УДК 512.554.35

А. П. Петравчук, К. Я. Сисак (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНІ АЛГЕБРИ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ КОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ

Let $\mathbb{K}$ be an arbitrary field of chracteristic zero and A an integral domain over $\mathbb{K}$. Let $R = Frac(A)$ be the fraction field of A. The Lie algebra $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ of all $\mathbb{K}$-derivations on A is embedded into the Lie algebra (over $\mathbb{K}$) $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ of derivations on R, which simultaneously forms a vector space over R. Thus one can define the rank of each subalgebra $L \subseteq R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ over R, namely $\mathrm{rank}_R L = \dim_R RL$. We study locally nilpotent Lie subalgebras of $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ of finite rank over R. It is proved that every locally nilpotent subalgebra L of finite rank over R of the Lie algebra $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ has the nonzero center. Locally nilpotent Lie algebras L of rank 1 and 2 are characterized. It is proved that such Lie algebras L are isomorphic to subalgebras of the Lie algebra $u_2(F)$ of triangular derivations on the polynomial ring $F[x, y]$, where F is the field of constants of L.

Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле характеристики нуль, A – область цілісності над $\mathbb{K}$ і $R = Frac(A)$ – поле часток алгебри A. Алгебра Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань алгебри A вкладається в алгебру Лі (над $\mathbb{K}$) $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ диференціювань поля R, яка також утворює векторний простір над R. Тому для кожної підалгебри $L \subseteq R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ можна визначити ранг над R, а саме $\mathrm{rank}_R L = \dim_R RL$. Ми вивчаємо локально нільпотентні підалгебри з $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ скінченного рангу над R. Доведено, що кожна локально нільпотентна підалгебра L скінченного рангу над R з алгебри Лі $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ має ненульовий центр. Описано локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань L рангу 1 та 2 над R. Доведено, що вони ізоморфні підалгебрам алгебри Лі $u_2(\mathbb{F})$ трикутних диференціювань кільця многочленів $F[x, y]$, де F – поле констант алгебри Лі L.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле і A асоціативно-комутативна алгебра над $\mathbb{K}$, яка є областю цілісності. Нехай $R = Frac(A)$ – поле часток алгебри A. $\mathbb{K}$-диференціюванням алгебри A називається $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D\colon A \to A$, яке задовольняє правило $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для довільних $a, b \in A$. Множина усіх $\mathbb{K}$-диференціювань $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ утворює алгебру Лі над полем $\mathbb{K}$ відносно операції комутування $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ для $D_1,\ D_2 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$. Структура алгебри Лі $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ та її підалгебр представляє значний інтерес, оскільки з геометричної точки зору диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ можна розглядати як векторні поля на $\mathbb{K}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами. Алгебри Лі диференціювань вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [1], [2], [4], [5]).

Кожне диференціювання D алгебри A можна однозначно продовжити до диференціювання поля часток R наступним чином: $D(a/b) = (D(a)b - aD(b))/b^2$ для довільних $a, b \in A$. Визначимо тепер $\mathbb{K}$-диференціювання rD поля R за правилом: $(rD)(x) = r \cdot D(x)$ для $r, x \in R$ та $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$. $\mathbb{K}$-лінійна оболонка усіх таких диференціювань утворює алгебру Лі $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ (ми будемо позначати її через $W(A)$) над полем $\mathbb{K}$, яка одночасно є векторним простором над R. Якщо L – підалгебра алгебри Лі $W(A)$, то можна визначити її ранг $\mathrm{rank}_R L$ над R як розмірність векторного простору $RL = \{rD \mid r \in R, D \in L\}$ над полем R. Підполе в R, яке складається з усіх $r \in R$ таких, що $D(r) = 0$ для довільного $D \in L$, називається полем констант для L і позначається через $F = F(L)$. Векторний простір $FL = \{fD \mid f \in F, D \in L\}$ над полем констант $F = F(L)$ утворює алгебру Лі над F, тоді як RL – алгебра Лі над $\mathbb{K}$, але в загальному випадку не над R.

