

УДК 519.21

М. С. Герич (Ужгородський нац. ун-т)
Д. В. Гусак (доктор фіз.-мат. наук, професор)

ПРО СТРИБКИ ЧЕРЕЗ НЕСКІНЧЕНО ВІДДАЛЕНИЙ РІВЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ

Unexplored in [3]- [4] questions on overshoot functionals through the level $x \rightarrow \infty$ for oscillating lattice random walks and processes are investigated for lower semi continuous integervalued Poisson process $\xi(t)$ with $E\xi(1) = 0$.

Невивчені в [3]- [4] питання про функціонали перетину рівня $x \rightarrow \infty$ для осцилюючих гратчастих випадкових блукань та процесів досліджуються в даній статті для майже напівнеперервних знизу цілозначних пуассонівських процесів $\xi(t)$ з $E\xi(1) = 0$.

Розподіл стрибкових функціоналів дійснозначних процесів Леві вивчався багатьма авторами зокрема в монографіях [1]- [4] та в статті [5], де наводиться список робіт з дослідження різних граничних функціоналів. В цих роботах інколи замість стрибкових функціоналів розглядаються значення процесів до виходу і після виходу за рівень. В [3] основна увага приділялася розподілу перестрибкових функціоналів через фіксований рівень, коли середнє значення процесу від'ємне, оскільки в цьому випадку вказані розподіли мають теоретико-ризикову інтерпритацію для майже напівнеперервних знизу дійснозначних процесів (див. [3], [4]). Тому в [3] в р.7 для цілозначних процесів не розглядалися розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x \rightarrow \infty$ коли $m = E\xi(1) = 0$. В [4] зовсім не включено розділ цілозначних процесів.

Щоб усунути цю прогалину, ми детальніше розглянемо розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x \rightarrow \infty$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) з $m = 0$.

Нехай $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) — майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуасона з кумулянтою

$$k(z) = \ln Ez^{\xi(1)} = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1-z}{z-b} \quad (0 < b < 1, \lambda_1, \lambda_2 > 0), \quad |m| < \infty. \quad (1)$$

Якщо $b = 0$, тоді $\xi(t)$ — напівнеперервний знизу процес. Введемо позначення граничних функціоналів процесу

$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ — момент 1-го досягнення рівня $x \geq 0$,

$\gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ — перший перестрибок через x ,

$\gamma_2(x) = \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0)$ — перший недострибок $\xi(t)$,

$\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$ — перший стрибок, що накриває рівень x ,

$\xi^\pm(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} (\inf) \xi(u)$, $\xi^\pm = \sup_{0 \leq t < \infty} (\inf) \xi(t)$ — екстремуми процесу $\xi(t)$.

Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом: $P\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t \geq 0$ і відповідно генератриси цих функціоналів

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} (|z| = 1), \quad g_\pm(s, z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)} (|z|^{\pm 1} \leq 1);$$

$$V(s, x, u_1, u_2, u_3) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma_1(x)} u_2^{\gamma_2(x)} u_3^{\gamma_3(x)}, \tau^+(x) < \infty];$$

$$V_k(s, x, u_k) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)}, \tau^+(x) < \infty], k = \overline{1, 3}.$$

В позначеннях $V(\dots)$ та $V_k(\dots)$ у випадку $m \geq 0$ $P\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$.

Спільна генератриса всіх перестрибкових функціоналів визначається, при довільному знаку m , згідно з теоремою 7.7. в [3] таким чином

$$sV(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y=0}^x G(s, x-y, u_1, u_2, u_3) p_y^+(s), x \geq 0, \quad (2)$$

$$p_{\pm y}^\pm(s) = P\{\xi^\pm(\theta_s) = \pm y\}, y \geq 0;$$

$$G(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y \geq 0} A_{x+y}(u_1, u_2, u_3) p_{-y}^-(s), x \geq 0;$$

$$A_x(u_1, u_2, u_3) = \lambda_1 \sum_{k \geq x+1} p_k u_1^{k-x} u_2^x u_3^k, x \geq 0.$$

