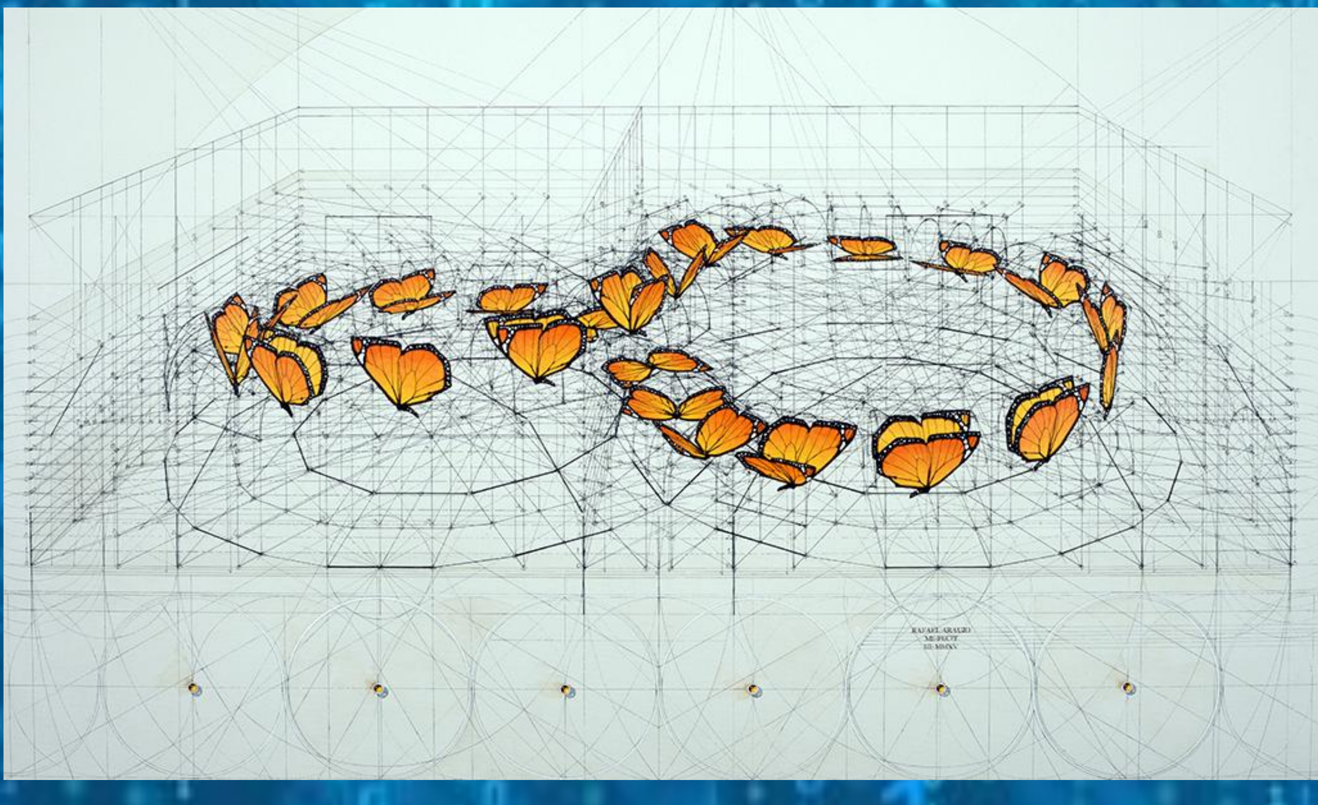
Кондрук Н. Е., Маляр М. М.,

Ніколенко В. В., Шаркаді М. М.

ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК



Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ “Ужгородський національний університет”
Математичний факультет

Кондрук Н. Е., Маляр М. М., Ніколенко В. В., Шаркаді М. М.

ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Ужгород – 2017

УДК 517(075.8)

Е 50

Елементи вищої математики: навч. посібник / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр, В.В. Ніколенко, М.М. Шаркаді. – Ужгород, Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. – 124 с.

Розглянуто розділи вищої математики, що входять до програми перших курсів вищих навчальних закладів нематематичних спеціальностей – лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення. Теоретичний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів і завдань для самостійної роботи. Посібник відповідає сучасним робочим та навчальним програмам з вищої математики.

Для студентів вищих навчальних закладів різних напрямів та спеціальностей, для яких «Вища математика» є непрофільною дисципліною, викладачів та всіх бажаючих самостійно вивчити даний курс.

Автори:
Н. Е. Кондрук, кандидат технічних наук, доцент;
М. М. Маляр, кандидат технічних наук, доцент;
В. В. Ніколенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
М. М. Шаркаді, кандидат економічних наук.

Рецензенти:
А. І. Моца, кандидат фізико-математичних наук, доцент;
В. Ф. Лазар, кандидат технічних наук, доцент.

Рекомендовано до друку:

Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (протокол № 8 від 22 червня 2017 р.).

Редакційно-видавничою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет » (протокол № 3 від 20 червня 2017 р.).

ISBN 978-617-7333-42-4

Зміст

ВСТУП

Багато хто часто задається питанням навіщо потрібно вчити математику? Нерідко сам факт того, що ця дисципліна входить до обов'язкової програми університетів, викликає в людей обурення та подив.

Математика – це фундаментальна наука, методи якої, активно застосовуються в багатьох природничих дисциплінах. Вона оперує абстрактними відношеннями та взаємозв'язками, тобто такими сутностями, які самі по собі не є чимось матеріальним. Але, варто тільки математиці вступити в область будь-якої науки про світ, вона відразу втілюється в описання, моделювання і прогнозування цілком конкретних і реальних природних процесів. Тут вона знаходить своє застосування, виходячи за межі ідеалізованих і відірваних від життя формул та підрахунків.

Математика представляє собою науку точну, що не терпить неоднозначних тлумачень і різних спекуляцій. Це втілення порядку і жорсткої логіки. Вона допомагає зрозуміти світ навколо нас та дізнатися більше про його закони.Тому у всі часи людство використовувало математику у практичних цілях.

Застосування математики відіграє важливу роль як у науковому, технічному, економічному розвитку суспільства, так і в розвитку окремої особистості. Ті, хто на високому рівні оволодівали математичним апаратом, завжди мали великий потенціал для реалізації своїх ідей і становили стратегічний ресурс нації. Математика задає стандарти логічно правильного, раціонального мислення на все життя. І на кінець, знання математики не дозволить вас ошукати!

Нинішній освітній процес в Україні орієнтований на творче та активне самонавчання кожного студента, яке враховує його потенціал та рівень базової підготовки. Такий напрямок розвитку вищої освіти передбачає наявність відповідного методичного забезпечення навчального процесу, включаючи розробку лекційного матеріалу та завдань для самопідготовки.

Навчальний посібник написано згідно діючих робочих програм загального курсу вищої математики багатьох спеціальностей, де вона не є профільним предметом. Враховуючи великий досвід викладання дисципліни «Вища математика» на географічному, економічному і хімічному факультетах ДВНЗ «УжНУ», колектив авторів намагався доступно викласти основний теоретичний матеріал різних розділів курсу та доповнив його розв’язаними типовими ілюстративними прикладами та задачами. В кінці кожного тематичного розділу наведено ряд завдань для самостійного розв’язання, деяка частина яких взята із загальновідомих підручників та посібників.

Даний посібник може бути використаний студентами нематематичних спеціальностей при вивчені курсу вищої математики, викладачами та всіма бажаючими.

I. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та визначники

Матриці. Типи матриць

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з m рядків і n стовбців: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Елементи з однаковими першими індексами утворюють рядки, з однаковими другими індексами – стовпці матриці.

Числа, що входять до складу матриці, називаються її елементами.

Матриці скорочено позначаються символами $A=\{a_{ij}\}$, або просто буквами $A, B, C, \dots$, або $A_1, A_2, \dots$, елементи матриці позначають як a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця. Матриці розміру $m \times n$ позначають символом $A_{m\times n}$.

Приклад 1.

Задамо матрицю розміром 2×4: $A_{2\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0{,}5 & \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$.

Тоді $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{23} = \sqrt{3}$, $a_{24} = 8$.

Дві матриці A і B одного розміру називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, для довільних $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Матриця $A_{m\times n}$ називається *квадратною*, якщо $n = m$; прямокутною, якщо $n \neq m$.

Матриця $A_{n\times1}$, що складається з одного стовпчика називається матрицею- стовпчиком, а $A_{1\times m}$ матрицею - рядком.

Порядком квадратної матриці називається число, що дорівнює кількості рядків(стовпчиків) цієї матриці.

Елементи матриці a_{ij} , в яких $i = j$ (тобто рівні індекси) називаються *діагональними.* Діагональні елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ квадратної матриці $A_{n\times n}$.

Матриця називається *діагональною*, якщо всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю дорівнюють нулю.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

Якщо всі елементи діагональної матриці n- го порядку дорівнюють одиниці, то матриця називається *одиничною* і позначається буквою Е.

Наприклад, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця третього порядку.

Матриця довільного розміру називається *нульовою*, якщо всі її елементи рівні нулю: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

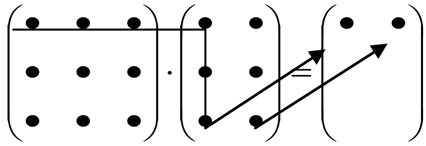
Операції над матрицями

1. *Добуток матриці на число.*
   Добутком матриці $A_{m\times n}$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = k \cdot A_{m\times n}$, елементи якої $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, для $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots n$.
   Наслідок. Спільний множник рядка (стовпчика) можна виносити за знак матриці.
   Наприклад,
   $\begin{pmatrix} 16 & 20 & 12 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 25 & 10 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$
   $= 100\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. *Додавання матриць.*
   Сумою двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ називається матриця $C_{m\times n}$ всі елементи якої знаходяться за *формулою:*
   $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
   Наприклад,
   $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *;* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, тоді $C = A + B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. *Віднімання матриць.*
   Різниця двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{m\times n}$ визначається через попередні операції:
   $$A_{m\times n} - B_{m\times n} = A_{m\times n} + (-1) \cdot B_{m\times n}.$$

4. *Добуток матриць.*
   Добутком матриці $A_{n\times k}$ на матрицю $B_{k\times m}$ називається така матриця $C_{n\times m} = A_{n\times k} \cdot B_{k\times m}$, кожний елемент якої c_{ij} , дорівнює сумі добутків елементів i –го рядка матриці $A_{n\times k}$ на відповідні елементи j –го стовпця матриці $B_{k\times m}$:
   $c_{ij} = a_{i1}b_{1j+}a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$.
   Зауважимо, що при множенні двох матриць $A_{n\times k}$ і $B_{k\times m}$ кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.

Тобто множення проводиться по схемі: 

Наприклад: $A_{3\times2} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

$$C_{3\times2} = \begin{pmatrix} -3\cdot3+1\cdot(-4) & -3\cdot1+1\cdot2 \\ 2\cdot3+4\cdot(-4) & 2\cdot1+4\cdot2 \\ 5\cdot3+0\cdot(-4) & 5\cdot1+0\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ -10 & 10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Наведемо деякі тотожності матричної алгебри:

1) $A + B = B + A$ (комутативний закон додавання);
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (асоціативний закон додавання);
3) $k(A + B) = k \cdot A + k \cdot B;\ k\epsilon R$;
4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
5) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
6) $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$;
7) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

В той же час для операції множення матриць, взагалі кажучи, комутативний закон не виконується:

1) $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2) З того, що $A \cdot B = 0$ не випливає, що $A = 0$ або $B = 0$.

5. *Цілий додатний степінь квадратної матриці.*

Цілим додатним степенем A^k $(k > 1)$ квадратної матриці A називається добуток k матриць, рівних A : $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{k-\text{раз}}$.

Наприклад:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

6. *Транспонування матриць.*

Матриця A^T називається транспонованою до матриці A, якщо елементи першого рядка матриці A^T, є елементами першого стовпця матриці A, елементи другого рядка- елементи другого стовпця і т.д.

$(A_{n\times m})^T = B_{m\times n}$ елементи $i-$го рядка матриці A є елементами $i-$го стовпця матриці B.

Наприклад:

$$A_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Властивості операції транспонування:

1) $(A^T)^T=A$;
2) $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$;
3) $(A+B)^T=A^T+B^T$;
4) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Визначники другого і третього порядків

Кожній квадратній матриці n-го порядку $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність число, яке отримуємо з елементів матриці A за відповідними формулами.

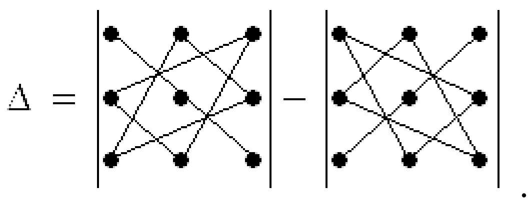
Визначник n-го порядку позначається $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

Визначником другого порядку $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ називається число, яке обчислюється за формулою: $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Визначником третього порядку називається число, що обчислюється за формулою:

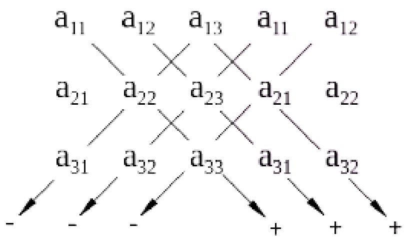
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Схематично порядок формування множників в доданках можна задати наступним чином:



Зліва схема формування доданків, поряд з якими ставиться знак «+», а справа – знак «-».

Обчислення визначника 3-го порядку можна проводити по схемі Саррюса, яке передбачає введення допоміжних стовпчиків, які дублюють 1 і 2 стовпчик визначника:



Приклад 2.

$$\left|\begin{matrix} -3 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{matrix}\right| = -3 \cdot 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 3 -$$
$$-\big(5 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot\ (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot (-3)\big) = 57.$$

Нехай задана квадратна матриця A $n -$ го порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається визначник матриці $(n-1)$-го порядку, який отримано з матриці A викреслюванням елементів i-го рядка та j-го стовпця.

Наприклад, мінором елемента a_{23} матриці A, що задає визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

є визначник другого порядку:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}.$$

Кожна матриця n-го порядку має n^2 мінорів $(n-1)$-го порядку.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n-го порядку називається мінор M_{ij} взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$ тобто:

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} відрізняється від мінора M_{ij} тільки знаком, коли $i + j$ – непарне число.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,

$M_{23} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -12.$

Теорема Лапласа. *Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпчика) на їх алгебраїчні доповнення.*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} a_{it}A_{it}.$$

Це розклад визначника Δ за елементами $i -$ го рядка; $i = 1; 2; \cdots n$.

$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}A_{tj} -$ розклад визначника за елементами $j -$ го стовпця $j = 1; 2; \cdots n$.

Визначник $n -$ го порядку визначається як число, що отримується з елементів матриці $n -$ го порядку за теоремою Лапласа.

Приклад 3.

Обчислити визначник, розклавши його за елементами другого рядка.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (-4)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -4[(36 + 0 + 5) - (8 + 0 - 6)] - 2[-9 + 8 + 0 — 2 - 30 + 0) =$$

$$= -4(41 - 2) - 2(-1 + 32) = -4 \cdot 39 - 2 \cdot 31 = -156 - 62 = -218.$$

Значення теореми Лапласа полягає в тому, що вона дозволяє обчислювати визначники довільного порядку, звівши їх до обчислення визначників менших порядків.

Наприклад, обчислення визначників $5 -$ го порядку можна звести до обчислення 5 визначників $4 -$ го порядку , або 20 визначників $3 -$ го порядку, або 60 визначників другого порядку.

Далі для зручності елементи матриці відповідного визначника будемо називати елементами визначника. Наприклад рядок визначника, елемент визначника і т.п.

Властивості визначників

1. Якщо у визначнику Δ один з рядків матриці (стовпців) складається тільки з нулів, то $\Delta = 0$.
2. Якщо у визначнику Δ є два однакові рядки (стовпці), то $\Delta = 0$.
3. Якщо у визначнику Δ елементи якогось рядка (стовпця) помножити на число K, то $\Delta_1 = K \cdot \Delta$.

   Наприклад, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14.$

   $\Delta_1 = -5 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -60 - 10 = -70 = -5 \cdot 14.$
4. При транспонованій матриці її визначник не змінюється $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

   $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14.$

   $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14.$
5. При перестановці місцями двох рядків (стовпців) у визначнику Δ знак визначника змінюється на протилежний

   $$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$
6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) пропорційні то $\Delta = 0$.
7. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), які попередньо помножені на одне й те саме число.