В роботі [3] вивчалися нільпотентні та розв'язні підалгебри скінченного рангу над R.із алгебри Лі $W(A)$ В даній роботі вивчаються локально нільпотентні алгебри Лі скінченного рангу над R із $W(A)$. Нагадаємо, що алгебра Лі називається локально нільпотентною, якщо кожна її скінченно породжена підалгебра є нільпотентною. Доведено, що кожна локально нільпотентна підалгебра L з $W(A)$ скінченного рангу над R має ненульовий центр (Теорема 1). Описано будову локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань рангів 1 та 2 над R (Теорема 2). Як наслідок, показано, що такі алгебри Лі ізоморфні підалгебрам алгебри Лі $u_2(F)$ всіх трикутних диференціювань кільця многочленів $F[x, y]$, де $F = F(L)$ – поле констант алгебри Лі L.

Позначення в роботі стандартні. Основне поле $\mathbb{K}$ довільне, характеристики нуль. Поле часток області цілісності A позначатимемо через R, алгебру Лі $R\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}A$ – через $W(A)$. Алгебра Лі $u_2(\mathbb{K})$ трикутних диференціювань многочленів складається з усіх диференціювань кільця $\mathbb{K}[x, y]$ вигляду $D = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}$, де $\alpha \in \mathbb{K}$ та $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Алгебра Лі $u_2(\mathbb{K})$ є локально нільпотентною, але не нільпотентною алгеброю (див., наприклад, [1]).Через RL та FL позначатимемо алгебри Лі визначені вище. Похідну довжину алгебри Лі L позначатимемо через $s(L)$, а похідну алгебру $[L, L]$ – через L'.

2. Будова локально нільпотентних підалгебр з $W(A)$ скінченного рангу над R. Ми будемо користуватися твердженнями з [3], які зібрані в лемах 1–4.

Лема 1. *[3, Lemma 1] Нехай $D_1,\ D_2 \in W(A)$ і $a,\ b \in R$. Тоді*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Лема 2. *Нехай L – підалгебра з алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант для L. Тоді*

(1) *[3, Lemma 2] FL і RL є $\mathbb{K}$-підалгебрами із $W(A)$. Більше того, FL є алгеброю Лі над полем F, і якщо L абелева, нільпотентна або розв'язна, то FL має таку ж саму властивість відповідно.*

(2) *[3, Corollary 1, Theorem 1] Якщо L нільпотентна і має ранг k над R, то похідна довжина L не перевищує k і алгебра Лі FL скінченновимірна над F.*

(3) *[3, Lemma 4] Якщо I – ідеал в L, то векторний простір $RI \cap L$ над полем $\mathbb{K}$ буде також ідеалом в L.*

Лема 3. *[3, Proposition 1] Нехай L – нільпотентна підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант для L. Тоді*

(1) *якщо L має ранг 1 над R, то L абелева і $\dim_F FL = 1$;*

(2) *якщо L має ранг 2 над R, то існують такі $D_1,\ D_2 \in FL$ і $a \in R$, що $FL = F\langle D_1, aD_1, \ldots, a^k/k!D_1, D_2\rangle$, при цьому $[D_1, D_2] = 0$, де $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = 1$.*

Лема 4. *[3, Lemma 5] Нехай L – нільпотентна підалгебра рангу $n > 0$ над R із алгебри Лі $W(A)$. Тоді L містить ряд ідеалів*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = L$$

такий, що $\mathrm{rank}_R I_k = k$ *і* $[I_k, I_k] \subset I_{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Лема 5. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра скінченного рангу над R із алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант для L. Тоді алгебра Лі FL над полем F також локально нільпотентна.*

Доведення. Візьмемо довільну скінченну множину елементів $T_1, \ldots, T_n \in FL$ і позначимо через M підалгебру із FL, породжену цими елементами. Кожен елемент T_i за означенням алгебри Лі FL може бути записаний у вигляді

$$T_i = \sum_{j=1}^{k_i} f_{ij} D_{ij}, \ f_{ij} \in F, D_{ij} \in L.$$

Позначимо через N підалгебру алгебри Лі L, яка породжена елементами $D_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, k_i$. Тоді N – нільпотентна підалгебра із L і, оскільки $f_{ij} D_{ij} \in FN$, то $M \subseteq FN$. З огляду на Лему 2 алгебра Лі FN нільпотентна і тому її підалгебра M також нільпотентна. Це означає, що FL – локально нільпотентна алгебра Лі.