Ми обмежимося розглядом генератрис маргінальних розподілів

$$sV_k(s, x, u_k) = \sum_{y=0}^x G_k(s, x-y, u_k) p_y^+(s), x \geq 0, k = \overline{1, 3}; \quad (3)$$

$$G_k(s, x, u_k) = \sum_{y \geq 0} A_{x+y}^{(k)}(u_k) p_{-y}^-(s), x \geq 0.$$

Для функцій $A_x^{(k)}(u_k)$, що визначають праві частини рівнянь для розподілу відповідних функціоналів використовуються їх твірні перетворення

$$a_k(\beta, u_k) = \sum_{x \geq 0} \beta^x A_x^{(k)}(u_k)$$

які остаточно виражаються через генератрису $\tilde{p}_1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k p_k$ та $\tilde{\Pi}(u) = \sum_{x \geq 0} u^x \Pi(x)$.

$$A_x^{(1)}(u_1) = \lambda_1 \sum_{k \geq x+1} u_1^{k-x} p_k, A_0^{(1)}(u_1) = \lambda_1 \tilde{p}_1(u_1), A_0^{(1)}(1) = \lambda_1, A_x^{(1)}(1) = \Pi(x);$$

$$a_1(\beta, u_1) = \lambda_1 \sum_{k \geq 1} u_1^k p_k \sum_{y=0}^{k-1} \left(\frac{\beta}{u}\right)^y = \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - \beta} (\tilde{p}_1(u_1) - \tilde{p}_1(\beta));$$

$$A_x^{(2)}(u_2) = \lambda_1 \sum_{k \geq x+1} u_2^x p_k = u_2^x \Pi(x), A_0^{(2)}(u_2) = \Pi(0) = \lambda_1, A_x^{(2)}(1) = \Pi(x);$$

$$a_2(\beta, u_2) = \lambda_1 \sum_{k \geq 0} (\beta u_2)^x \Pi(x) = \tilde{\Pi}(\beta u_2);$$

$$A_x^{(3)}(u_3) = \lambda_1 \sum_{k \geq x+1} u_3^k p_k, A_0^{(3)}(u_3) = \lambda_1 \tilde{p}_1(u_3), A_x^{(3)}(1) = \Pi(x);$$

$$a_3(\beta, u_3) = \lambda_1 (1 - \beta)^{-1} (\tilde{p}_1(u_3) - \tilde{p}_1(\beta u_3)), a_3(1, u_3) = \lambda_1 u_3 \tilde{p}'_1(u_3).$$

Згідно з (3) твірні перетворення

$$v_k(s, \beta, u_k) = \sum_{x \geq 0} \beta^x V_k(s, x, u_k) = s^{-1} g_+(s, \beta) p_-(s) g_k(s, \beta, u_k)$$

виражаються добутком генератрис $g_k(s, \beta, u_k)$ та $g_+(s, \beta)$, при цьому $g_k(s, \beta, u_k)$ обчислюються за допомогою $a_k(\beta, u_k)$.

Для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x = 0$ та $x \rightarrow \infty$ використаємо лему, що випливає з результатів р.7 в [3], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s \rightarrow 0$

$$k(z) = s, \quad s \geq 0. \quad (\mathcal{L}_s)$$

Лема 1. Для $\xi(t)$ з кумулянтою (1) з $|m| < \infty$ рівняння (\mathcal{L}_s) при $s \rightarrow 0$ має 2 дійсні корені $0 < z_1(s) < 1 < z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$

$$g_-(s, z) = \frac{p_-(s)(z - b)}{z - z_1(s)}, \quad p_-(s) = P\{\xi^-(\theta_s) = 0\} = \frac{1 - z_1(s)}{1 - b}.$$

а) Якщо $m = 0$, тоді при $s \rightarrow 0$ добуток доповнень коренів $\bar{z}_1(s) = 1 - z_1(s)$, $\bar{z}_2(s) = z_2(s) - 1$