Властивості визначників дають можливість значно зменшити об’єм обчислень.

Приклад 4.

Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 & 0 \\ -7 & -12 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \\ 7 & -12 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 17 & 16 \\ -7 & -28 & -20 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ -28 & -20 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 4(17 \cdot 5 - 16 \cdot 7) = -108.$$

На першому кроці обчислення другий рядок першого визначника домножили на 2 і додали його до елементів третього рядка, утворивши елементи третього рядка другого визначника. Аналогічно, елементи 4-го рядка другого визначника утворені в результаті додавання елементів 4-го рядка з елементами 2-го рядка, які помножили на число (-3). В результаті отримали визначник, у 4-ому стовпчику якого є тільки один не нульовий елемент. Застосувавши до цього стовпчика теорему Лапласа, отримаємо третій визначник. Використовуючи перший стовпчик, як основний, аналогічно отримаємо четвертий визначник, в якому у першому рядку є тільки один не нульовий елемент.

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Матриці, визначник яких дорівнює нулю, називаються виродженими.

Теорема про існування оберненої матриці. *Для того що матриця А мала обернену необхідно і досить, щоб її визначник* $|A| \neq 0$.

Тобто, умовою існування оберненої матриці є її невиродженість.

Теорема про єдність оберненої матриці. *Якщо матриця має обернену, то вона єдина.*

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A можна знайти за допомогою формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $|A|$ – визначник матриці, A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij}.

Приклад 5.

Знайти матрицю, обернену до матриці $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$.

1. Перевіримо, чи матриця не є виродженою.

   $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} = 12 + 6 - (-10 - 9) = 18 + 19 = 37 \neq 0.$$

   $|A| \neq 0$, тому обернена матриця A^{-1} існує.
2. Транспонуємо матрицю A:

   $$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T і складаємо з них приєднану матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислюємо обернену матрицю за відповідною формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 11 & 9 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -16 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix}.$$

5. Переконаємося в правильності обчислень 1-4 за означенням оберненої матриці $A^{-1}A = AA^{-1} = E$:

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{37} & \frac{9}{37} & \frac{3}{37} \\ \frac{-5}{37} & \frac{6}{37} & \frac{2}{37} \\ \frac{1}{37} & \frac{-16}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обчислимо для прикладу тільки діагональні елементи одиничної матриці:

$$\frac{11}{37} \cdot 2 + \frac{9}{37} \cdot 1 + \frac{3}{37} \cdot 2 = \frac{37}{37} = 1;$$
$$-\frac{5}{37} \cdot (-3) + \frac{6}{37} \cdot 2 + \frac{2}{37} \cdot 5 = \frac{37}{37} = 1;$$
$$\frac{1}{37} \cdot 0 - \frac{16}{37} \cdot (-1) + \frac{7}{37} \cdot 3 = \frac{37}{37} = 1.$$

Якщо матриця A квадратна другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і визначник якої $|A| \neq 0$, то обернену матрицю можна знайти за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Приклад 6.

Знайти обернену матрицю до матриці $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0;$

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

1. Обчислити матриці:
   1) $D_1 = (AB)^T - C^2$;
   2) $D_2 = (AB + C)^T$;
   3) $D_3 = (3A \cdot (-2)B)(5C)$,де

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити матриці:
   1) $D_1 = (A^2 - 3E)^T + 4B^T$;
   2) $D_2 = A \cdot B - B \cdot A$;
   3) $D_3 = (A^T - B)^T - C \cdot A$,де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити матрицю:
   1) $A^2 \cdot 3B \cdot (-2C) - 5E$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ C = (3 \quad -5 \quad 0).$$

4. Обчислити визначник:
   1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$;
   2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;
   3) $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Знайти обернену матрицю до заданої матриці
   1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;
   2) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

6. При яких λ матриці не будуть мати обернених

$$D_1 = \begin{pmatrix} -3 & \lambda \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ D_2 = \begin{pmatrix} 2+\lambda & 3+3\lambda \\ 1-\lambda & 5 \end{pmatrix};\ D_3 = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

1.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Основні означення

Система m алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається *лінійною*, якщо вона може бути записана у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі, a_{ij} – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи (індекс i вказує номер рівняння, а j номер невідомого, при якому записаний цей коефіцієнт); b_k – дійсні числа, що називаються вільними членами.

Якщо $b_k = 0$ для усіх $k = 1,2, \ldots, n$, тоді систему називають *однорідною*, в іншому разі – *неоднорідною*.

Розв'язком системи (1) називається множина дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які при підстановці у систему замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоч один розв'язок і несумісною, якщо розв'язків у системі (1) немає.

Система рівнянь (1) називається *означеною*, якщо вона має тільки один розв'язок і неозначеною, якщо розв'язків більше ніж один.

Наприклад, система $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ 5x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ означена, система $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 = -8 \end{cases}$ – неозначена, а система $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -4 \\ -4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}$ несумісна.

Дві системи рівнянь називаються рівносильними або еквівалентними, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Таким чином, всі несумісні системи є еквівалентними (бо їх розв'язком є порожня множина).

Матричний розв'язок систем лінійних рівнянь

Запишемо систему лінійних рівнянь (1) в матричній формі. Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, або матриця системи; X – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів.

Згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць систему (1) можна записати так:

$$A \cdot X = B. \tag{2}$$

Далі будемо розглядати системи рівнянь в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. В цьому випадку матриця A буде квадратною і якщо $|A| \neq 0$, то систему (1) можна розв'язати матричним способом звівши її до матричного рівняння $A \cdot X = B$. Помноживши обидві частини рівняння на A^{-1} маємо:

$A^{-1}AX = A^{-1}B$;

$EX = A^{-1}B$;

$X = A^{-1}B$.

Приклад 7.

Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 \qquad + x_3 = -2. \end{cases}$$

Систему можна записати як матричне рівняння $A \cdot X = B$, де:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння задається формулою $X = A^{-1}B$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю A^{-1} по формулі $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$;

$$\Delta = \left|\begin{matrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{matrix} = 3 + 20 - (-5 + 8) = 20,$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 6 & -8 & 10 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{2}{20} & \frac{5}{20} \\ \frac{6}{20} & -\frac{8}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{5}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{5}{20} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{2}{20} & \frac{5}{20} \\ \frac{6}{20} & -\frac{8}{20} & \frac{10}{20} \\ \frac{5}{20} & \frac{10}{20} & -\frac{5}{20} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{20} & -\frac{2}{20} & -\frac{10}{20} \\ -\frac{24}{20} & -\frac{8}{20} & -\frac{20}{20} \\ -\frac{20}{20} & \frac{10}{10} & \frac{10}{20} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=-\frac{8}{20}$; $x_2=-\frac{52}{20}$; $x_3=0$.

Перевірка:

$$(-3)\left(-\frac{8}{20}\right)+2\left(-\frac{52}{20}\right)=-4;$$

$$4\left(-\frac{8}{20}\right)+\frac{52}{20}=1;$$

$$5\left(-\frac{8}{20}\right)=-2.$$

Правило Крамера

Швейцарський математик Крамер у XVIII столітті довів теорему, яка дозволяє знаходити розв’язки означених систем.

Теорема Крамера. *Якщо визначник* Δ *системи (1) відмінний від нуля, то система означена і її розв’язок знаходиться за формулою* $x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$*, де* Δ_i *визначник, який одержується з* Δ *заміною елементів i-го стовпчика стовпчиком вільних членів* $i=1,2,\dots,n$.

Приклад 8.

а) Розв’язати систему $\begin{cases} -3x_1+4x_2=-5; \\ 7x_1-5x_2=3, \end{cases}$ методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}=15-28=-13;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=13;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=26;$$

Відповідь: $x_1=\frac{13}{-13}=-1$; $x_2=\frac{26}{-13}=-2$.

Перевірка:

$(-3)(-1)+(-2)=-5;$

$7\cdot(-1)-5\cdot(-2)=3.$

б) Розв′язати систему $\begin{cases} 4x_1+3x_2-5x_3=1; \\ -5x_1+2x_2-x_3=3; \\ -3x_1-4x_2-2x_3=-10, \end{cases}$ методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \\ -3 & -4 \end{matrix}=-16+9+100-(30+16+30)=$$

$=-107-76=-183.$

Безпосереднім обчисленням маємо:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & -2 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ -5 & 3 & -1 \\ -3 & -10 & -2 \end{vmatrix}=-366;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & -10 \end{vmatrix}=-183.$$

За теоремою Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{-183}=0;\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-366}{-183}=2;\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-183}{-183}=1.$$

Метод Гаусса

Методами Крамера та оберненої матриці можна розв'язати деякі типи систем лінійних рівнянь. Не можна розв'язувати цими методами системи, в яких визначник систем дорівнює нулю, або кількість рівнянь не дорівнює кількості невідомих. Метод Гаусса позбавлений цих недоліків.

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення змінних: за допомогою елементарних перетворень: система рівнянь приводиться до рівносильної системи ступінчастого або трикутного вигляду.

Нехай задана система $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_{1,} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$ і $a_{11}\neq 0$ (якщо це не так, то цього можна досягнути перестановкою рівнянь).

1. Помножимо перше рівняння на числа $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$,…, $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ і додаємо отримані рівняння до другого, третього,…,$m-$ вого рівнянь систем *(1).* Виключимо змінну x_1, з усіх рівнянь, починаючи з другого. Отримаємо еквівалентну *(1)* систему лінійних рівнянь *(3):*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \dots \\ \qquad a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{in}a_n = b'_i, \\ \qquad \dots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{3}$$

Де $a'_i -$ нові коефіцієнти, які отримаємо в результаті описаних вище перетворень.

2. Далі, алгоритм описаний на 1-му кроці, застосовується до системи *(3)* з якої виключено перше рівняння і його місце займає друге рівняння. Продовжуючи процес послідовного виключення змінних, після (К-1)-го кроку отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \dots \\ \qquad a^{k-1}_{kk}x_k + \cdots + a^{k-1}_{nn}x_n = b^{k-1}_k, \\ \qquad \dots \\ \qquad 0 = b^{k-1}_{k+1}, \\ \qquad \dots \\ \qquad 0 = b^{k-1}_m. \end{cases} \tag{4}$$

Якщо в системі *(4)* $k=n$, то система звелась до трикутного вигляду і є означеною. В іншому разі система звелась до ступінчатого вигляду і є неозначеною.

Змінні $x_1, x_2, \cdots, x_r$ в системі (4) називаються базисними (основними), а $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ – вільними.

Якщо вільним змінним надати довільні значення $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$, то система (4) буде трикутною і базисні змінні можна знайти оберненим ходом Гаусса. Отриманий розв'язок $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \alpha_n)$ називається частинним розв'язком системи (1). Якщо система лінійних рівнянь (1) однорідна, то частинні розв'язки мають вид:

$$\overline{\alpha_1} = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \cdots, \alpha_r^1, 1{,}0, \cdots{,}0);$$
$$\overline{\alpha_2} = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \cdots, \alpha_r^2, 0{,}1, \cdots 0);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{\alpha_{n-r+1}} = (\alpha_1^{n-r-1}, \cdots, \alpha_2^{n-r-1}, 0, \cdots, 1);$$

і утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи (1). Це означає, що довільний розв'язок однорідної системи $\bar{b}$ може бути представлений у вигляді:

$$\bar{b} = k_1\overline{\alpha_1} + k_2\overline{\alpha_2}, \cdots + k_{n-r+1}\overline{\alpha_{k-r+1}}.$$

Довільний розв'язок $\bar{U}$ неоднорідної системи (1) може бути записаний у вигляді:

$\overline{U} = k_1\overline{\alpha_1} + k_2\overline{\alpha_2}, \cdots + k_{n-r+1}\overline{\alpha_{k-r+1}} + \overline{\alpha},$ де $\overline{\alpha_1}, \cdots, \overline{\alpha_{n-r+1}}$ – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи і $\overline{\alpha}$ – частинний розв'язок системи (1).

Частинний розв'язок, в якому всі вільні змінні рівні «0» називається *базисним*.

Приклад 9.

Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -4; \end{cases}$ методом Гауса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right);$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right); \end{array}$$

де x_1 x_2 – базисні змінні, x_3 x_4 x_5 – вільні змінні.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & & -x_3 & -x_4 & -x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right). \end{array}$$

Знайдемо частинний розв'язок $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$.
Нехай $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$. Система прийме вигляд:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -7 \end{array}\right). \end{array}$$

$5x_2 = -7 \quad x_2 = -\dfrac{7}{5};$

$x_1 = -3 - 2x_2 = -3 + 2 \cdot \dfrac{7}{5} = -3 + \dfrac{14}{5} = -\dfrac{1}{5};$

$\overline{\alpha} = \left(-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{7}{5}, 0,0,0\right).$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right),$$

Якщо $\overline{\alpha_1} = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, 1,0,0)$, тоді отримаємо систему: $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{array}\right). \end{array}$

Звідки:

$x_2 = \dfrac{4}{5}$;

$x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 2 \cdot \frac{4}{5} = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$;

Отже, $\overline{a_1} = \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 1{,}0{,}0\right)$.

Якщо $\overline{a_2} = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, 0{,}1{,}0)$, тоді отримаємо систему $\left(\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \\ -1 \\ 1 \end{matrix}\right)$.

Звідки:

$5x_2 = 1; \quad x_2 = \dfrac{1}{5}$;

$x_1 = -1 - 2; \;\; x_2 = -1 - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{7}{5}$;

Отже, $\overline{a_2} = \left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 0{,}1{,}0\right)$.

Якщо $\overline{a_3} = (\alpha_1^3, \alpha_2^3, 0{,}0{,}1)$, тоді отримаємо систему: $\left(\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right)$.

Звідки:

$5x_2 = 3; \quad x_2 = \frac{3}{5}$;

$x_1 = 2 - 2; \;\; x_2 = 2 - 2 \cdot \dfrac{3}{5} = 2 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{4}{5}$;

Отже, $\overline{a_3} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0{,}0{,}1\right)$.

$\overline{a_1}, \; \overline{a_2}, \; \overline{a_3}$ – фундаментальна система розв’язків;

$\bar{b} = k_1\overline{a_1} + k_2\overline{a_2} + k_3\overline{a_3} + \bar{a}$ загальний розв’язок системи.

В координатній формі загальний розв’язок можна записати у виді:

$$\bar{b} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}k_1 - \frac{7}{5}k_2 + \frac{4}{5}k_3;\; -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}k_1 + \frac{1}{5}k_2 + \frac{3}{5}k_3; k_1; k_2; k_2\right).$$

В деяких випадках розв’язок знаходять виражаючи базисні вектори через стовпець вільних членів безпосередньо розв’язуючи систему одним із методів розглянутих вище.

Наприклад, розв’яжемо систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 + 3x_3 - x_4 - 2x_5; \\ \qquad\; 5x_2 = -7 + 4x_3 + x_4 - 3x_5. \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5.$

За правилом Крамера:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} -3 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 & 2 \\ -7 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 & 5 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{1}{5}(-15 + 15x_3 - 5x_4 - 10x_5 + 14 - 8x_3 - 2x_4 + 6x_5) =$

$= -\dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}x_1 - \dfrac{7}{5}x_2 + \dfrac{4}{5}x_3.$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & -3 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \\ 0 & -7 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3.$$

В неозначених системах лінійних рівнянь, які звелися методом Гаусса до трикутного вигляду загальний розв'язок знаходиться оберненим ходом.

$$x_2 = -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5;$$

$$x_1 + 2\left(-\frac{7}{5} + \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5\right) = -3 + 3x_3 - x_4 - 2x_5;$$

$$x_1 = \left(\frac{14}{5} - 3\right) + \left(-\frac{8}{5} + 3\right)x_3 + \left(-\frac{2}{5} - 1\right)x_4 + \left(\frac{3}{5} - 2\right)x_5 =$$

$$= -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3.$$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

1) Наступні системи розв'язати методом Крамера та матричним способом:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

В наступних завданнях розв'язати СЛАР трьома методами: а) Крамера; б) Гауса; в) матричним способом:

2) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0; \\ x - 2y + z = 6; \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 7x - 5y = 31; \\ 4x + 11z = -43; \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x - 3y - z = -4; \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1; \\ 2x - 3y - z = 3; \\ x + y + 3z = -2. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x - 4y - 2z = -3; \\ 3x + y + z = 5; \\ 3x - 5y - 6z = -9. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x - y - 2z = 3; \\ x + 2y = 4; \\ 2y + z = 2. \end{cases}$

Знайти загальний розв'язок однорідних систем:

12) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0; \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad = 0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 \qquad - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

18) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0; \\ -x_1 \qquad - 3x_3 = 0. \end{cases}$

II. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Поняття n -вимірного векторного простору. Базис

n-вимірні вектори є безпосереднім узагальненям дво- і три- вимірних векторів, які розглядались в школі.