Лема 6. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра рангу n над R із алгебри Лі $W(A)$. Тоді L – розв'язна алгебра Лі ступеня розв'язності не більше ніж n.*

Доведення. Нехай $\{g_1, d_2, \ldots, g_k\}$ – скінченна підмножина з L. Оскільки L – локально нільпотентна, то ця підмножина породжує нільпотентну підалгебру із L, яку ми позначимо через M. Ясно, що

$$\mathrm{rank}_R M \leq \mathrm{rank}_R L = n.$$

Тоді за Лемою 2 M розв'язна і $s(M) \leq n$. Це означає, що всі скінченно породжені підалгебри в L є розв'язними ступеня розв'язності не більше n. Звідси випливає, що алгебра Лі L розв'язна і $s(L) \leq n$.

Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ (не обов'язково скінченновимірний) і T – лінійний оператор на V. Оператор T називається локально нільпотентним, якщо для кожного $v \in V$ існує натуральне число $n = n(v)$ таке, що $T^n(v) = 0$. Очевидно, що кожен нільпотентний оператор є локально нільпотентним, зворотнє твердження в загальному випадку не виконується.

Наступна лема є узагальненням (на нескінченновимірні векторні простори) стандартного факту про комутуючі нільпотентні оператори.

Лема 7. *Нехай V – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ (не обов'язково скінченновимірний) і $T_1, T_2, \ldots, T_k$ – попарно комутуючі локально нільпотентні оператори на V. Тоді існує такий ненульовий елемент $v_0 \in V$, що* $T_1(v_0) = T_2(v_0) = \cdots = T_k(v_0) = 0.$

Доведення. Нехай $v \in V$ – довільний ненульовий вектор. Розглянемо підпростір W в V, породжений всіма елементами вигляду $T_1^{s_1}T_2^{s_2}\dots T_k^{s_k}(v)$, де $s_1,\ s_2,\dots,\ s_k \geq 0$. Оскільки $T_1,\ T_2,\dots,T_k$ локально нільпотентні і попарно комутують, то W буде скінченновимірним підпростором в V. Крім того, W інваріантний відносно операторів $T_1,\ T_2,\dots,T_k$. Тоді звуження $T_1,\ T_2,\dots,T_k$ на скінченновимірний підпростір W мають, як відомо, спільний власний вектор $v_0 \in W$, такий, що

$$T_1(v_0) = \dots = T_k(v_0) = 0.$$

Лема 8. *Нехай L – підалгебра рангу n над R із алгебри Лі $W(A)$, $L' = [L, L]$ – її похідна підалгебра рангу k над R. Тоді $M = RL' \cap L$ – ідеал алгебри L такий, що $\mathrm{rank}_R M = \mathrm{rank}_R L'$ і FL/FM – абелева алгебра Лі розмірності $n-k$ над полем констант F алгебри L..*

Доведення. За Лемою 2 $M = RL' \cap L$ – ідеал алгебри L, оскільки L' є ідеалом в L і, як легко бачити, $\mathrm{rank}_R M = \mathrm{rank}_R L'$. Оскільки $L' \subseteq M$, то L/M – абелева алгебра Лі. Тоді FL/FM також абелева алгебра Лі. Покажемо, що $\dim_F FL/FM = n-k$.