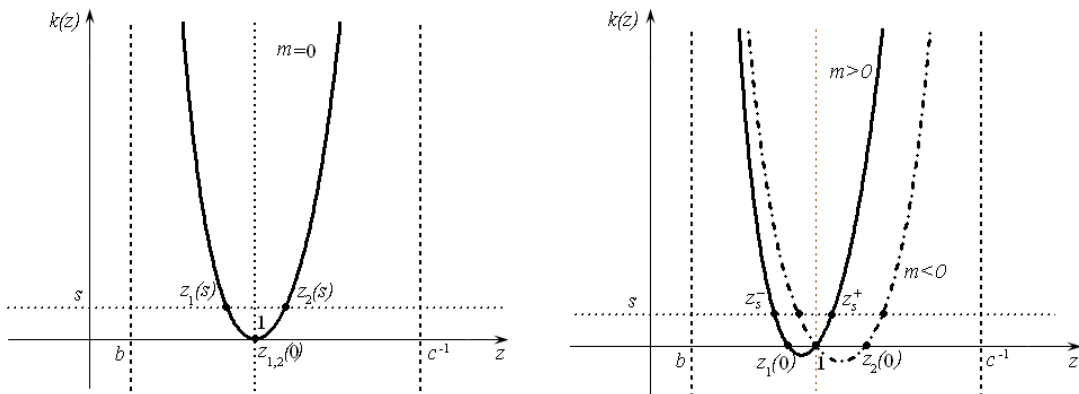
$$\bar{z}_1(s)\bar{z}_2(s) = O(s), \quad p_-(s)p_+(s) \approx k_1 s, \quad k_1 = (\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \quad (4)$$

б) Якщо $m > 0$, тоді $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ визначає генератрису ξ^-

$$E z^{\xi^-} = \frac{p_-(z - b)}{z - z_1(0)}, \quad z_1(0) = q_- + b p_-, \quad (p_- = P\{\xi^- = 0\}). \quad (5)$$

в) Якщо $m < 0$, тоді $z_2(0) > 1$, а $z_1(0) = 1$, при цьому (див. (7.91) в [3])

$$z_1(s) \approx 1 + \frac{s}{|m|}, \quad p_-(s) \approx \frac{s}{|m|(1 - b)}, \quad s \rightarrow 0. \quad (6)$$



Схематично графіки кумулянти для $y \leq s$, при достатньо малих $s > 0$, мають форму параболи (з несиметричними вертикально направленими вверх гілками, які при зростанні $k(z)$ наближаються до асимптот $z = b$ та $z = c^{-1}$) і

розташовані в правій півплощині в обмеженій смужі прямої $z = 1$. При $m = 0$ вершина графіка знаходиться на осі абсцис в точці $z = 1$. При $\pm m > 0$ графіки опущені вниз і зміщені вліво(вправо) так, щоб права (ліва) гілка його проходила через точку $(1; 0)$.

Отже, при $m = 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має двократний корінь $z_{1,2}(0) = 1$ (див.(4)). При $m > 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має корінь $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ (визначає p_- в (5)). При $m < 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має корінь $z_2(0) > 1$, і $z_1(0) = 1$, а $1 - z_1(s) \approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (6). Якщо $\xi(t)$ з кумулянтною (1)– майже напівнеперервний зверху процес ($c \in (0, 1)$), то $1 < z_2(s) < c^{-1}$. Наступна лема випливає з наслідку 2.1. в [6]

Лема 2. Для $\xi(t)$ з кумулянтною (1) і $m = 0$

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 1}} m_0(s, \beta) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 1}} \frac{1 - \beta}{s} p_-(s) g_+(s, \beta) = \frac{1}{\sigma_1^2(1 - b)} = \frac{1}{\lambda_1(b\mu_1 + (1 - b)\mu_2)}. \quad (7)$$

Зауважимо, що при $m = 0$ моменти додатних стрибків $\mu_1 = \tilde{p}'_1(1)$, $\mu_2 = \tilde{p}''_1(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_2(1 - b)^{-1}, \quad \sigma_1^2 = k''(1) = \lambda_1 \mu_2 + \frac{\lambda_2 b}{(1 - b)^2} = \lambda_1(1 - b)^{-1}(b\mu_1 + (1 - b)\mu_2). \quad (8)$$

Надалі будемо позначати $z_1(s) = z_s$ і розглянемо спочатку перестрибкові функціонали через рівень $x = 0$.