Система n чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$, взятих в певному порядку, називається n-вимірним вектором.

$x_1, x_2, \dots x_n$ – називають координатами вектора.

Два вектори $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ називаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні координати. Нульовим вектором називається вектор $\overline{o} = (0,0,\dots,0)$, всі координати якого дорівнюють нулю.

Дії над векторами

1) *Додавання векторів*.

Щоб додати два вектори потрібно додати їх відповідні координати.

Нехай $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, тоді

$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

2) *Множення вектора на число*.

Щоб помножити вектор $\overline{x}$ на число k потрібно кожну координату вектора помножити на це число, тобто $k\overline{x} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$

Множина R n-вимірних векторів називається лінійним n-вимірним простором, якщо:

1) Сумою двох будь-яких векторів $\overline{x}$ і $\overline{y}$ з R є деякий третій вектор $\overline{z}$ з R;
2) Добутком кожного вектора $\overline{x}$ з R на будь-яке число k є деякий вектор множини R.

Так, сукупність всіх n-вимірних векторів утворює n-вимірний векторний простір.

Нехай задано вектори $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, і $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Помножимо $\bar{x}$ на число $\alpha, \bar{y}$ на $\beta, \bar{z}$ на γ і додамо їх.

Вектор $\bar{p} = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1,\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2,\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3)$, що утворюється при цьому називається лінійною комбінацією векторів $\bar{x}, \bar{y}\ і\ \bar{z}$ і записується так: $\bar{p} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z}$.

Аналогічно визначається лінійна комбінація будь-якої скінченної кількості векторів.

Система n-вимірних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо її лінійна комбінація $\overline{p} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \dots + \alpha_n\overline{a_n}$ дорівнює нульовому вектору тільки у випадку, якщо всі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ –, перетворюються в нуль, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, і називається *лінійно залежною*, якщо принаймні одне із $\alpha_i \neq 0$.

Ці поняття можна визначити і так. Система *n*-вимірних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо принаймні один з векторів системи можна представити, як лінійну комбінацію решти векторів системи. Система *n*-вимірних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо жоден з векторів системи не є лінійною комбінацією решти векторів системи.

Зауважимо, що максимальна система лінійно незалежних *n*-мірних векторів складається з *n* векторів. Якщо до системи з *n* векторів приєднати принаймні один вектор, то ця система буде лінійно залежною.

Максимальна система лінійно незалежних векторів називається базисом лінійного n-вимірного простору.

Наприклад, одиничні вектори (довжина яких дорівнює одиниці) $\overline{e_1}(1,0,0)$, $\overline{e_2}(0,1,0)$, $\overline{e_3}(0,0,1)$ утворюють базис в просторі R^3. Будь-які вектори простору можна однозначно розкласти по базису. Коефіцієнти розкладу будуть визначати координати вектора в даному базисі.

Приклад 1.

Довести, що вектори $\overline{a_1}(-1;3;5)$, $\overline{a_2}(3;1;3)$, $\overline{a_3}(5;3;1)$ утворюють базис та розкласти вектор $\bar{b}(1,2,-3)$ по цьому базису.

Складемо лінійну комбінацію векторів і прирівняємо її до нуля:

$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3} = \bar{0}$.

$$\begin{array}{rl} & \alpha_1 \overline{a_1}(-\alpha_1; 3\alpha_1; 5\alpha_1) \\ + & \alpha_2 \overline{a_2}(3\alpha_2; 1\alpha_2; 3\alpha_2) \\ & \alpha_3 \overline{a_3}(5\alpha_3; 3\alpha_3; -\alpha_3) \\ \hline & \quad \bar{0}\,(\;0;\;\;0;\;\;0\;). \end{array}$$

Отримаємо систему: $\begin{cases} -\overline{a_1} + 3\overline{a_2} + 5\overline{a_3} = 0; \\ 3\overline{a_1} + \overline{a_2} + 3\overline{a_3} = 0; \\ 5\overline{a_1} + 3\overline{a_2} - \overline{a_3} = 0. \end{cases}$

Так як $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 84 \neq 0$, то за правилом Крамера система має один нульовий розв'язок (бо є однорідною) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. А отже, система векторів $\overline{a_1}; \overline{a_2}; \overline{a_3}$ – лінійно-незалежна і утворює базис.

Розкладемо вектор $\bar{b}$ у цьом базисі, тобто запишемо його у вигляді: $\bar{b} = x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + x_3\overline{a_3}$.

$$
\begin{array}{r}
x_1\overline{a_1}(-x_1;3x_1;5x_1);\\
+\ x_2\overline{a_2}(3x_2;1x_2;3x_2);\\
x_3\overline{a_3}(5x_3;3x_3;-x_3);\\
\hline
\bar{b}\ (1;2;-3).
\end{array}
$$

Одержимо систему: $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \end{cases}$ розв'язавши яку за правилом Крамера ($\Delta = 84; \Delta_1 = 14, \Delta_2 = -84, \Delta_3 = 70$), отримаємо розв'язок:

$x_1 = \frac{1}{6}; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = \frac{5}{7}$.

Відповідь: $\bar{b} = \frac{1}{6}\overline{a_1} - \overline{a_2} + \frac{5}{7}\overline{a_3}$.

2.2. Елементи векторної алгебри

Основні формули

Нагадаємо відомі факти із алгебри та початків аналізу з середньої школи.

Одиничним вектором ненульового вектора $\bar{a}$ називається вектор, співнапрямлений з вектором $\bar{a}$, довжина якого дорівнює одиниці.

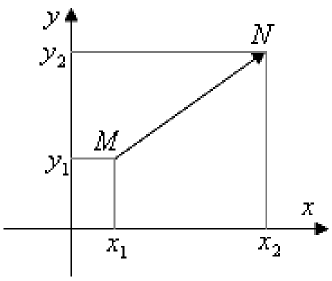
Одиничні вектори позначають: $\overline{a_0}$ – одиничний вектор вектора $\bar{a}$, $\overline{a_0}$; $\bar{e}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$,…. Їх називають ще ортами.

$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – довжина вектора, або модуль вектора $\bar{a}$.

Знайдемо координати одиничного вектора $\overline{a_0}$, вектора $\bar{a}$,:

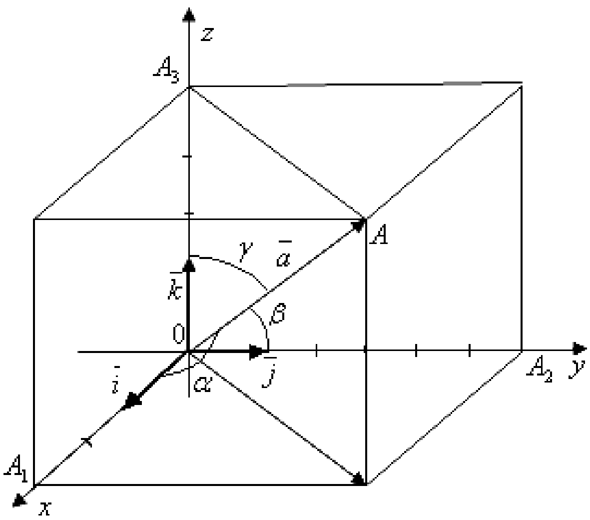
$$\overline{a_0} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{j}, \text{ отже}$$

$$\overline{a_0} = \left(\frac{x}{|\bar{a}|}; \frac{y}{|\bar{a}|} \right).$$



Нехай нам дано точки $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$, тоді координати вектора $\overline{MN}$ будуть $\overline{MN}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, а його довжина знаходиться за формулою:

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Розглянемо вектор $\bar{a}$, початок, якого співпадає з початком просторової системи координат. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – одиничні вектори, співнапрямлені з осями координат.

Позначимо координати вектора $\bar{a}$ $\bar{a}(x; y; z) = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

За аналогією з двомірними векторами, одержимо:

$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина вектора; $\overline{a_0}\left(\dfrac{x}{|\overline{a}|};\dfrac{y}{|\overline{a}|};\dfrac{z}{|\overline{a}|}\right)$.

Два ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній чи паралельних прямих.

Нехай нам дано два колінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$: $\overline{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\overline{b}(x_2;y_2;z_2)$. Тоді умовою колінеарності цих векторів є пропорційність їх координат.

Тобто, $\overline{a}\parallel\overline{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}=k$.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добуток двох ненульових векторів – це число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто:

$\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\left(\overline{a}\,\hat{;}\,\overline{b}\right)$; якщо $\left(\overline{a}\,\hat{;}\,\overline{b}\right)=\varphi$, або $\overline{a}\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$.

Властивості скалярного добутку:

1) $\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{a}$,
2) $(k\overline{a})\overline{b}=\overline{a}\cdot k\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot k$,
3) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\overline{c}+\overline{b}\overline{c}$,
4) $\overline{a}\overline{b}=0$, тоді і тільки тоді, якщо $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Нехай дано, що $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$ і $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$.

Доведемо, що $\overline{a}\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, тобто, що скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.

$$\overline{a}\overline{b}=(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k})(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k})=x_1x_2\overline{i}^2+y_1y_2\overline{j}\overline{i}+z_1x_2\overline{k}\overline{i}+x_1y_2\overline{i}\overline{j}+$$
$$+y_1y\ \overline{j}^2+z_1y_2\overline{k}\overline{j}+x_1z_2\overline{i}\overline{k}+y_1z_2\overline{j}\overline{k}+z_1z_2\overline{k}^2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

так як $\overline{i}\perp\overline{j}$, $\overline{i}\perp\overline{k}$ і $\overline{k}\perp\overline{j}$ і $\overline{i}\overline{j}=0$, $\overline{k}\overline{j}=0$, $\overline{i}\overline{k}=0$, $\overline{i}^2=|\overline{i}|^2=1$, $\overline{j}^2=|\overline{j}|^2=1$, $\overline{k}^2=|\overline{k}|^2=1$.

Таким чином доведено, що $\overline{a}\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Приклад 2.

Нехай дано, що $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 3$ і $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знайти:

a) $\overline{a}\overline{b}$;

b) $(2\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}-3\overline{a})$;

c) $|2\overline{a}+\overline{b}|$.

Розв'язання:

a)

$$\overline{a}\overline{b} = 2\cdot 3\cos\frac{2\pi}{3} = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

b)

$$(2\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}-3\overline{a}) = 2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2-6\overline{a}^2-3\overline{b}\overline{a} =$$

$$= -\overline{a}\overline{b}+|\overline{b}|^2-6|\overline{a}|^2 = 3+3^2-6-4 = 3+9-24 = -12,$$

c)

$$|2\overline{a}+\overline{b}| = \left(2\overline{a}+\overline{b}\right)^2 = 4\overline{a}^2+4\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^2 = 4|\overline{a}|^2+4|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi+|\overline{b}|^2 =$$

$$= 4\cdot 4+4\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3 = 13.$$

Приклад 3.

Дано вектори $\overline{a}(2;-3;4)$, $\overline{b}(-3;4;5)$. Знайти:

a) $\overline{a}\overline{b}$;

b) $(2\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}-3\overline{a})$;

c) $|(2\overline{a}+\overline{b})|$.

Розв'язання:

a) $\overline{a}\overline{b} = -6-12+20 = 2$;

b) $(2\overline{a}+\overline{b}) = \overline{m}$, $(\overline{b}-3\overline{a}) = \overline{n}$

$$+\begin{array}{l} 2\cdot\overline{a}(4;-6;8) \\ \overline{b}(-3;4;5) \\ \hline \overline{m}(1;-2;13)\,; \end{array} \qquad -\begin{array}{l} \overline{b}(-3;4;5) \\ 3\cdot\overline{a}(6;-9;12) \\ \hline \overline{n}(-9;13;-7)\,; \end{array}$$

Отже, $\overline{m}\overline{n} = -9-26-91 = -126$.

c) $|\overline{m}| = \sqrt{1+4+169} = \sqrt{174}$.

Приклад 4.

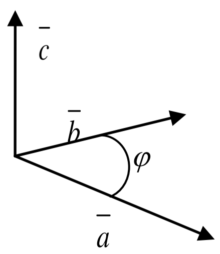
Дано $\bar{a}(2;-3;4)$. Знайти одиничний вектор вектора $\bar{a}$ (орт $\bar{a}$).

Розв’язання:

Позначимо одиничний вектор вектора $\bar{a}$, як $\overline{a_0}$.

$\overline{a_0} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \frac{x}{|\bar{a}|}\bar{i} + \frac{y}{|\bar{a}|}\bar{j} + \frac{z}{|\bar{a}|}\bar{k}$, тоді $|\bar{a}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, а $\overline{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{29}};\frac{-3}{\sqrt{29}};\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$.

Векторний добуток двох векторів



Вектор $\bar{c}$ називається *векторним добутком* двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо він задовільняє умови:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$; $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi = S$, де $\varphi = \left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$;

3) З кінця $\bar{c}$ має бути видно найближчий поворот від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ проти ходу годинникової стрілки.

Властивості векторного добутку:

1. $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$.
2. Якщо $\bar{a}\times\bar{b} = 0$, то $\bar{a} \parallel \bar{b}$ (бо $\sin 0^\circ = 0$) і навпаки, якщо $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a}\times\bar{b} = 0$.
3. $\alpha\bar{a}\times\bar{b} = \alpha(\bar{a}\times\bar{b})$.
4. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}$.

Множення ортів

$\bar{i}\times\bar{i} = 0$, $\bar{j}\times\bar{j} = 0$, $\bar{k}\times\bar{k} = 0$, $\bar{i}\times\bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}$, $\bar{i}\times\bar{k} = -\bar{j}$.

Доведемо, що векторний добуток $\bar{a}\times\bar{b}$, можна обчислити за формулою:

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k},$$ де $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\bar b = (x_2, y_2, z_2)$.

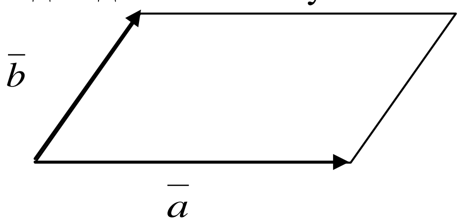
Для цього перемножимо $\bar a\times\bar b=(x_1\bar i+y_1\bar j+z_1\bar k)\times(x_2\bar i+y_2\bar j+z_2\bar k)=$

$$= x_1x_2\,\bar i\times\bar i+y_1x_2\,\bar j\times\bar i+z_1x_2\,\bar k\times\bar i+x_1y_2\,\bar i\times\bar j+y_1y_2\,\bar j\times\bar j+z_1y_2\,\bar k\times\bar j+x_1z_2\,\bar i\times\bar k+$$

$$+y_1z_2\,\bar j\times\bar k+z_1z_2\,\bar k\times\bar k=-x_2y_1\,\bar k+z_1x_2\,\bar j+x_1y_2\,\bar k-z_1y_2\,\bar i-x_1z_2\,\bar j+y_1z_2\,\bar i=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\bar i+(z_1x_2-x_1z_2)\bar j+(x_1y_2-x_2y_1)\bar k=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar i-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar j+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar k.$$

Під паралелограмом побудованим на векторах $\bar a$ і $\bar b$ будемо розуміти такий паралелограм, на двох суміжних сторонах якого лежать вектори $\bar a$ і $\bar b$ зведені до одного початку.



Приклад 5.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar a$ і $\bar b$, якщо $\bar a = 2\bar p+3\bar r$, $\bar b = 3\bar p-\bar r$, де $|\bar p| = 3$, $|\bar r| = 4$, кут між векторами $\bar p$ і $\bar r$ дорівнює π/3.

Розв'язання:

Як відомо, площа паралелограма S= $|\bar a\times\bar b|$ = $|\bar a||\bar b|\,sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\bar a$ і $\bar b$.