Виберемо який-небудь базис $D_1, D_2, \dots, D_k$ ідеалу M над полем R і доповнимо його елементами $D_{k+1}, \dots, D_n$ до базису алгебри Лі L над R. Візьмемо довільний $D \in L$. Його можна записати у вигляді

$$D = r_1D_1 + r_2D_2 + \dots + r_nD_n$$

для деяких $r_1, \dots, r_n \in R$. Для довільного базисного елемента $D_j \in L$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, використовуючи Лему 1, маємо

$$[D_j, D] = \sum_{i=1}^{n} r_i[D_j, D_i] + \sum_{i=1}^{n} D_j(r_i)D_i.$$

Оскільки $[D_j, D_i] \in L'$ та $[D_j, D] \in L'$, то

$$\sum_{i=1}^{n} D_j(r_i)D_i = [D_j, D] - \sum_{i=1}^{n} r_i[D_j, D_i] \in M.$$

Тоді $\sum_{i=1}^{n} D_j(r_i)D_i$ є лінійною комбінацією елементів $D_1,\ D_2,\dots,D_k$ над R. З цього та того, що D_j був обраний довільно, випливає, що $D_j(r_i) = 0$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$ і $i = k+1, \dots, n$. Останнє означає, що $r_{k+1}, \dots, r_n \in F = F(L)$ і

$$r_{k+1}D_{k+1} + \dots + r_nD_n \in FL.$$

Оскільки $r_1D_1 + r_2D_2 + \dots + r_kD_k \in M$, то

$$D + M = r_{k+1}D_{k+1} + \dots + r_nD_n + M.$$

Звідси випливає, що $\dim_F FL/FM = n-k$.

Лема 9. *Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра рангу n над R із алгебри Лі $W(A)$. Тоді похідна алгебра $L' = [L, L]$ має ранг над R не більший ніж $n-1$.*

Доведення. Припустимо, що існує така локально нільпотентна підалгебра L алгебри Лі $W(A)$, що задовольняє умови леми і $\mathrm{rank}_R L = \mathrm{rank}_R L' = n$. Виберемо довільний базис $\{D_1,\ D_2, \ldots, D_n\}$ алгебри Лі L' над R. Очевидно, що $\{D_1,\ D_2, \ldots, D_n\}$ – базис алгебри L над R. Кожен базисний елемент $D_i \in L'$ записується у вигляді суми певної кількості комутаторів елементів з L, а саме

$$D_i = \sum_{j=1}^{k_i} [S_j^{(i)}, T_j^{(i)}]$$

для деяких

$$S_j^{(i)}, T_j^{(i)} \in L,\ i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, \ldots, k_i.$$

Позначимо через M підалгебру в L, породжену множиною елементів

$$\{S_j^{(i)}, T_j^{(i)} \mid j = 1, 2, \ldots, k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Оскільки L – локально нільпотентна алгебра Лі, то M – нільпотентна підалгебра із L, при цьому $D_1,\ D_2, \ldots, D_n \in M'$. Це означає, що $\mathrm{rank}_R M' = \mathrm{rank}_R M = n$. Останнє призводить до суперечності, оскільки за Лемою 4 $[M, M] \subset I_{n-1}$, де I_{n-1} – ідеал в M рангу $n-1$ над R. Отже, наше припущення хибне і $\mathrm{rank}_R L' \leq n-1$.

Теорема 1. *Нехай L – ненульова локально нільпотентна підалгебра з $W(A)$ скінченного рангу над R. Тоді центр алгебри L ненульовий.*

Доведення. Нехай $\mathrm{rank}_R L = n$. Оскільки L ненульова, то $n \geq 1$. Проведемо доведення індукцією за рангом алгебри Лі L.

Якщо $n = 1$, то L – абелева і тому $Z(L) \neq 0$. Нехай доведено, що центр $Z(L)$ ненульовий для алгебр Лі рангу $\leq n$ над R. Доведемо, що $Z(L) \neq 0$ для L рангу n над R.

Нехай $\mathrm{rank}_R L' = k$, де $L' = [L, L]$ – похідна алгебра Лі для L. За Лемою 9 $k < n$. Позначимо $M = RL' \cap L$. Тоді M – ідеал алгебри Лі L рангу k над R і $\dim_F FL/FM = n-k$ за Лемою 8, де F – поле констант для L. За припущенням індукції центр $Z(M) \neq 0$. Очевидно, що $Z(M)$ є векторним простором над полем $\mathbb{K}$ (можливо нескінченновимірним). Виберемо елементи $D_1,\ D_2, \ldots, D_{n-k} \in L$ так, щоб класи суміжності