Згідно з (2)-(3) генератриси $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ для довільного знаку m визначаються простими співвідношеннями

$$V_k(s, 0, u_k) = s^{-1} p_+(s) G_k(s, 0, u_k), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (9)$$

Нас цікавить осцилюючий випадок $m = 0$, для якого позначатимемо

$$G_k^0(s, x, u_k) = p_-^{-1}(s) G_k(s, x, u_k), \quad x \geq 0, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Теорема 1. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (1) і $m = 0$

$$E u^{\gamma_1(0)} = [b\lambda_1 \tilde{p}_1(u) + (1 - b)u \tilde{\Pi}(u)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \quad (10)$$

$$E v^{\gamma_2(0)} = [b\lambda_1 + (1 - b) \tilde{\Pi}(v)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \quad (11)$$

$$E \mu^{\gamma_3(0)} = [b\lambda_1 \tilde{p}_1(\mu) + (1 - b) \tilde{\Pi}(\mu)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \quad (12)$$

Доведення. Згідно з (7.31) в [3]

$$p_{-k}^-(s) = p_-(s)(z_s - b)z_s^{k-1} \quad (k \geq 1, z_s = z_1(s) \leq 1). \quad (13)$$

Для випадку $k = 1$ знаходимо функцію $G_1^0(s, 0, u)$ та її граничні значення при $s \rightarrow 0, u \rightarrow 1$

$$G_1^0(s, 0, u) = bA_0^{(1)}(u) + \lambda_1 \frac{(z_s - u)u}{z_s - u} (\tilde{p}_1(z_s) - \tilde{p}_1(u)),$$

$$G_1^0(0, 0, u) = b\lambda_1 \tilde{p}_1(u) + \frac{\lambda_1(1 - b)u}{1 - u} (\tilde{p}_1(1) - \tilde{p}_1(u)),$$

$$G_1^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1 - b)\mu_1.$$

Згідно з (8) при $k = \overline{1, 3}$

$$E[e^{-s\tau^+(0)} u_k^{\gamma_1(0)}] = p_-(s)p_+(s)G_k^0(s, 0, u). \quad (14)$$

Враховуючи (4) після граничного переходу $s \rightarrow 0$ з (14) випливає, що при $k = 1$, $u_k = u$: $E[u^{\gamma_1(0)}] = k_1 G_1^0(s, 0, u) \xrightarrow{u \rightarrow 1} 1$, отже, $k_1 = (G_1^0(0, 0, 1))^{-1}$.

Згідно з (7) $G_1^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_2$ і співвідношення (9) доведено і визначена стала k_1 в (4).

У випадку $k = 2$ простіше обчислюється функція G_2^0 з її граничними значеннями

$$G_2^0(s, 0, v) = bz_s^{-1}\lambda_1 + (z_s - b)z_s\tilde{\Pi}(vz_s),$$

$$G_2^0(0, 0, v) = b\lambda_1 + (1 - b)z_s\tilde{\Pi}(v) \rightarrow G_2^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_2.$$

Як і в попередньому випадку при $k = 2$, $u_2 = v$ з урахуванням (4) через $G_2^0(0, 0, v)$ визначається генератриса $\gamma_2(0)$ в (11).

Для випадку $k = 3$, $u_3 = \mu$, аналогічно обчислюються

$$G_3^0(s, 0, \mu) = z_s^{-1}[b\lambda_1\tilde{p}_1(\mu) + \lambda_1\frac{z_s - b}{1 - z_s}(\tilde{p}_1(\mu) - \tilde{p}_1(\mu z_s))],$$

$$G_3^0(0, 0, \mu) = b\lambda_1\tilde{p}_1(\mu) + (1 - b)\tilde{\Pi}(\mu) \rightarrow G_3^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_2.$$

Як і в попередніх випадках при $k = 3$ і $u_k = \mu$ із (13) після граничного переходу $s \rightarrow 0$ встановлюється (12).