Знаходимо: $\bar a\times\bar b=(2\bar p+3\bar r)\times(3\bar p-\bar r)=2\bar p\times3\bar p+3\bar r\times3\bar p-2\bar p\times\bar r-3\bar r\times\bar r=$

$$=0+9\bar r\times\bar p+2\bar r\times\bar p-0=11\bar r\times\bar p;$$

$$|\bar a\times\bar b| = 11|\bar r\times\bar p| = 11|\bar r||\bar p|\sin\left(\widehat{\bar p,\bar r}\right) = 11\cdot4\cdot3\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 66\sqrt3.$$

Приклад 6.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar a$ і $\bar b$, якщо $\bar a = 2\bar p+3\bar r$, $\bar b = 3\bar p-\bar r$, де $\bar p = 2\bar i-3\bar j+\bar k$, $\bar r = 3\bar i+2\bar j-3\bar k$.

Розв'язання:

Площа паралелограма S= $|\bar a\times\bar b|$.

$$
\begin{array}{ll}
+\begin{array}{l} 2\bar{p} = (4,\ -6,\ 2) \\ \underline{3\bar{r} = (9,\ 6,\ -9)} \end{array} & -\begin{array}{l} 3\bar{p} = (6,\ -9,\ 3\ ) \\ \underline{\bar{r} = (3,\ 2,\ -3)} \end{array} \\
\quad \bar{a} = (13,\ 0,\ -7); & \quad \bar{b} = (3,\ -11,\ 6);
\end{array}
$$

$$
\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 13 & 0 & -7 \\ 3 & -11 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ -11 & 6 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 13 & 0 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}\bar{k} = 77\bar{i} - 99\bar{j} - 143\bar{k} =
$$

$=11\ (\ 7\bar{i} - 9\bar{j} - 13\bar{k}\ );$

$S = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = 11\sqrt{49+81+169} = 11\sqrt{299}.$

Приклад 7.

Знайти орт $\bar{a}_0$ вектора $\bar{a}$, перпендикулярного до векторів $\bar{b} = (2, -3,4\ )$ і $\bar{c} = (3, -1, 2)$, якщо $\left|\bar{a}\right| = 12$.

Розв'язання:

І спосіб.

Якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$; $\bar{a} \perp \bar{c}$ то $\begin{cases} \bar{a}\bar{b} = 0, \\ \bar{a}\bar{c} = 0, \\ \left|\bar{a}\right| = 12. \end{cases}$

Нехай $\bar{a} = (x, y, z)$. Тоді $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0, \\ 3x - y + 2z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 144. \end{cases}$

Розв'язавши дану систему, отримаємо: $x = \mp\dfrac{24}{\sqrt{117}}$, $y = \pm\dfrac{96}{\sqrt{117}}$, $z = \pm\dfrac{84}{\sqrt{117}}$.

Отже, $\bar{a} = (\mp\dfrac{24}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{96}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{84}{\sqrt{117}});$

Так як $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$, то $\bar{a}_0 = (\mp\dfrac{2}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{8}{\sqrt{117}}, \pm\dfrac{7}{\sqrt{117}}).$

II спосіб.

Знайдемо векторний добуток $\bar{b}\times\bar{c}$:

$$\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\bar{i}+8\bar{j}+7\bar{k}.$$

Позначимо $\bar{a}_1=(-2,8,7)$, $\bar{a}=(x,y,z)$. З того, що $\bar{a}_1\|\bar{a}$ випливає: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{7}=k$.

З останньої рівності: $x=-2k$, $y=8k$, $z=7k$.

Оскільки $|\bar{a}|=12$, то $4k^2+64k^2+49k^2=144$. Звідси $k=\pm\dfrac{12}{\sqrt{117}}$.

$\bar{a}=(\mp\dfrac{24}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{96}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{84}{\sqrt{117}})$. Отже, $\bar{a}_0=(\mp\dfrac{2}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{8}{\sqrt{117}},\pm\dfrac{7}{\sqrt{117}})$.

Приклад 8.

Відомі координати вершин трикутника *ABC*: *A= (–2, 3, 4), B= (1, –3, 1), C= (2, –1, 0)*. Знайти площу трикутника і довжину висоти h_B , опущеної з вершини *B*.

Розв’язання:

Площа трикутника АВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$.

$\overline{AB}=(3,-6,-3)$; $\overline{AC}=(4,-4,-4)$.

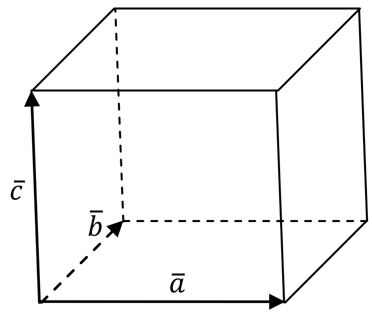
$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -6 & -3\\ 4 & -4 & -4\end{vmatrix}=12(\bar{i}+0\cdot\bar{j}+\bar{k});$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}12\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$$

З іншого боку $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AC}\right|h_B$,

$\left|\overline{AC}\right|=4\sqrt{3}$, тоді $h_B=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overline{AC}\right|}=\dfrac{12\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

Мішаний (змішаний) добуток векторів



Мішаним добутком трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число, яке визначається як скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток $\bar{b}\times\bar{c}$, і позначається $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}$.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині.

Модуль мішаного добутку трьох некомпланарних векторів $\overline{abc}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, зведених до спільного початку: $V=\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$, а об'єм тетраедра, побудованого на некомпланарних векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, визначається формулою: $V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right|$.

Доведемо, що $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, де елементи рядків є координатами відповідно векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

Знайдемо $\bar{b}\times\bar{c}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\bar{k}$;

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Умова компланарності трьох векторів: три вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, якщо їх мішаний добуток рівний нулю, тобто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$.

Приклад 9.

Знайти об'єм тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ і висоту, опущену з вершини A_4, якщо $A_1=(1,-2,3)$, $A_2=(3,4,5)$, $A_3=(0,-1,2)$, $A_4=(5,2,1)$.

Розв'язання:

Побудуємо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ наступним чином:

$\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (2,6,2)$; $\bar{b} = \overline{A_1A_3} = (-1,1,-1)$; $\bar{c} = \overline{A_1A_4} = (4,4,-2)$.

Використовуючи геометричний зміст змішаного добутку, отримаємо:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \pm\frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \pm\frac{8}{3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \text{ (куб. одиниць).}$$

З іншого боку: $V = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} h_{A_4}$.

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|;$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8(-\bar{i}+\bar{k});$$

Отже, $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (од. ^{2}).

Звідси $h_{A_4} = \frac{3V}{S_{\Delta A_1A_2A_3}} = \frac{3\cdot 8}{4\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (од.).

Приклад 10.

Довести або спростувати, що чотирикутник *ABCD* є плоским, якщо *A(2,4,–5), B(–6,–12,3), C(1,2,5), D(–4,–8,9).*

Доведення:

Якщо чотири точки лежать в одній площині, то вектори $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ мають бути компланарними, тобто $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 0$.

$\overline{AB} = (-8,-16,8)$, $\overline{AC} = (-1,-2,10)$, $\overline{AD} = (-6,-12,14)$. Знаходимо:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -8 & -16 & 8 \\ -1 & -2 & 10 \\ -6 & -12 & 14 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 10 \\ -3 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, чотирикутник плоский.

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

В задачах 1 – 5 знайти: $|\bar{a}|$; $|\bar{b}|$; $\bar{a}\cdot\bar{b}$; $\bar{a}\times\bar{b}$; $(\bar{a}+3\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$; $(2\bar{a}-\bar{b})\times(4\bar{a}+3\bar{b})$, якщо

1. $\bar{a}\,(2;1;-2)$; $\bar{b}\,(3;0;-1)$;
2. $\bar{a}\,(5;-1;0)$; $\bar{b}\,(0;-1;3)$;
3. $\bar{a}\,(5;-2;-1)$; $\bar{b}\,(-3;-2;-1)$;
4. $\bar{a}\,(-1;2;0)$; $\bar{b}\,(0;-1;2)$;
5. $\bar{a}\,(2;-1;3)$; $\bar{b}\,(-1;0;4)$.

В задачах 6-8 серед векторів знайти базис.

6. $\overline{a_1}\,(2;-1;3)$; $\overline{a_2}\,(1;0;-2)$; $\overline{a_3}\,(3;-1;1)$; $\overline{a_4}\,(0;2;1)$.
7. $\overline{a_1}\,(-1;3;-2)$; $\overline{a_2}\,(1;-1;2)$; $\overline{a_3}\,(0;2;0)$; $\overline{a_4}\,(2;1;3)$.
8. $\overline{a_1}\,(-3;2;0;1)$; $\overline{a_2}\,(1;1;-2;2)$; $\overline{a_3}\,(-2;3;-2;3)$; $\overline{a_4}\,(5;1;0;2)$; $\overline{a_5}\,(0;2;1;1)$.

В задачах 9-11 розкласти вектор $\bar{b}$ по базису $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$.

9. $\bar{b}\,(6;-1;-2)$; $\overline{a_1}\,(3;0;-1)$; $\overline{a_2}\,(1;-2;1)$; $\overline{a_3}\,(2;1;-2)$.
10. $\bar{b}\,(-1;6;3)$; $\overline{a_1}\,(1;3;1)$; $\overline{a_2}\,(-2;3;2)$; $\overline{a_3}\,(-1;2;1)$.
11. $\bar{b}\,(-2;4;3)$; $\overline{a_1}\,(3;2;1)$; $\overline{a_2}\,(-1;2;1)$; $\overline{a_3}\,(-1;2;2)$.

12. Знайти вектор $\bar{a}=(x,y,z)$, якщо відомі дві його координати $y=2$, $z=-3$ та довжина $|\bar{a}|=\sqrt{38}$.
13. Задано вектори $\bar{a}=(3,-5,8)$ і $\bar{b}=(-1,-1,-4)$. Знайти $|\bar{a}+\bar{b}|$ і $|\bar{a}-\bar{b}|$.
14. Знайти кут між діагоналями паралелограма побудованого на векторах $\bar{a},=(2,1,0)$ та $\bar{b}=(0,-2,1)$.
15. Знайти вектор $\bar{b}$ колінеарний вектору $\bar{a}=(2,1,-1)$, що задовольняє умові $\bar{a}\cdot\bar{b}=12$.
16. Задано вектори $\overline{a_1}=(3,-1,2)$ і $\overline{a_2}=(1,2,-1)$. Знайти координати векторів: а) $\overline{a_1}\times\overline{a_2}$; б) $(2\overline{a_1}+\overline{a_2})\times\overline{a_2}$.
17. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$.
18. У трикутнику з вершинами $A(1,-1,-2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$ знайти висоту $h=|\overrightarrow{BD}|$.
19. Визначити значення α і β, при яких вектор $\alpha\bar{\imath}+3\bar{\jmath}+\beta\bar{k}$,буде колінеарним вектору $\bar{a}\times\bar{b}$, якщо $\bar{a}=(3,-1,1)$, $\bar{b}=(1,2,0)$.
20. Задано вектори $\overline{a_1}=(1,-1,3)$, $\overline{a_2}=(-2,2,1)$, $\overline{a_3}=(3,-2,5)$. Обчислити $\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}$.

В задачах 21-22 знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

21. а) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + 3\bar{k}$, $3\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + 2\bar{k}$;

22. б) $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 8\bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - 6\bar{k}$, $\bar{c} = 5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}$.

23. Знайти висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = \bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + \bar{k}$, $\bar{b} = 4\bar{\imath} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} - \bar{k}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

24. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках $\mathrm{A}(2, -3,\ 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$, $D(3, 2, 4)$.

25. У тетраедрі з вершинами в точках $\mathrm{A}(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$, $D(3\ , 4, -3)$ обчислити висоту опущену з вершини D.

26. Перевірити, чи компланарні вектори:

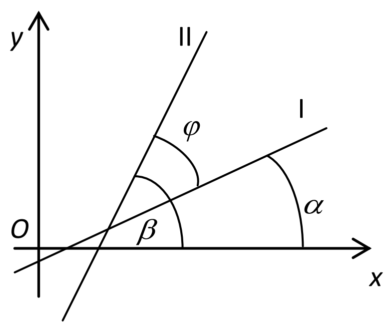
$\bar{a} = -2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = 14\bar{\imath} - 13\bar{\jmath} + 7\bar{k}$.

III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1. Пряма на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності прямих

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд: $y = kx + b$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, $k = tg\alpha$. α -це кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Ох, а b – це відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.



Якщо $b = 0$, то пряма проходить через початок координат ($y = kx$).

Знайдемо кут між двома прямими, які задані своїми рівняннями $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, де $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\beta$.

Позначимо через φ кут між прямими $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$.

Тоді $tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha tg\beta}$ або $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти рівні $(k_1 = k_2)$.

Дві прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти обернені по величині і протилежні по знаку ($1 + k_1k_2$=0).

Загальне рівняння прямої

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A, B)$. Позначимо через $M(x, y)$ довільну точку прямої.

Вектор $\overline{M_0M}$ матиме координати: $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Вектор $\overline{n} = (A, B)$ перпендикулярний вектору $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, отже скалярний добуток $\overline{n} \cdot \overline{M_0M}$ =0. З останньої рівності отримаємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$
$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

Позначивши C= $-Ax_0 - By_0$, отримаємо загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$.

Причому $k = -\dfrac{A}{B}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Рівняння жмутка (пучка) прямих

Нехай маємо точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка шуканої прямої.

Розглянемо вектори $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ і $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Дані вектори колінеарні. З умови колінеарності отримаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

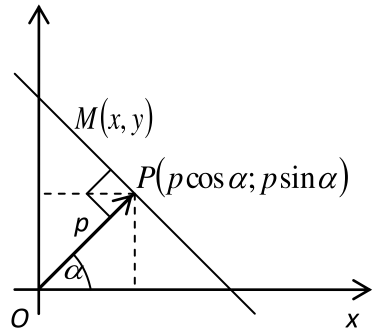
Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k . Використаємо попереднє рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Врахувавши, що $k = -\dfrac{A}{B}$ одержимо:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Останнє рівняння є рівнянням жмутка прямих.

Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Знайдемо рівняння прямої, якщо відомо довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму, і величину кута α, який утворює цей перпендикуляр з додатнім напрямом осі Ox.



Нехай p – довжина перпендикуляра OP, $M(x, y)$ – довільна (біжуча) точка шуканої прямої, P($p\cos\alpha, p\sin\alpha$)- основа перпендикуляра.

Розглянемо вектори $\overline{OP}$ = ($p\cos\alpha, p\sin\alpha$) і $\overline{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$.

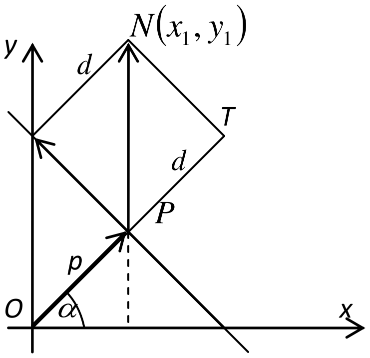
Ці вектори перпендикулярні, отже $\overline{OP} \cdot \overline{PM} = 0$. Звідси отримаємо:

$$p\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha(y - p\sin\alpha) = 0;$$

$x\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y\sin\alpha - p\sin^2\alpha = 0$;

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0$;

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$– нормальне рівняння прямої.



Нехай нам потрібно знайти відстань від точки $N(x_1, y_1)$ до прямої, заданої своїм рівнянням.

З рисунка видно, що відстань від $N(x_1, y_1)$ до прямої рівна $d = |PT|$, де $PT = |\ np_{\overline{op}}\ \overline{PN}\ |$.

$\overline{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$,

$\overline{PN} = (x_1 - p\cos\alpha, y_1 - p\sin\alpha)$.

$np_{\overline{op}}\ \overline{PN} = \dfrac{\overline{OP} \cdot \overline{PN}}{|\overline{OP}|}$.

Знайдемо скалярний добуток:

$\overline{OP} \cdot \overline{PN} = p\cos\alpha(x_1 - p\cos\alpha) + p\sin\alpha(y_1 - p\sin\alpha) =$

$= p(x_1\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y_1\sin\alpha - p\sin^2\alpha) =$

$= p(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p)$.

