — 8.
9. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243 — 252.
10. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Кулиш П.В.* Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. — **3(32)**. —№1. — 2013.
11. *Чуйко С.М.* Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014. — **17**, № 1. — С. 137 — 148.
12. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — **4 (32)**, № 1-2. — С. 101 — 107.
13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — №6. — P. 777 — 788.
14. *Чуйко С.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. — 2013. — **5**, №5. — С. 769 — 783.
15. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. –**56**, № 4. – P. 752 – 760.
16. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9 – 21.
17. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика. — 2014, **19**, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.
18. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 — 1169.
19. *Чуйко С.М.* О решении линейных матричных уравнений // Научный вестник Харьковского университета им. В.Н. Каразина. Сер. матем., прикладная матем., механика. — **81**. — 2015. — С. 28 — 34.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с.
21. Chuiko S.M., Chuiko A.S., Sysoev D.V. Weakly Nonlinear Matrix Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance // Journ. of Math. Sciences. — April – June 2016. — **19**, № 2 — P. 276 — 288.
22. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464 – 471.
23. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.
24. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск; Наука, 1996. — 280 с.
25. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — К.: Вища школа, 2000. — 296 с.
26. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. — 2016. — **60**, № 8. — P. 64 — 73.
27. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
28. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания.– 2005.— **8**, № 2.– С. 278 — 288.

29. Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — **9**. — № 3, 2006. — P. 405 – 422.
30. *Чуйко С.М., Сысоев Д.В.* Линейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Кібернетика. – 2016. **1 (16)**. — С. 54 – 58.
31. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
32. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
33. *Perestyuk N.A., Vlasenko L.A.* On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations // Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal Volume. — 2005. — **57**, № 4. — P. 458 — 468.
34. *Korol I.I., Ronto M.I.* Investigation and solution of boundary-value problems with parameters by numerical-analytic method // Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal. — 1994. — **46**, № 8. — P. 1031 — 1042.

Одержано 30.03.2017