В наступних теоремах розглядаються генератриса перестрибків через рівень $x \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (1) та $m = 0$

$$E u^{\gamma_1(\infty)} = \left[bu\tilde{\Pi}(u) + \lambda_1(1 - b)\frac{u}{u - 1}(\tilde{p}'_1(u) - \tilde{p}'_1(1)) \right] \frac{1}{(1 - b)\sigma_1^2}. \quad (15)$$

Доведення. При $m = 0$ згідно з (13) обчислюється функція

$$G_1^0(s, x, u) = bz_s^{-1}A_x^{(1)} + \lambda_1(z_s - b)z_s^{-1}\frac{u}{u - z_s} \sum_{k \geq x+1} p_k(u^k - z_s^k)$$

та її твірне перетворення $g_1^0(s, \beta, u)$ з її граничними значеннями

$$g_1^0(s, \beta, u) = z_s^{-1} \left[b\tilde{\Pi}(u) + \frac{\lambda_1 u(z_s - b)}{(u - z_s)(1 - \beta)} (\tilde{p}_1(u) - \tilde{p}_1(u\beta) - \tilde{p}_1(z_s) + \tilde{p}_1(\beta z_s)) \right],$$

$$g_1^0(0, 1, u) = \lim_{s \rightarrow 0} g_1^0(s, \beta, u) = b\tilde{\Pi}(u) + \lambda_1 u \frac{1 - b}{u - 1} (\tilde{p}'_1(u) - \tilde{p}'_1(1)), \quad (16)$$

$$g_1^0(0, 1, 1) = \lim_{u \rightarrow 1} g_1^0(0, 1, u) = \lambda_1(b\mu_1 + (1 - b)\mu_2).$$

Позначимо через ν_β – геометрично розподілену випадкову величину з параметром $\beta < 1$. Тоді згідно з (2)-(3) генератриса $\{\tau^+(\nu_\beta), \gamma_k(\nu_\beta)\}$ визначаються співвідношеннями

$$E \left[e^{-s\tau^+(\nu_\beta)} u_k^{\gamma_k(\nu_\beta)} \right] = \frac{1 - \beta}{s} p_-(s)g_+(s, \beta)g_k^0(s, \beta, u_k) = m_0(s, \beta)g_k^0(s, \beta, u_k). \quad (17)$$

З урахуванням леми 2 та граничних значень в (16) при $k = 1$ і $u_1 = u$ із (16) при $s \rightarrow 0$ і $\beta \rightarrow 1$ впливає, що $E u^{\gamma_1(\infty)} = g_1^0(0, 1, u)(g_1^0(0, 1, 1))^{-1}$. Згідно з (8) $g_1^0(0, 1, 1) = \sigma_1^2(1 - b)$ і таким чином (15) доведено.

Теорема 3. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (1) та $m = 0$

$$E v^{\gamma_2(\infty)} = \left[b\tilde{\Pi}(v) + \frac{1-b}{1-v} \left(\tilde{\Pi}(v) - \lambda_1 v \tilde{p}'_1(v) \right) \right] \frac{1}{(1-b)\sigma_1^2}. \quad (18)$$

Доведення. Для випадку $k = 2$, $u_2 = v$ при $m = 0$ знаходимо

$$G_2^0(s, x, v) = z_s^{-1} v^x \left[b\Pi(x) + \lambda_1 \frac{z_s - b}{1 - v z_s} \sum_{k \geq x+1} p_k (1 - (v z_s)^{k-x}) \right]$$

та її твірне перетворення $g_2^0(s, \beta, u)$ з граничними значеннями

$$g_2^0(s, \beta, v) = z_s^{-1} b\tilde{\Pi}(\beta v) + \frac{z_s - b}{z_s(1 - v z_s)} \left(\tilde{\Pi}(\beta v) - \lambda_1 v \tilde{p}'_1(v) \right),$$

$$g_2^0(0, 1, v) = \lim_{s \rightarrow 0} g_1^0(s, 1, v) = b\tilde{\Pi}(v) + \frac{1-b}{1-v} \left(\tilde{\Pi}(v) - \lambda_1 v \tilde{p}'_1(v) \right), \quad (19)$$

$$g_2^0(0, 1, 1) = \lim_{v \rightarrow 1} g_1^0(0, 1, v) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2).$$

З урахуванням леми (19) після граничного переходу $s \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$ в (17) при $k = 2$ і $u_2 = v$ знаходимо, що $E v^{\gamma_2(\infty)} = g_2^0(0, 1, v)(g_2^0(0, 1, 1))^{-1}$. Згідно з (8) з останнього співвідношення впливає (18).