Тоді $d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|$ - відстань від точки $N(x_1, y_1)$ до прямої.

Якщо відомо загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$, то нормальне рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.

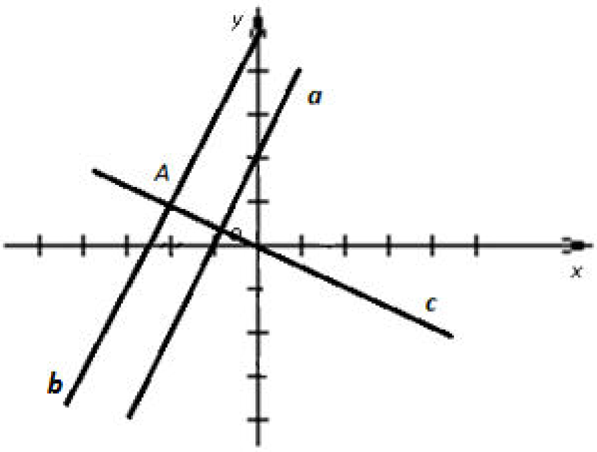
Знак перед коренем має бути протилежний знаку вільного члена C, а відстань від точки $N(x_1, y_1)$ до прямої обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 1.

Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(-2;1)$ паралельно та перпендикулярно до прямої a: $2x - y + 2 = 0$. Побудувати прямі.

Розв'язання:



Знайдемо кутовий коефіцієнт $k_a = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$.

Позначимо пряму b паралельну до a, а пряму c перпендикулярну до a. Тоді $k_b = k_a = 2$;

$k_c = -\frac{1}{k_a} = -\frac{1}{2}$.

Використаємо рівняння жмутка: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Тоді для прямої b:

$y - 1 = 2(x - 2)$;

$y - 1 = 2x + 4$;

$y - 2x - 1 - 4 = 0$;

$b: 2x - y + 5 = 0$.

Побудуємо пряму b.

Для цього запишемо для неї рівняння прямої у відрізках:

$2x - y = -5| : (-5)$,

$$\frac{2x}{-5} - \frac{y}{-5} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{-5}{2}} + \frac{y}{5} = 1.$$

Отже, величина відрізку, що відтинає пряма b від осі Ox рівна $-\frac{5}{2}$; а від осі Oy – *5*.

Для прямої c запишемо рівняння жмутка:

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)| \cdot (2)$;

$2y - 2 = -x - 2$;

$x + 2y - 2 + 2 = 0$;

$c: x + 2y = 0$.

Для побудови даної прямої не можна використати рівняння у відрізках, бо у її загальному рівнянні відсутній вільний член. Тому скористаємось табличним способом:

x	0	-2
y	0	1

Побудуємо пряму $a: 2x - y + 2 = 0$.

Скористаємось рівнянням у відрізках:

$$2x - y = 2| : (-2);$$

$$\frac{2x}{-2} - \frac{y}{-2} = 1;$$

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1.$$

Отже, величина відрізка, що відтинає пряма *a* від осі Ox – *-1*, а від осі Oy – *2*.

Приклад 2.

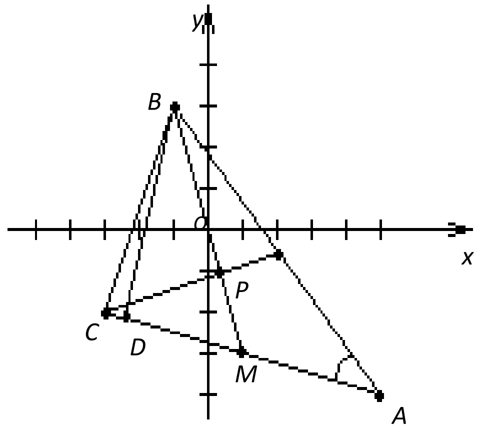
Задача на трикутник

Відомі вершини трикутника *A(5;–4), B(–1;3), C(–3;–2)*. Знайти довжину сторони *AB*, рівняння сторони *AB*, довжину медіани *BM* та її рівняння, величину кута *BAC*, довжину висоти *BD* та її рівняння, координати точки *P* перетину медіан трикутника, площу трикутника *ABC*.

Розв'язання:

Довжина сторони *AB* обчислюється за формулою:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Підставивши задані в умові задачі значення, отримаємо:

$$|AB| = \sqrt{(-1-5)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{85}.$$

Для знаходження рівняння прямої AB скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Отримаємо: $\dfrac{x-5}{-1-5} = \dfrac{y+4}{3+4}$ або

AB: $7x + 6y - 11 = 0$.

Позначимо середину сторони AC через $M(x_M; y_M)$.

Знайдемо координати точки M – середини сторони CA:

$$x_M = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1;$$

$$y_M = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

Тоді, $|BM| = \sqrt{(-3+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40}$ – довжина медіани BM.

Рівняння медіани BM знайдиться аналогічно. Одержимо BM: $y = -3x$.

Для того, щоб знайти кут $\angle$BAC, знайдемо кутові коефіцієнти k_{AB} і k_{AC}.

З рівняння прямої *AB*, отримаємо $k_{AB} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{7}{6}$.

Аналогічно як і рівняння прямої *AB*, знайдемо рівняння прямої *AC*: $x + 4y + 11 = 0$. З даного рівняння $k_{AC} = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{1}{4}$.

$$tg\angle BAC = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{-1/4 + 7/6}{1 + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{22}{34}.$$

Знайдемо довжину *BD* за формулою віддалі від точки *B* до прямої *AC*:

$$d = |BD| = \frac{|x_B + 4y_B + 11|}{\sqrt{1 + 4^2}} = \frac{22}{\sqrt{17}}.$$

Для того щоб написати рівняння висоти *BD*, використаємо рівняння жмутка (рівняння прямої, що проходить через точку *B* перпендикулярно прямій *AC*):

$$y-y_B=k_{BD}\left(x-x_B\right).$$

З умови перпендикулярності двох прямих: $k_{BD}=-\dfrac{1}{k_{AC}}$, отже $k_{AC}=-\dfrac{1}{4}$, $k_{BD}=4$.

Використавши рівняння прямої із відомими кутовим коефіцієнтом та однією точкою, отримаємо BD : $y-3=4(x+1)$.

Отже, *BD*: $y=4x+7$.

Для того, щоб знайти координати точки *P*, використаємо формули поділу відрізка у відношенні λ. Відомо, що *BP:PM=2:1*, тобто $\lambda=2$. Тоді використавши, що $x_P=\dfrac{x_B+\lambda x_M}{1+\lambda}$, $y_P=\dfrac{y_B+\lambda y_M}{1+\lambda}$, отримаємо:

$$x_P=\frac{-1+2\cdot 1}{1+2}=\frac{1}{3},\quad y_P=\frac{3+2\cdot(-1)}{1+2}=-1.$$

Отже, т. $P\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$.

Площа Δ ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-1-5)(-2+4)-(-3-5)(3+4)\right|=\frac{1}{2}\left|-12+56\right|=22.$$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

В задачах 1-6 скласти рівняння прямої b паралельної до a та прямої c перпендикулярної до a, які проходять через точку A. Побудувати прямі.

1. $a: 2x - y - 3 = 0,\ A(-5; 3)$.
2. $a: x - 2y + 7 = 0,\ A(0; -2)$.
3. $a: 3x + 2y - 1 = 0,\ A(-2; 1)$.
4. $a: 7x - y + 2 = 0,\ A(-2; 1)$.
5. $a: 3x - y + 2 = 0,\ A(-5; 2)$.
6. $a: 2x + 3y = 0, A(2; -4)$.

В задачах 7-11 скласти рівняння прямої,що проходить через точки A і B. Побудувати пряму. Знайти відстань від точки C до прямої AB.

7. $A(-1; 3),\ B(0; -2),\ C(-3; -2)$.
8. $A(0; -1),\ B(2; 3),\ C(-1; 1)$
9. $A(-2; -3),\ B(1; 0),\ C(0; -2)$.
10. $A(0; 3),\ B(-2; 3),\ C(-2; 3)$.
11. $A(-5; 2),\ B(3; -2),\ C(3; 0)$.

В задачах 12 – 21 дано координати вершин трикутника ABC. Знайти: 1) довжину сторони AB; 2) рівняння сторони AB; 3) рівняння висоти CH; 4) рівняння медіани AM; 5) точку N перетину медіани AM та висоти CH; 6) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

12.	A (1,-3),	B (0,7),	C (-2,4);
13.	A (7,0),	B (1,4),	C (-8,-4);
14.	A (0,2),	B (-7,-4),	C (3,2);
15.	A (3,-1),	B (11,3),	C (-6,2);
16.	A (-2,-3),	B (0,7),	C (8,3);
17.	A (1,2),	B (3,12),	C (11,8);
18.	A (-4,-1),	B (-2,9),	C (6,5);
19.	A (5,4),	B (7,11),	C (15,10);
20.	A (-8,-3),	B (4,-12),	C (8,10);
21.	A (1,0),	B (13,-9),	C (17,13).

22. Знайти точку перетину двох прямих $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.

23. Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 == 0$ і рівняння однієї із його діагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

24. Площа трикутника $S = 8$ кв. од; дві його вершини $A(1\,; -2)$ і $B(2\,; 3)$, а третя вершина C лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$. Визначити координати вершини C.

25. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ і одна з його вершин $A(2\,; -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього прямокутника.

26. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

27. Знайти проекцію точки $P(-6\,;4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

28. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5\,;13)$ відносно прямої $2x - 3y - -3 = 0$.

29. Дано середини сторін трикутника $M_1(2\,;1)$, $M_2(5\,;3)$ і $M_3(3\,;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

30. Дано дві точки $P(2\,;3)$ і $Q(-1\,;0)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку Q перпендикулярно до відрізка $\overline{PQ}$.

31. Дано вершини трикутника $M_1(2\,;1)$, $M_2(-1\,;-1)$ і $M_3(3\,;2)$. Скласти рівняння його висот.

32. Дано вершини трикутника $A(1\,;-1)$, $B(-2\,;1)$ і $C(3\,;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

33. Скласти рівняння сторін і медіан трикутника з вершинами $A(3\,;2)$, $B(5\,;-2)$ і $C(1\,;0)$.

34. Дано дві суміжні вершини $A(-3\,;-1)$, $B(2\,;2)$ паралелограма $ABCD$ і точку $Q(3\,;0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

35. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(3\,;5)$ на однакових відстанях від точок $A(-7\,;3)$ і $B(11\,;-15)$.

36. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - -36 = 0$ і рівняння його діагоналі $3x + 7y - 10 = 0$. Скласти рівняння інших сторін і другої діагоналі цього прямокутника.

37. Знайти точку M_1, симетричну точці $M_2(8\,;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3\,;-4)$, $B(-1\,;-2)$.

38. На прямій $2x - y - 5 = 0$ знайти таку точку P, щоб сума відстаней якої до точок $A(-7;1)$, $B(-5\,;5)$ була б найменшою.

39. Дана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2\,;1)$ під кутом 45° до даної прямої.

40. Точка $A(-4\,;5)$, є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

41. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1\,;3)$, $C(6\,;2)$. Скласти рівняння його сторін.

42. Точка $E(1\,;-1)$ є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

43. Дано дві вершини трикутника $M_1(-10\,;2)$, $M_2(6\,;4)$; його висоти перетинаються в точці $N(5\,;2)$ Визначити координати третьої вершини M_3.

44. Дано дві вершини $A(3;-1)$ і $B(5\,;7)$ трикутника ABC і точка $N(4\,;-1)$ перетину його висот. Скласти рівняння сторін цього трикутника.

45. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо дано одна з його вершин $A(1;3)$ і рівняння двох медіан $x-2y+1=0$ і $y-1=0$.

46. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дано одна з його вершин $B(-4\,;-5)$ і рівняння двох висот $5x+3y-4=0$ і $3x+8y+13=0$.

47. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(4;-1)$ і рівняння двох бісектрис $x-1=0$ і $x-y-1=0$.

48. Скласти рівняння сторін трикутника $B(2\,;6)$, знаючи одну з його вершин $C(4\,;3)$, а також рівняння висоти $x+5y+1=0$ і бісектриси $x+2y-5=0$, проведених з однієї вершини.

49. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4\,;-1)$, а також рівняння висоти $2x-3y+12=0$ і медіани $2x+3y=0$, проведеної з однієї вершини.

50. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2\,;-7)$, а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.

51. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(3\,;-1)$, а також рівняння бісектриси $x-4y+10=0$ і медіани $6x+10y-$ $-59=0$, проведених з різних вершин.

52. Визначити, при якому значенні a пряма $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2--8a+5=0$

а) паралельно осі абсцис;

b) паралельно осі ординат;

c) проходить через початок координат.

В кожному випадку написати рівняння прямої.

53. Визначити, при яких значеннях m і n пряма $(m+2n-3)x+$ $+(2m-n+1)y+6m+9=0$ паралельна осі абсцис і відсікає на осі ординат відрізок, рівний -3 (рахуючи від початку координат). Записати рівняння цієї прямої.

54. Визначити, при яких значеннях a і b дві прямі $ax-2y-1=0$, $6x--4y-b=0$

мають одну спільну точку; паралельні; збігаються.

55. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(3\,;-7)$ і відсікає від координатних осей відмінні від нуля відрізки однакової величини (вважаючи кожен відрізок спрямованим від початку координат).

56. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(2\,;3)$ і відсікає від координатних осей відрізки рівної довжини.

57. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $\mathrm{C}(1\,;1)$ і відсікає від координатного кута трикутник з площею, рівною 2 кв. од.

58. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $B(5\,;-5)$ і відсікає від координатного кута трикутник з площею, рівною 50 кв. од.

59. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(8\,;6)$ і відсікає від координатного кута трикутник з площею, рівною 12 кв. од.

60. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(12\,;6)$ і відсікає від координатного кута трикутник з площею, рівною 150 кв. од.

61. Звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду: $4x - 3y - 10 = 0$. Побудувати пряму.

62. Обчислити відстань d від точки $A(2\,;-1)$ до прямої $4x + 3y + 10 = 0$.

63. Точка $A(2\,;-5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

64. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ і одна з його вершин $A(-2\,;1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

65. Точка $A(5;-1)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $4x - 3y - 7 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

66. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрата.

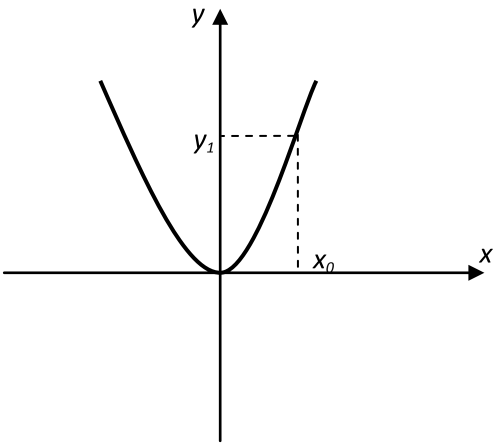
67. Дано рівняння двох сторін квадрата $5x + 12y - 10 = 0$, $5x + 12y + 29 = 0$. Скласти рівняння двох інших його сторін за умови, що точка $M_1(-3\,;5)$ лежить на стороні цього квадрата.

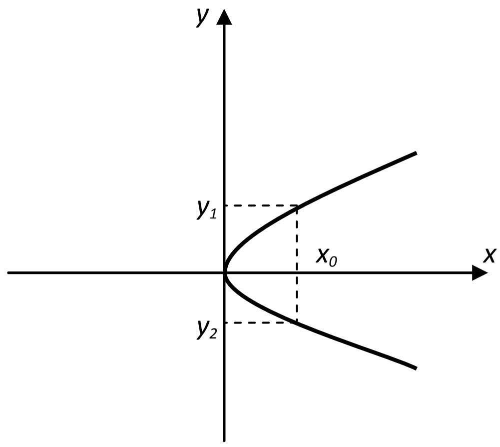
IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

4.1. Поняття функції

Основні означення

Змінна величина y називається *функцією* від змінної величини x, якщо будь-якому значенню x з деякої області ставиться у відповідність єдине значення y. Позначають $y = f(x)$, де x - аргумент або незалежна змінна, y - функція.





Таким чином, згідно означення функції на рисунку зліва зображено графік функції, а на рисунку справа деяка крива (бо існує точка x_0, якій відповідають два різні значення аргументів y_1 та y_2).