$$\{D_1 + FM,\ D_2 + FM, \ldots, D_{n-k} + FM\}$$

утворювали базис в фактор-просторі FL/FM над полем F. Лінійні оператори

$$\mathrm{ad}D_1,\ \mathrm{ad}D_2, \ldots, \mathrm{ad}D_{n-k}$$

локально нільпотентні на векторному просторі $Z(M)$ (над $\mathbb{K}$). Оскільки

$$[\mathrm{ad}D_i, \mathrm{ad}D_j] = \mathrm{ad}[D_i, D_j]\ і\ [D_i, D_j] \in M,$$

то лінійні оператори $\mathrm{ad}D_i$ і $\mathrm{ad}D_j$ комутують на $Z(M)$ для $i, j = 1, 2, \ldots, n-k$. За Лемою 7 існує ненульовий $D_0 \in Z(M)$ такий, що

$$\mathrm{ad}D_i(D_0) = [D_i, D_0] = 0$$

для всіх $i = 1, 2, \dots, n-k$. Більше того, легко бачити, що $[FD_i, D_0] = 0$ для $i = 1, 2, \dots, n-k$. Оскільки $D_0 \in Z(M)$, то $[FM, D_0] = 0$. Але

$$FL = FD_1 + FD_2 + \cdots + FD_{n-k} + FM,$$

і тому $[FL, D_0] = 0$, тобто $D_0 \in Z(FL)$. Це означає, що $D_0 \in Z(L)$.

3. Локально нільпотентні алгебри Лі диференціювань малого рангу над R.

Теорема 2. *Нехай L – локально нільпотентна підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і F – поле констант алгебри L. Тоді*

(1) якщо $\mathrm{rank}_R L = 1$, то L абелева і $\dim_F FL = 1$;

(2) якщо $\mathrm{rank}_R L = 2$, то FL або нільпотентна скінченновимірна над полем F, або нескінченновимірна над F і існують $D_1,\ D_2 \in L$, $a \in R$ такі, що

$$FL = \langle D_2, D_1, aD_1, \dots, \frac{a^k}{k!}D_1, \dots \rangle,$$

де $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$ та $D_2(a) = 1$.

Доведення. Оскільки алгебра Лі L локально нільпотентна (над $\mathbb{K}$), то FL локально нільпотентна як алгебра Лі над F за Лемою 5.

(1) Нехай $\mathrm{rank}_R L = 1$. Тоді $L = RD$ для деякого $D \in L$, $D \neq 0$. Кожна скінченно породжена підалгебра із L нільпотентна і за Лемою 3 абелева. Тоді алгебра L абелева і $\dim_F FL = 1$ за Лемою 3.

(2) Достатньо розглянути випадок, коли FL нескінченновимірна над F. Дійсно, якщо FL скінченновимірна над F, то вона нільпотентна і описана в Лемі 3.

За Теоремою 1 центр алгебри Лі L ненульовий. Нехай $D_1 \in Z(L)$, $D_1 \neq 0$. Покладемо $I_1 = RD_1 \cap L$. Тоді I_1 – ідеал алгебри L за Лемою 2 і $\mathrm{rank}_R I_1 = 1$. Покажемо, що $\dim_F FL/FI_1 = 1$. Дійсно, припустимо, що це не так і виберемо $D_2, \overline{D}_2 \in L \setminus I_1$ такі, що $D_2 + FI_1$ і $\overline{D}_2 + FI_1$ лінійно незалежні над F в фактор-алгебрі FL/FI_1. Підалгебра M, породжена елементами $D_1, D_2, \overline{D}_2$ в алгебрі Лі L має ранг 2 над полем R і $\dim_{\mathbb{K}} M \geq 3$. Позначимо $J_1 = RD_1 \cap M$. Тоді J_1 – ідеал із M рангу 1 над полем R і $\dim_F FM/FJ_1 = 1$ за лемою 5 із роботи [3]. Останнє суперечить вибору елементів $D_2, \overline{D}_2$ і отримана суперечність показує, що $\dim_F FL/FI_1 = 1$.