Теорема 4. При умові $m = 0$ генератриса $\gamma_3(\infty)$ визначається через твірні перетворення функції $A_x^{(3)}(\mu)$

$$a_3(\beta, \mu) = \frac{\lambda_1}{1-\beta} (\tilde{p}_1(\mu) - \tilde{p}_1(\beta\mu)), \quad a_3(1, \mu) = \lambda_1 \tilde{p}'_1(\mu),$$

$$E v^{\gamma_3(\infty)} = [b a_3(1, \mu) + (1-b) a'_3(1, \mu)] \frac{1}{(1-b)\sigma_1^2}, \quad (20)$$

$$a'_3(1, \mu) = \frac{\partial}{\partial \beta} a_3(\beta, \mu) \Big|_{\beta=1} = \sum_{x \geq 0} x A_x^{(3)}(\mu).$$

Доведення. Із (17) при $k = 3$, $u_3 = \mu$, аналогічно, як і в попередніх випадках при $s \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$ встановлюється (20).

Зауваження 1. Для дійснозначних східчастих процесів Леві (див. [4], лема 3.4, с.84) незалежно від знаку m атомарні ймовірності $p_{\pm}(s) > 0$, $p_0(s) = P\{\xi(\theta_s) = 0\}$ задовольняють співвідношення(точне і асимптотичне)

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) = \frac{s}{s + \lambda} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} p_+(s)p_-(s) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (21)$$

Отже, асимптотичне співвідношення (4) в лемі 1 і (21) майже подібні, тобто і в гратчастому випадку при $m = 0$ і $s \rightarrow 0$ добуток

$$p_+(s)p_-(s) \approx k_1 s = \frac{s}{b\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (s \rightarrow 0) \quad (22)$$

асимптотично лінійний по s і обернено пропорціональний сумарній інтенсивності λ_1 додатних та λ_2 від'ємних стрибків. Але в ґратчастому випадку величина інтенсивності λ_1 зменшена ($\lambda_1 b < \lambda_1$, $0 < b < 1$). Крім того,

$$p_0(s) = p_+(s)p_-(s) + \sum_{k \geq 1} p_{-k}^-(s)p_k^+(s) > p_+(s)p_-(s) > \frac{s}{s + \lambda} = p_0^0(s). \quad (23)$$

Слід відзначити, що згідно (7.32) в [3]

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) - (z_s - b) \sum_{k \geq 1} b^{k-1} p_k(s), \quad 0 < b < z_s < 1.$$

Це пояснюється тим, що в ґратчастому випадку після моменту першого стрибка ζ_1 процес $\xi(t)$ повторно може попадати в нуль. Тому

$$p_0(s) > s \int_0^\infty e^{-st} P\{\zeta_1 > t\} dt = s \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dt = s(s + \lambda)^{-1} = p_0^0(s), \quad (24)$$

де $p_0^0(s)$ – імовірність початкового перебування $\xi(t)$ в 0 (до виходу з 0). Імовірність перебування $\xi(t)$ в нулі за рахунок повернення в нього визначається різницею

$$\bar{p}_0(s) = p_0(s) - p_0^0(s) > p_+(s)p_-(s) - p_0^0(s) \approx \frac{s\lambda_1(1-b)}{(\lambda_1 + \lambda_2)(b\lambda_1 + \lambda_2)} (s \rightarrow 0). \quad (25)$$

Права частина в (25) досягає максимуму при $b = 0$, коли процес $\xi(t)$ напівнеперервний знизу.

Зауваження 2. З результатів теорем 7.6, 7.7 та леми 7.6 в [3] (див. (7.34) та (7.51)) випливає, що при $\pm m > 0$ і $s \rightarrow 0$

$$0 < p_{\mp} = P\{\xi^{\mp} = 0\} < 1, \quad p_{\pm}(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0,$$

$$p'_+(0) = E[\tau^+(0)], \quad p'_-(0) = E[\tau^-(0)] = \frac{1}{|m|(1-b)} > 0.$$

Отже, при $\pm m > 0$ та $s \rightarrow 0$ мають місце подібні до (22) співвідношення

$$p_+(s)p_-(s) \approx s p_{\mp} p'_{\pm}(0) (s \rightarrow 0). \quad (26)$$

Зауваження 3. Для ілюстрації деяких результатів з розподілу граничних функціоналів використовується введене Ю. П. Студневим (див. [7]) поняття дискретних квазіімовірнісних розподілів.