Множина всіх значень x, для яких функція існує, називається *областю визначення функції*. Позначають $D(y)$ або ОВ.

При знаходженні $D(y)$ потрібно враховувати:

1) Знаменник функції не повинен дорівнювати нулю.
2) Підкореневий вираз (для кореня парного степеня) більший від нуля або рівний нулю.
3) Вираз під знаком логарифма має бути більший від нуля.
4) Вираз під знаком $\arcsin$ та $\arccos$ за абсолютною величиною має бути менший або рівний за 1.
5) У випадку декількох доданків потрібно врахувати попередні зауваження. При дослідженні кожного доданку визначити їх області визначення, а потім знайти їх перетин (спільну частину).

Приклади 1-6.

Знайти область визначення функцій:

1. $y = \dfrac{2x+9}{x^2-5x+6}$;

$D(y)$: $x^2-5x+6 \neq 0 \Rightarrow$

$D(y) = \{x \neq 2, x \neq 3\}$, *або* $D(y) = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.

2. $y = \dfrac{2x+9}{x^2-5x+26}$;

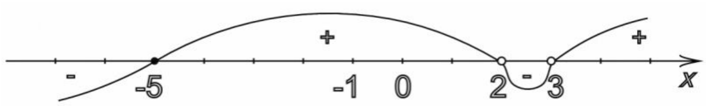
Квадратний тричлен у знаменнику не має дійсних коренів, тобто не перетворюється в нуль, отже: $D(y) = (-\infty,+\infty)$.

3. $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}}$;

$D(y)$: $\dfrac{x+5}{x^2-5x+6} \geq 0$;

Одержана нерівність рівносильна системі нерівностей:

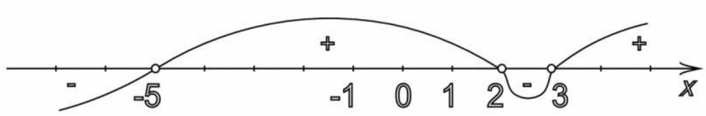
$$\begin{cases} (x+5)(x-2)(x-3) \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Отже, область визначення: $D(y) = [-5;2) \cup (3;+\infty)$.

4. $y = \ln\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$;

$D(y)$: $\dfrac{x+5}{x^2-5x+6} > 0$, звідки $(x+5)(x-2)(x-3) > 0$.



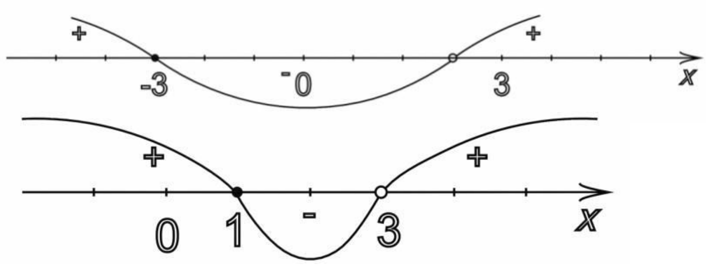
Отже, область визначення $D(y) = (-5;2) \cup (3;+\infty)$.

5. $y = \arcsin\dfrac{2x}{x-3}$;

Область визначення $D(y)$: $\left|\dfrac{2x}{x-3}\right| \leq 1$. Отримаємо систему: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} \leq 1, \\ \dfrac{2x}{x-3} \geq -1 \end{cases}$.

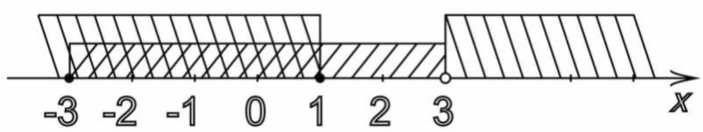
$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} - 1 \le 0 \\ \dfrac{2x}{x-3} + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x - x + 3}{x-3} \le 0 \\ \dfrac{2x + x - 3}{x-3} \ge 0 \end{cases}, \text{ або}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} (x+3)(x-3) \le 0 \\ x \ne 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3(x-1)(x-3) \ge 0 \\ x \ne 3 \end{cases} \end{cases}$$



або

$$\begin{cases} -3 \le x < 3 \\ x \le 1 \\ x > 3 \end{cases}.$$



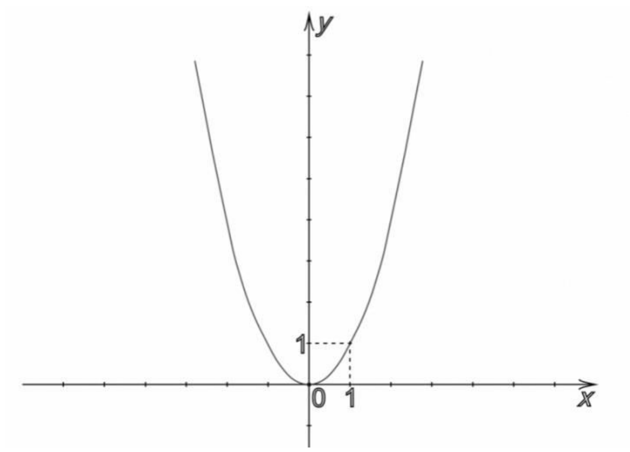
Таким чином, одержимо $D(y) = [-3;1]$

6. $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \arcsin\dfrac{2x}{x-3}.$

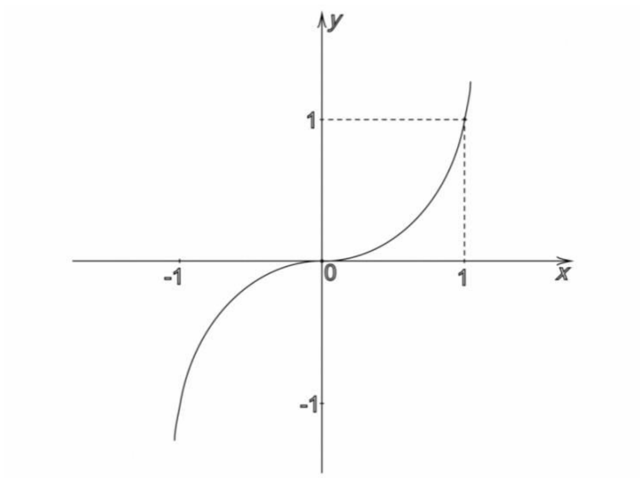
Із системи $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} \ge 0, \\ \left|\dfrac{2x}{x-3}\right| \le 1 \end{cases}$ та відповіді до попереднього прикладу отримаємо $D(y) = [-3;-2]$.

Графіки деяких елементарних функцій та їх області визначення

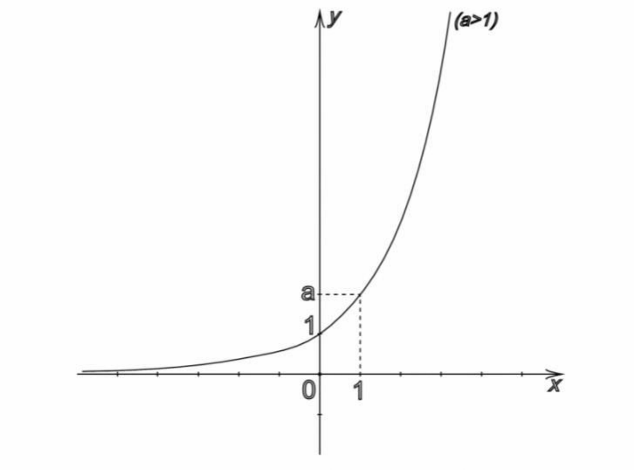
Степенева функція $y = x^2$, $\mathrm{D(y)}: \mathrm{x} \in (-\infty;+\infty)$.

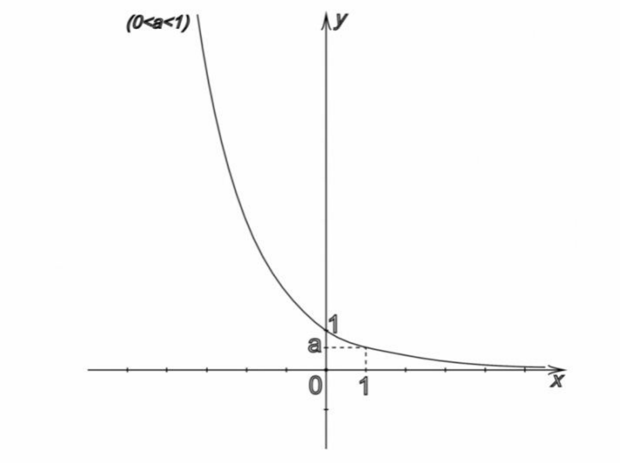


Степенева функція $y = x^3$, $\mathrm{D(y)}: \mathrm{x} \in (-\infty;+\infty)$.

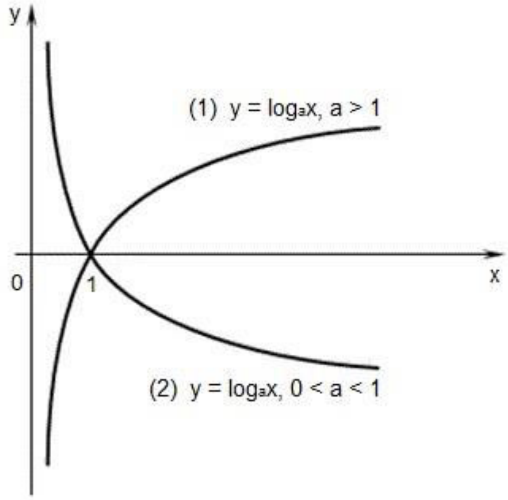


Показникова функція $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$, $\mathrm{D(y)}: \mathrm{x} \in (-\infty;+\infty)$.



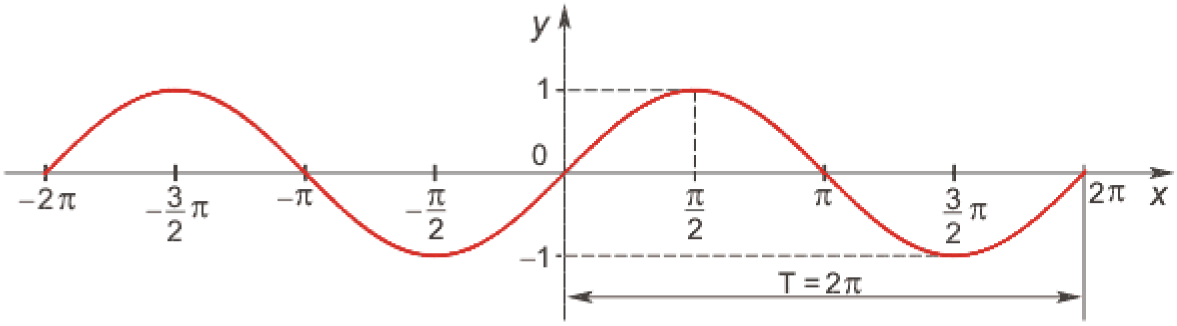


Логарифмічна функція $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, $D(y): x \in (0;+\infty)$.

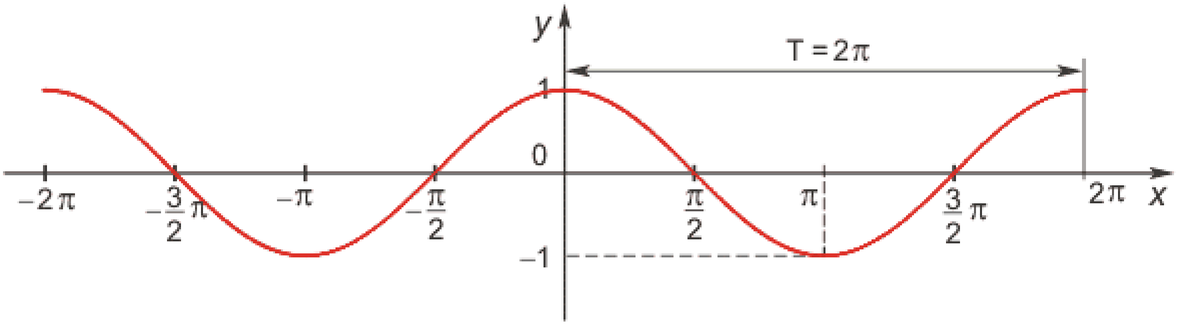


Тригонометричні функції

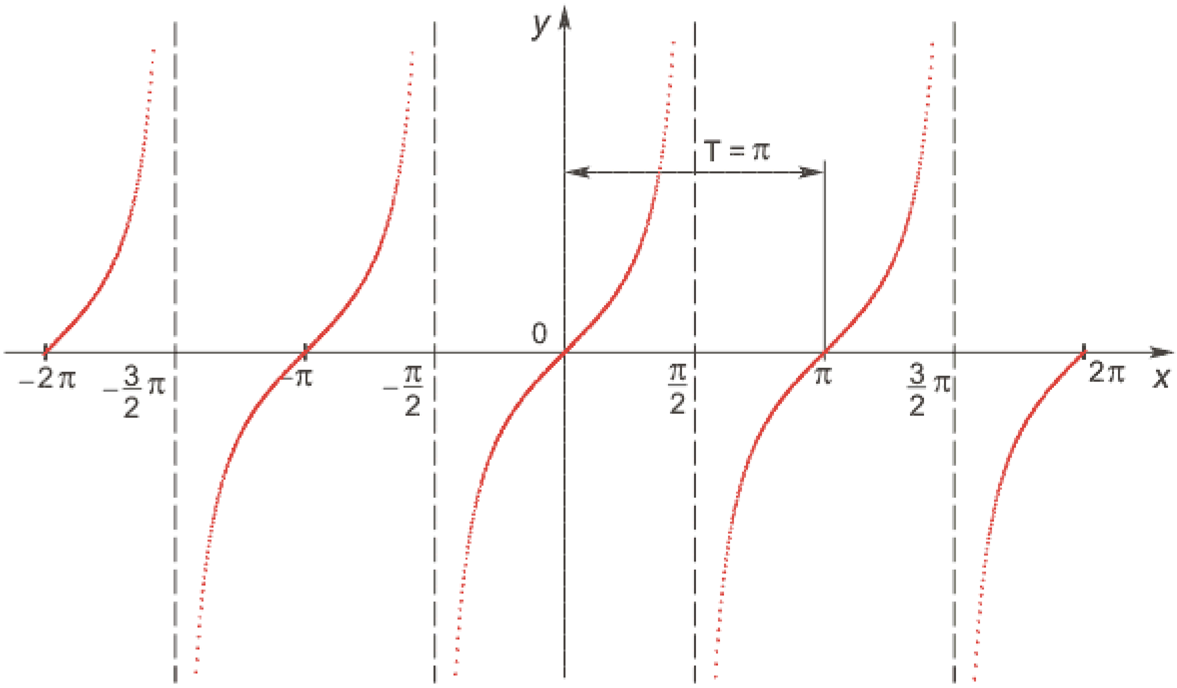
$y = \sin x$, $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.



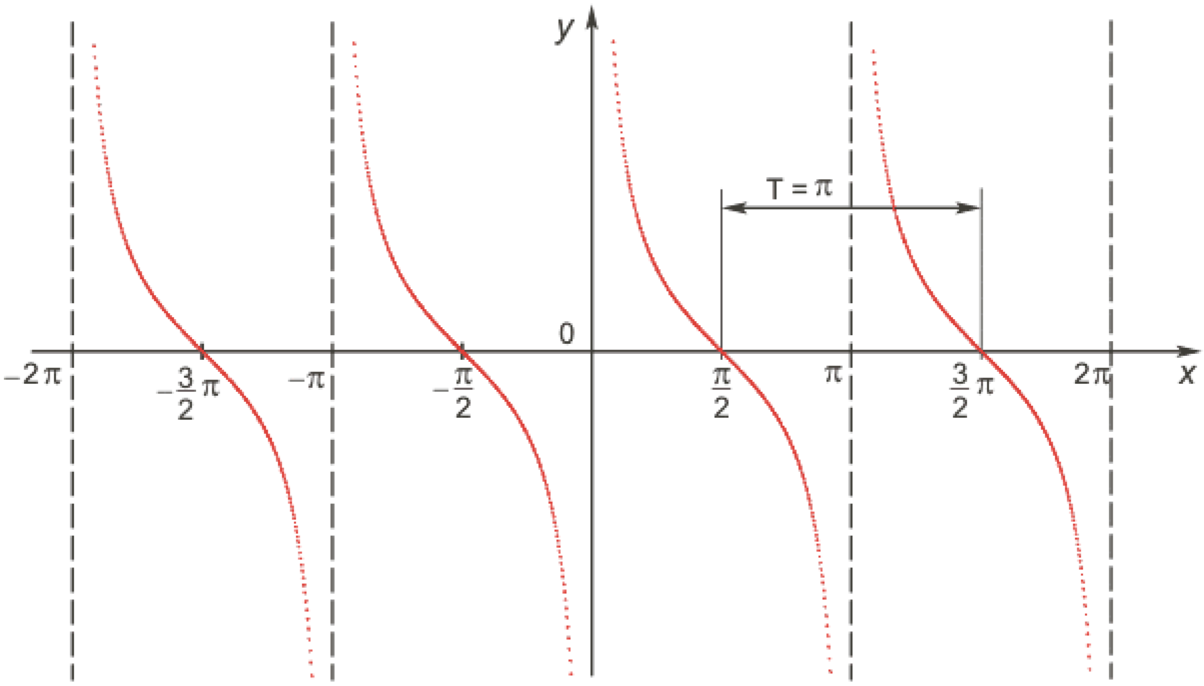
$y = \cos x$, $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.