Візьмемо довільну скінченно породжену (над $\mathbb{K}$) неабелеву підалгебру L_1 із L. Тоді L_1 нільпотентна і $\mathrm{rank}_R L_1 = 2$, ($\mathrm{rank} L_1 \neq 1$ бо L_1 неабелева за Лемою 3). Підалгебра FL_1 із FL скінченновимірна над F за Лемою 2.

Виберемо довільний елемент $D_2 \in L$ такий, що $D_2 \notin I_1$. Тоді $FL = FI_1 + FD_2$ за зауваженим вище. Розглянемо підалгебру $\overline{L}_1 = F\langle L_1, D_1, D_2\rangle$ в FL. Ясно, що $\overline{L}_1$ скінченновимірна над F і за Лемою 3

$$\overline{L}_1 = F\langle D_2, D_1, aD_1, \dots, a^s/s!D_1\rangle,$$

для деякого цілого числа $s > 0$ і елемента $a \in R$ такого, що $D_1(a) = 0$ і $D_2(a) = 1$.

Аналогічно розглянемо довільну іншу скінченновимірну підалгебру $\overline{L}_2$ з FL, яка містить елементи D_1, D_2. За Лемою 3 існує деякий елемент $b \in R$ такий, що $D_1(b) = 0$ і $D_2(b) = 1$ і натуральне число t таке, що

$$\overline{L}_2 = F\langle D_2, D_1, bD_1, \ldots, b^t/t!D_1\rangle.$$

Тоді $D_1(a-b) = 0$ і $D_2(a-b) = 0$, звідки випливає, що $a - b \in F$. Тому $b = a - \gamma$ для $\gamma \in F$ і

$$\overline{L}_2 = F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^t/t!D_1\rangle.$$

Це означає, що кожна неабелева скінченновимірна підалгебра із FL, яка містить D_1 і D_2, має вигляд

$$F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^k/k!D_1\rangle$$

для деякого цілого $k > 0$. Звідси випливає, що

$$FL = F\langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, a^k/k!, \ldots\rangle$$

і $D_1(a) = 0$, $D_2(a) = 1$.

Наслідок 1. *Нехай L – неабелева локально нільпотентна підалгебра рангу 2 над R із алгебри Лі диференціювань $W(A)$, яка є нескінченновимірною над своїм полем констант F. Тоді алгебра Лі FL ізоморфна алгебрі Лі $u_2(F)$ всіх трикутних диференціювань кільця многочленів $F[x, y]$.*

Доведення. З попередньої леми зразу маємо, що

$$FL = \langle D_2, D_1, aD_1, \ldots, \frac{a^k}{k!}D_1, \ldots\rangle,$$

де $[D_1, D_2] = 0$, $D_1(a) = 0$ і $D_2(a) = 1$. Тоді ізоморфізм $\varphi\colon L \to u_2(\mathbb{K})$ алгебр Лі можна задати за правилом: $\varphi(D_1) = \frac{\partial}{\partial x}$, $\varphi(D_2) = \frac{\partial}{\partial y}$, $\varphi(a) = y$.

Наслідок 2. *Якщо L – неабелева локально нільпотентна підалгебра з алгебри Лі диференціювань $W(A)$ рангу 2 над R і F – її поле констант, то алгебра Лі FL міститься в єдиній максимальній локально нільпотентній підалгебрі рангу 2 із $W(A)$.*

Список використаної літератури

1. *V.V. Bavula.* Lie algebras of triangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras// Izv. RAN. Ser. Mat. – 2013. – **77**, Issue 6. – P.3–44.
2. *S. Lie* Theorie der Transformationsgruppen// Leipzig.– 1893.–Vol. 3.
3. *Ie. O. Makedonskyi, A.P. Petravchuk.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations// Journal of Algebra.– 2014. – **401**. – P.245–257.
4. *A. Nowicki.* Polynomial Derivations and their Rings of Constants// Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun. – 1994.
5. *A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran and P.J. Olver.* Lie algebras of differential operators in two complex variables// Amer. J. Math. –1992.–**114**. – P.1163–1185.

Одержано 15.09.2016