Означення 1. Послідовність $\{p_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ називається дискретним квазіімовірнісним розподілом, якщо

$$\sum_{|k| \geq 0} p_k = 1, \quad \sum_{|k| \geq 0} |p_k| < \infty. \quad (27)$$

Квазігенератрисою такого розподілу називається твірна функція

$$p_*(z) = \sum_{|k| \geq 0} p_k z^k, \quad |z| = 1. \quad (28)$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ з $0 < c < 1$ рівняння Лундберга: $k(z) = 0$ (\mathfrak{L}_0) ($k(z) = \ln E z^{\xi(t)}$) має корінь $z_0 > 1$. Якщо позначити $c' = z_0^{-1}$, то при $m < 0$ генератриса ξ^+ зводиться до вигляду

$$g_+(z) = \frac{1-c'}{1-c} \cdot \frac{1-cz}{1-c'z} = \frac{z^{-1}-c}{1-c} \cdot \frac{(1-c')z}{1-c'z} = b_*^-(z)g_*^+(z), \quad (29)$$

$g_*^+(z)$ – генератриса геометричного розподілу з параметром c' на \mathbb{Z}^+ . Функцію $b_*^-(z)$ можна інтерпретувати як квазігенератрису бернуллівського "розподілу":

$$p_0 = -\frac{c}{1-c} \cdot p_{-1} = 1 - p_0 = \frac{1}{1-c}; \quad E\xi^+ = \frac{1}{1-c'} - \frac{1}{1-c} = \frac{c'-c}{(1-c')(1-c)} > 0.$$

Аналогічно для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з $0 < b < 1$ рівняння Лундберга (\mathfrak{L}_0) має корінь $b < z_0 < 1$. Якщо позначити $b' = z_0$, то при $m > 0$ генератриса ξ^- зводиться до вигляду

$$g_-(z) = \frac{1-b'}{1-b} \cdot \frac{z-b}{z-b'} = \frac{z-b}{1-b} \cdot \frac{1-b'}{z-b'} = b_*^+(z)g_*^-(z), \quad (30)$$

$g_*^-(z)$ – генератриса геометричного розподілу з параметром b' на \mathbb{Z}_- , $b_*^+(z)$ квазігенератриса бернуллієвого "розподілу":

$$p_0 = -\frac{b}{1-b}, \quad p_1 = 1 - p_0 = \frac{1}{1-b}; \quad E\xi^- = \frac{b-b'}{(1-b')(1-b)} < 0.$$

За рахунок $p_1 > 0$ множина значень ξ^- поповнюється значенням $\{0\}$.

Для розподілу ξ^+ та перестрибкових функціоналів процесу $\xi(t)$ з поліноміальними генератрисами додатних стрибків $\tilde{p}_1(z)$ використовуються квазігенератриси геометричного розподілу на $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ з параметром $0 < c_* = |z_3(0)|^{-1} < 1$ ($|z_3(0)| > z_{1,2}(0)$):

$$p_*^+(z) = \frac{1+c_*}{1+c_*z} \quad (p_k^* = (1+c_*)(-c_*)^k, \quad k \geq 0, \quad \sum_{k \geq 0} p_k^* = 1, \quad \sum_{k \geq 0} |p_k^*| = \frac{1+c_*}{1-c_*}.)$$

Список використаної літератури

1. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – К.: Наукова думка, 1975. – 138 с.
2. *Гизман И.И., Скорород А.В.* Теория случайных процессов. (Т. 2) – М.: Наука, 1973. – 639 с.
3. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.
4. *Gusak D. V.* Boundary functionals for Levy processes and their applications. LAP Lambert Acad.Publishing, 2014, – 412 p.
5. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів напівнеперервного однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн.– 2002. – 54, №3. – С. 303–322.
6. *Герич М. С.* Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова // Теорія ймовір. та мат. статистика.– 2016. – 94, – С. 36–49.
7. *Студнев Ю. П., Игнат Ю. И.* Локальная предельная теорема для дискретных квазивероятностных распределений // Теория вероят. и её примен. – 1992. – Т 37, №4. – С. 807-808.

Одержано 10.10.2016