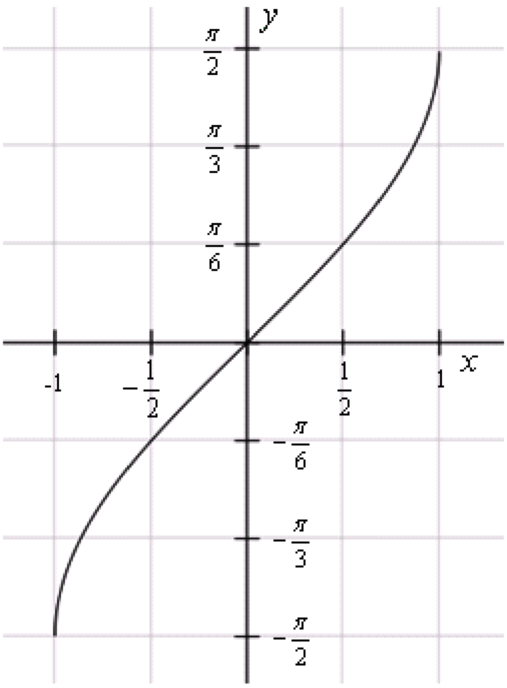
$$y = tgx,\ \mathrm{D(y)}: \mathrm{x} \neq \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}.$$



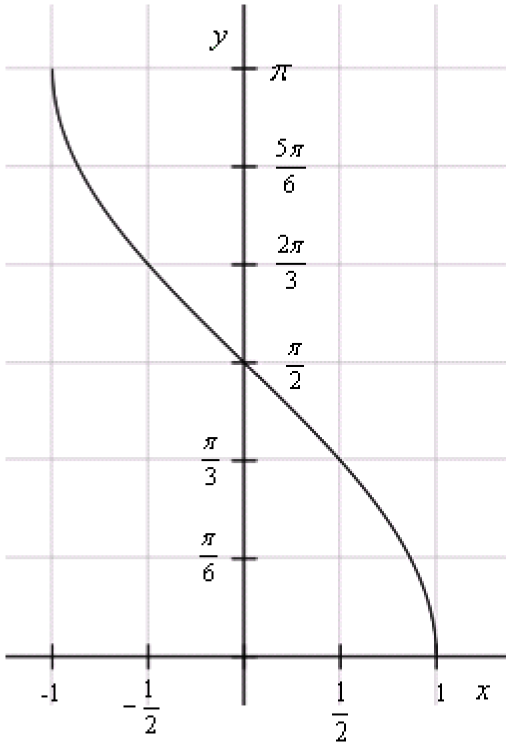
$$y = ctgx,\ \mathrm{D(y)}: \mathrm{x} \neq \pi\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}.$$



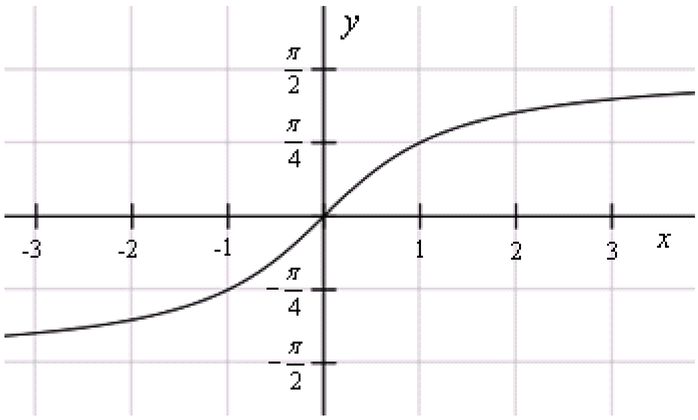
$y = \arcsin x$, D(y): $x \in [-1;1]$.



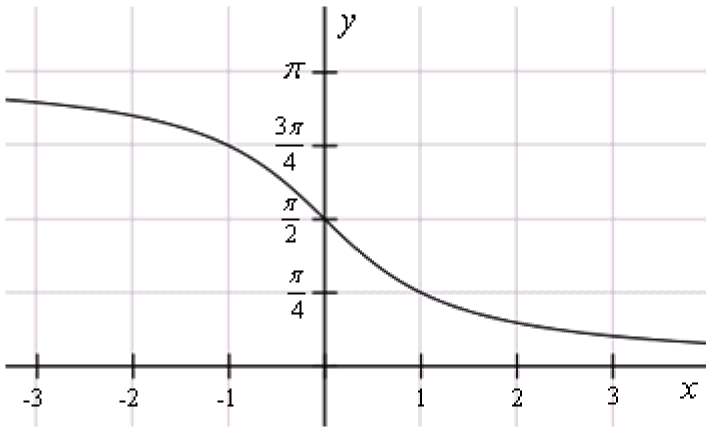
$y = \arccos x$, D(y): $x \in [-1;1]$.



$y = arctgx$, D(y): $x \in (-\infty;+\infty)$.



$y = arcctgx$, D(y): $x \in (-\infty;+\infty)$.



4.2. Границя послідовності. Границя функції

Основні означення

Впорядкована сукупність чисел називається *числовою послідовністю*, якщо кожен наступний її член шукається за одним і тим же законом.

Або, числовою послідовністю називається функція натурального аргументу. Тобто, кожному натуральному числу n ставиться у відповідність певне дійсне число a_n.

Записати послідовність, якщо її загальний член має вигляд $x_n = \dfrac{n+2}{3n^2+2}$.

$$\frac{3}{5};\ \frac{4}{14};\ \frac{5}{29};\ \ldots;\frac{n+2}{3n^2+2};\ldots$$

Для коротких записів багатьох означень та теорем користуються кванторами та логічними операціями. Квантор загальності позначають «$\forall$», і читають «для всякого», «для будь-якого». Квантор існуванння позначають «$\exists$», і читають «існує», «знайдеться».

Логічна операція імплікації позначається - «$\Rightarrow$», а запис «$A \Rightarrow B$» читається «із А слідує В», або «якщо А то В». Логічна операція еквівалентності позначається - «$\Leftrightarrow$», запис «$A \Leftrightarrow B$» читається як «А еквівалентно В», «А тоді і тільки тоді, коли В», «для А необхідно і досить, щоб виконувалось В».

Зауважимо, що запис $A \Leftrightarrow B$ означає, що одночасно $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$.

Число А називається *границею послідовності* x_n якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує номер N, починаючи з якого виконується нерівність: $|x_n - A| < \varepsilon$. Даний факт записують наступним чином : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ або: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)\ |\mathrm{x_n} - A| < \varepsilon.$

Число A називається *границею функції* $f(x)$, при прямуванні x до x_0, якщо для, будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне δ, що для всіх x, відмінних від x_0 і які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Коротко це записують наступним чином : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, причому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\ \ 0 < |\mathrm{x} - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,\ \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x)\ |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Нескінченно малою називається така змінна величина $\alpha(x)$, якщо границя її дорівнює нулю, при прямуванні x до x_0 або до ∞.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\ |x-x_0|<\delta\Rightarrow\ |\alpha(x)|<\varepsilon$, або якщо

$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$, то $(\forall\varepsilon>0)(\exists\Delta>0)(\forall x)\ |x|>\Delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon.$

Функція $y=f(x)$ називається *нескінченно великою*, якщо її границя за модулем дорівнює нескінченності при прямуванні x до x_0 або до ∞. Тобто

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty\Leftrightarrow(\forall M>0)(\exists\delta>0)(\forall x)\ |\mathrm{x}-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|>M$, або

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty\Leftrightarrow\ (\forall M>0)(\exists\Delta>0)(\forall x)\ |x|>\Delta\Rightarrow|f(x)|>M.$

Основні теореми про властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин

1. Якщо функція $y=f(x)$ представлена у вигляді $y=b+\alpha(x)$, де b - деяке число, а $\alpha(x)$ - нескінченно мала величина при $x\to x_0$ або $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} y=b$ або $\lim\limits_{x\to\infty} y=b.$

Обернене твердження також має місце, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} y=b$ або $\lim\limits_{x\to\infty} y=b,$то $y=b+\alpha$, де $\alpha-$ нескінченно мала величина при $x\to x_0$ або $x\to\infty$ відповідно.

2. Якщо $\alpha(x)$ прямує до нуля при прямуванні x до x_0 (або до ∞) і не перетворюється в нуль, то $y=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ прямує до нескінченності, тобто є нескінченно великою величиною при $x\to x_0$ або $x\to\infty$ відповідно.

3. Обернена величина до нескінченно малої є нескінченно велика величина, і навпаки, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала.

4. Сума скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

5. Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

6. Добуток сталої на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

7. Границя відношення нескінченно малої до функції, границя якої відмінна від нуля, дорівнює нулю.

Дії з нескінченно малими та нескінченно великими величинами

Позначимо символами “0” – нескінченно малу величину, “ ∞ ” – нескінченно велику, “?” – певний тип невизначеності.

Нехай *a* – деяке скінченне додатнє число. Використовуючи ці символи, можна записати наступні вирази:

$\infty+\infty=\infty;$ $\qquad\qquad$ $\infty-\infty=?;$

$\frac{a}{\infty} = 0;$
$\frac{a}{0} = \infty;$
$a \cdot 0 = 0;$
$a \cdot \infty = \infty;$
$\frac{0}{0} = ?;$
$\frac{\infty}{\infty} = ?;$
$\ln(0) = -\infty;$
$\ln(+\infty) = +\infty;$

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, \text{якщо } a > 1; \\ 0, \text{якщо } 0 < a < 1; \\ ?, \text{якщо } a = 1; \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0, \text{якщо } a > 1; \\ +\infty, \text{якщо } 0 < a < 1; \\ ?, \text{якщо } a = 1; \end{cases}$$

$0 \cdot \infty = ?;$
$\frac{\infty}{a} = \infty;$
$\infty \cdot \infty = \infty;$
$arctg\,(+\infty) = \frac{\pi}{2};$
$arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$
$arcctg(+\infty) = 0;$
$arcctg(-\infty) = \pi;$
$tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty;$
$tg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty;$
$ctg(0) = +\infty;$
$ctg(\pi) = -\infty.$

Основні теореми про границі

1. Границя суми двох або декількох функцій дорівнює сумі границь цих функцій: $\lim(U(x)+V(x)) = \lim U(x) + \lim V(x).$

2. Границя добутку двох або декількох функцій дорівнює добутку границь цих функцій: $\lim U(x)\cdot V(x) = \lim U(x)\cdot \lim V(x).$

3. Сталий множник можна винести за знак границі: $\lim cU(x) = c\lim U(x).$

4. Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню границь цих функцій, якщо границя знаменника відмінна від нуля: $\lim \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\lim U(x)}{\lim V(x)},\ \textit{при}\ \lim V(x) \neq 0.$

Чудові границі

Чудові границі розкривають певні типи невизначеностей. Так перша чудова границя розкриває невизначеність типу - $\frac{0}{0}$, а друга чудова границя - 1^{∞}.

1. Перша чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

2. Друга чудова границя: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ або в іншому вигляді: $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

Обчислення границь

Для того, щоб обчислити границю потрібно:

1) Підставити замість змінної її граничне значення;
2) На основі основних теорем про границі та дій з нескінченно малими та великими величинами провести обчислення.

Приклади 7-9.

Обчислити границі:

7. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x+4}{2x^3+3} = \frac{3\cdot 4+2+4}{2\cdot 8+3} = \frac{18}{19}.$

8. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{2x^3+3} = \frac{4-10+6}{19} = 0.$

9. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+3}{x^2-5x+6} = \left(\frac{19}{0}\right) = \infty.$

Зауважимо, що після підстановки граничного значення змінної у вираз, який стоїть під знаком границі, інколи отримується невизначеність. Розглянемо деякі випадки невизначеностей.

I. Границя відношення раціональних, або ірраціональних виразів при прямуванні x до ∞ дорівнює границі відношення старших членів цих виразів.

Будемо розрізняти наступні випадки:

а) Нехай $a_i \neq 0,\ b_i, c_i, i = \overline{1,2} -$ дійсні числа і найстарші степені змінних в чисельнику та знаменнику рівні, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(a_1x+b_1)+c_1}{x(a_2x+b_2)+c_2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\infty\cdot(a_1\cdot\infty+b_1)+c_1}{\infty\cdot(a_2\cdot\infty+b_2)+c_2} =$$

$$= \frac{\infty\cdot\infty+c_1}{\infty\cdot\infty+c_2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Отримана невизначеність може бути усунута таким чином:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{x^2}}{\frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ x\neq 0}}\frac{\frac{a_1x^2}{x^2}+\frac{b_1x}{x^2}+\frac{c_1}{x^2}}{\frac{a_2x^2}{x^2}+\frac{b_2x}{x^2}+\frac{c_2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{a_1 + \frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2}}{a_2 + \frac{b_2}{x} + \frac{c_2}{x^2}} = \frac{a_1 + \frac{b_1}{\infty} + \frac{c_1}{\infty}}{a_2 + \frac{b_2}{\infty} + \frac{c_2}{\infty}} = \frac{a_1 + 0 + 0}{a_2 + 0 + 0} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Отже, якщо старші степені змінних в чисельнику і знаменнику рівні, то границя дробу рівна відношенню коефіцієнтів при них.

б) Нехай $a_i \neq 0,\ b_i, c_i, i = \overline{1,2} -$ дійсні числа і найстарший степінь змінної в чисельнику більший за найстарший степінь в знаменнику, тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{a_2x^n + b_2x + c_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(a_1x^{m-1} + b_1) + c_1}{x(a_2x^{n-1} + b_2) + c_2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\infty \cdot (a_1 \cdot \infty^{m-1} + b_1) + c_1}{\infty \cdot (a_2 \cdot \infty^{n-1} + b_2) + c_2} = \frac{\infty \cdot \infty + c_1}{\infty \cdot \infty + c_2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Усунемо отриману невизначеність наступним чином:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{a_2x^n + b_2x + c_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{x^m}}{\frac{a_2x^n + b_2x + c_2}{x^m}} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{\frac{a_1x^m}{x^m} + \frac{b_1x}{x^m} + \frac{c_1}{x^m}}{\frac{a_2x^n}{x^m} + \frac{b_2x}{x^m} + \frac{c_2}{x^m}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{a_1 + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{c_1}{x^m}}{\frac{a_2}{x^{m-n}} + \frac{b_2}{x^{m-1}} + \frac{c_2}{x^m}} = \frac{a_1 + \frac{b_1}{\infty^{m-1}} + \frac{c_1}{\infty}}{\frac{a_2}{\infty^{m-n}} + \frac{b_2}{\infty^{m-1}} + \frac{c_2}{\infty^m}} = \frac{a_1 + \frac{b_1}{\infty} + \frac{c_1}{\infty}}{\frac{a_2}{\infty} + \frac{b_2}{\infty} + \frac{c_2}{\infty}} =$$

$$= \frac{a_1 + 0 + 0}{0 + 0 + 0} = \frac{a_1}{0} = \infty.$$

Отже, якщо старший степінь змінної в чисельнику більший за найстарший степінь змінної в знаменнику, тоді границя дробового виразу при $x \to \infty$ рівна нескінченності.

в) Нехай $a_i \neq 0,\ b_i, c_i, i = \overline{1,2} -$ дійсні числа і найстарший степінь змінної в чисельнику менший за найстарший степінь змінної в знаменнику, тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{a_2x^n + b_2x + c_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(a_1x^{m-1} + b_1) + c_1}{x(a_2x^{n-1} + b_2) + c_2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\infty \cdot (a_1 \cdot \infty^{m-1} + b_1) + c_1}{\infty \cdot (a_2 \cdot \infty^{n-1} + b_2) + c_2} = = \frac{\infty \cdot \infty + c_1}{\infty \cdot \infty + c_2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Усунемо отриману невизначеність наступним чином:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{a_2x^n + b_2x + c_2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_1x^m + b_1x + c_1}{x^n}}{\frac{a_2x^n + b_2x + c_2}{x^n}} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{\frac{a_1x^m}{x^n} + \frac{b_1x}{x^n} + \frac{c_1}{x^n}}{\frac{a_2x^n}{n} + \frac{b_2x}{x^n} + \frac{c_2}{x^n}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\neq 0}} \frac{\frac{a_1}{x^{n-m}} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{c_1}{x^n}}{a_2 + \frac{b_2}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^n}} = \frac{\frac{a_1}{\infty^{n-m}} + \frac{b_1}{\infty^{n-1}} + \frac{c_1}{\infty^n}}{a_2 + \frac{b_2}{\infty^{n-1}} + \frac{c_2}{\infty^n}} = \frac{\frac{a_1}{\infty} + \frac{b_1}{\infty} + \frac{c_1}{\infty}}{a_2 + \frac{b_2}{\infty} + \frac{c_2}{\infty}} =$$

$$= \frac{0+0+0}{a_2+0+0} = \frac{0}{a_2} = 0.$$

Отже, якщо найстарший степінь змінної в чисельнику менший за найстарший степінь змінної в знаменнику, то границя дробового виразу при $x \to \infty$ рівна нулю.

Приклади 10-12.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 7x^2 + 5x - 4}{x^4 + x^3 + x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4}{x^4} = 5.$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x+2)(3x-1)}{x^4 + x - 11} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x \cdot x \cdot 3x}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{x} = 0.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \sqrt[3]{27n^3 + n} + \sqrt[4]{16n^8 + 2n^4 + 3}}{(n+1)\sqrt{9n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot 3n + 2n^2}{n \cdot 3\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2}{3n\sqrt{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\sqrt{n}}{3} = \infty.$

II. Для розкриття невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ у випадку раціонального дробу при прямуванні x до x_0, потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники з наступними скороченнями.

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 3} = \frac{4+4+4}{2-3} = -12.$$

III. Для розкриття невизначеності типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ у випадку ірраціонального дробу при прямуванні x до x_0, потрібно позбуватися ірраціональності та спростити вираз по можливості.

Приклад 14-15.

14. $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{2\cdot4}{9}=\frac{8}{9}.$$

15. $$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x+5-9}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x-4}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2}=\frac{3\cdot(3+3)}{2}=9.$$

Використання першої «чудової границі»

При знаходженні границь від тригонометричних виразів потрібно:

1) провести спрощення,
2) при потребі використати «чудову границю».

Приклади 16-17.

16. $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot2\cdot\frac{x}{2}\cdot2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Тут враховано, що $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

17. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{tg7x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin4x}{4x}\cdot4x}{\frac{tg7x}{7x}\cdot7x}=\frac{4}{7}.$$

Застосування другої «чудової границі»

Друга чудова границя:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ або $\lim\limits_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$.

Приклади 18-24.

Обчислити границі.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{-3n}\right]^{\frac{2n+1}{-3n}}=e^{-\frac{2}{3}}$, так, як $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{-3n}=-\dfrac{2}{3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=2^{\infty}=\infty.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\infty}=0.$

21. $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{4}{3x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-5x)^{\frac{-1}{5x}}\right]^{-5x\frac{4}{3x}}=e^{-\frac{20}{3}}.$

22. $\lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{4}{3x+5}}=1^{4/5}=1.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{\frac{2x+4}{5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{2x+4}{5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3x-1}\cdot\frac{2x+4}{5}}=$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x+4)}{5(3x-1)}}=e^{\frac{2}{5}}.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+3n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}}$, при $a=3,\ 2,\ 1$.

Нехай $a=3$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+3n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{2n^2}\right)^{\frac{n^4}{n}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=\infty.$$

Нехай $a=1$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2}\right)^{\frac{n^4}{n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0.$$

Нехай $a=2$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2}\right)^{\frac{n^4}{n}}=(1^{\infty})=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+ \frac{2n^2+3n-2}{2n^2+3n+1}-1\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+3n-2-2n^2-3n-1}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^4+3n+1}{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{2n^2+3n+1}{-3}\cdot\frac{n^4+3n+1}{n+1}\cdot\frac{-3}{2n^2+3n+1}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3(n^4+3n+1)}{(n+1)\cdot(2n^2+3n+1)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^4}{n\cdot 2n^2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^4}{2n^3}} = e^{-\infty} = 0.$$

Таким чином, ми розкрили невизначеність типу 1^{∞} при обчисленні даної границі.

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x-4x^3}{5+x^2+3x^3}$;

2. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5+3x^3+2}{4x^5+2x^3-3}$;

4. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-3x-10}{x^3-125}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x^4-5x^6}{4x+5x^2-6x^6}$;

6. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4x^2+5x^3}{4x-5x^2-3x^3}$;

8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+5x^6+3x^5}{4x^7+2x^5-4x^4}$;

10. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^3+27}$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3x^2+4x^3}{2x^5-2x+5}$;

12. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4+3x-7}{3x^3-6x^2+5}$;

14. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4x+2}{x^2-2x}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+2x^2-7x^3}{5-2x^2+4x^3}$;

16. $\lim\limits_{x\to5}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}$;

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{5}x}{5x^4-3x^2+6}$;

18. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+4x+2}{x^2+2x}$;

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt[6]{x^2}+3\sqrt[6]{x^3}}{5\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}}$;

20. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^8+4x^6+x^5}{4x^8+2x^5-x^4}$;

22. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^3+2n+1)\cdot(n^2+3n-1)+2n^2}{n(n+7)^3\cdot(n-3)}$;

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n^2-2n+3)^2(3n-1)+3n^5}{(2n+1)^2+(3n+1)^2\cdot(n+2)^3}$;

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n-1)\cdot(3n+1)+2n\cdot(n+2)}{(n-7)\cdot(n+3)+n\cdot(n+3)^2}$;

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{an^3+3n}{2n(n^2+1)}\right)^{\frac{h(n+2)^3}{3n-1}}$, при $a=2,3,1$;

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+2n+1}{(n+2)\cdot(n-3)}\right)^{\frac{n^b+n-1}{n^2+1}}$, при $a = 2,\ 3,\ ½;\quad b = 2,\ 3,\ 1\backslash;$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n\cdot(n+1)}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$;

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+3}\right)^{n}$;

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5}{3n^2-4}\right)^{\frac{n^2+3}{n}}$;

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+8n-1}{5n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^3+2n}{n+1}}$;

32. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$;

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt[3]{x^2} + 7\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^4}}{5\sqrt[5]{x^3} + 8\sqrt{x}}$;

34. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$;

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{x^5} - 2\sqrt{x}}$;

36. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{x^3 - 64}$;

37. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3}x^5 + 2x^2 + 8}{\sqrt{5}x^5 - 4x^2 + 3}$;

38. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{x^3 - 1}$;

39. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\sqrt[4]{x^5} + 2\sqrt[4]{x^2} - 4}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt{x}}$;

40. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$;

41. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3x + 5}{x + 5}\right)^{\frac{2}{x}}$;

42. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right)^{\frac{3+x}{x^2}}$;

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x}$;

44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x + 1}{x}$;

45. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin^2 2x}{x}$;

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0} [\ln(x^2 + 2x)]$;

48. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 3}\right)^{\frac{x^2+3x+2}{x}}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}$;

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x}{\sin 3x}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin 8x}{x^2}$;

52. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin^2 7x}{x^2}$;

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin 2x}{x}$.

4.3. Неперервність функції. Односторонні границі
Основні означення

Границя називається *лівосторонньою* (при прямуванні $x \to x_0$), якщо змінна x залишається завжди зліва від x_0 і позначається $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

Аналогічно дається означення правосторонньої границі : $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Приростом змінної називається різниця між наступним і попереднім значенням змінної величини. Позначається:

$$\Delta x = x_1 - x_0;$$

$$\Delta y = y_1 - y_0.$$

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка визначена в т. $x = x_0$ та деякому околі цієї точки.

Нехай змінній x надано приріст Δx ,тоді функція у набуде приросту Δy.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y;$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x);$$

$$f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Функція $y = f(x)$ визначена в деякій точці x_0 та її околі називається *неперервною в точці* x_0, якщо нескінченно малому приросту змінної x в точці x_0 відповідає нескінчено малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Звідки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

Теорема: *Елементарні функції неперервні в кожній точці області визначення цих функцій.*

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку [a,b], то вона називається *неперервною на цьому проміжку*.

Тобто $y = f(x)$ є *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо:

1. Функція визначена в цій точці, тобто існує $f(x_0)$;
2. Існують скінченні лівостороння та правостороння границі цієї функції при $x \to x_0$:

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = a$,

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b$;

3. Ці границі рівні між собою і дорівнюють значенню функцій в цій точці; тобто $a = b = f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, то кажуть, що функція в точці $x = x_0$ *має розрив*, а точка $x = x_0$ називається *точкою розриву*.

Класифікація точок розриву функцій

Якщо функція в точці $x = x_0$ є невизначеною, але існують скінченні лівобічна та правобічна границі функції, і вони рівні, то кажуть, що функція має *усувний розрив* (не виконується пункт 1).

Якщо існують скінченні лівостороння та правостороння границі функції, але вони не рівні, то функція має *точку розриву першого роду –скачок* (не виконується пункт 3).

Якщо або лівостороння, або правостороння, або обидві ці границі є нескінченними, то така точка є *точкою розриву другого роду. Ф*ункція має нескінченний розрив (не виконується пункт 2).

Приклади 1-3.

1. Функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ в точці $x = 0$ має усувний розрив.

Відомо, що $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, тобто

$\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Якщо записати

$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, то ця функція вже буде неперервною в точці $x = 0$, тобто розрив усунуто.

2. Дослідимо функцію $y = 4^{\frac{2}{3-x}}$ на неперервність.

$D(y)\colon x \in (-\infty; 3) \cup (3;\ +\infty)$.

Знайдемо односторонні границі в точці, де вона не визначена:

$\lim\limits_{x \to 3-} 4^{\frac{2}{3-x}} = \infty;$

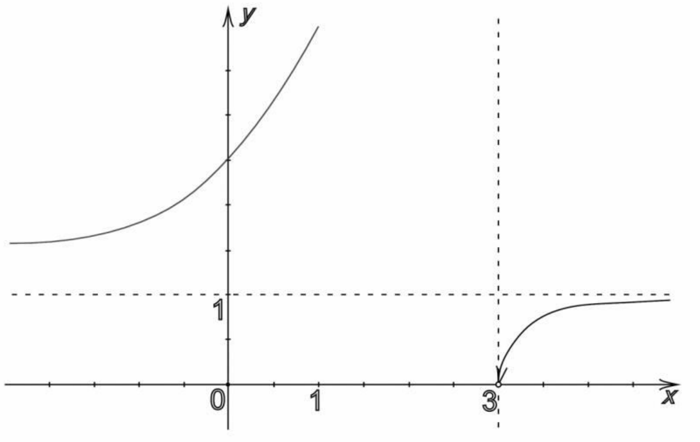
$\lim\limits_{x \to 3+} 4^{\frac{2}{3-x}} = 0$, бо „$4^{\frac{2}{-0}}$“=„$4^{-\infty}$“=„$\dfrac{1}{4^{\infty}}$“=„$\dfrac{1}{\infty}$“= 0.

Отже, $x = 3$ є точкою розриву другого роду.

Щоб побудувати схематичний графік цієї функції, знайдемо границі

$\lim\limits_{x \to \infty} 4^{\frac{2}{3-x}} = 1,$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{\frac{2}{3-x}} = 1.$

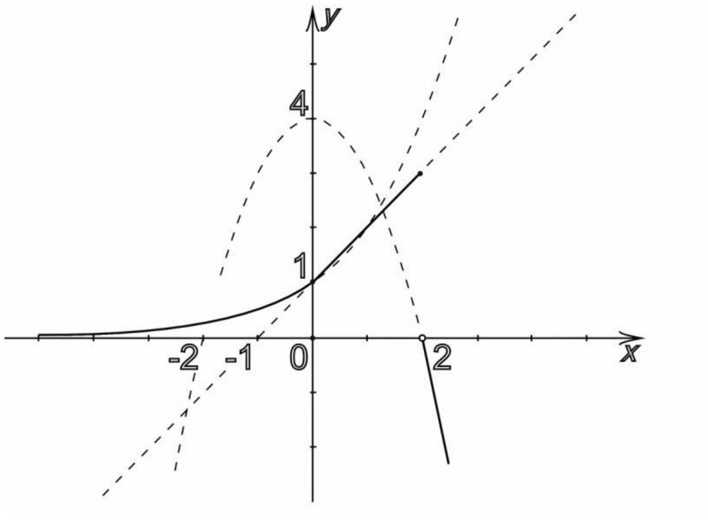


3. Дослідити на неперервність функцію $y=\begin{cases}2^x, x\le 0;\\ x+1, 0<x\le 2;\\ 4-x^2, x>2.\end{cases}$.

Функція $y=2^x$ є неперервною на всій числовій осі, отже і для $x\le 0$; $y=x+1$ теж є неперервна на проміжку *(0;2],* як і функція $y=4-x^2$ при $x>2$.

Дослідимо дану функцію на неперервність в точках стику $x_0=0$ та $x_0=2$. Для цього знайдемо $\lim\limits_{x\to 0-}2^x=1$**,** $\lim\limits_{x\to 0+}(x+1)=1$. Одержимо $a=b=1=2^0=1$, $a=b=f(0)$.

Отже, в точці $x_0=0$ функція є неперервною.



Знайдемо $\lim\limits_{x\to 2-}(x+1)=3$, $\lim\limits_{x\to 2-}(4-x^2)=0$, бачимо, що $a\neq b$, тому функція має точку розриву $x_0=2$, причому це розрив першого роду – скачок, величина скачка $\Delta=|0-3|=3$.

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Дослідити функцію на неперервність:

1. $y = \dfrac{x-1}{x+4}$;
2. $y = \dfrac{x+1}{2x+4}$;
3. $y = \dfrac{x-2}{x-3}$;
4. $y = \dfrac{x-1}{x^2+4}$;
5. $y = \dfrac{1}{x^2-4}$;
6. $y = \dfrac{x-2}{x^2-1}$;
7. $y = \dfrac{x+1}{x^2-9}$;
8. $y = 2^{\frac{3}{x+3}}$;
9. $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$;
10. $y = 3^{\frac{3}{5-x}}$;
11. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x-1}}$;
12. $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0; \\ x+3, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$
13. $y = \begin{cases} x-2, & \text{якщо } x \leq 0; \\ x^2+3, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$
14. $y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 0; \\ x^3, & \text{якщо } 0 < x \leq 3; \\ x+24, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$

V. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

5.1. Похідна функції

Диференційованість функції. Означення похідної функції однієї змінної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a;b). Зафіксуємо деяке значення $x = x_0$ і візьмемо нове значення $x = x_1$ ($x_0, x_1 \in (a,b)$). Позначимо приріст аргументу через $\Delta x = x_1 - x_0$. Знайдемо значення функції в точці x_1**:**

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$$

і приріст функції

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Похідною функції однієї змінної в даній точці x_0 , або звичайною похідною, називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = y'(x_0)$$

Операція знаходження похідної функції називається диференціюванням функції.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ має похідну, то кажуть, що вона *диференційована в точці* x_0.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідні в кожній точці інтервалу *(a;b),* то кажуть, що вона *диференційована на інтервалі (a;b).*

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *є диференційованою в точці* $x = x_0$*, то вона є неперервною в цій точці.*

Обернене твердження не є істинним.

Доведення: Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці $x = x_0$, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Приріст функції можна представити у вигляді $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де α - нескінченно мала величина.Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x + \alpha \cdot \Delta x) = 0$.

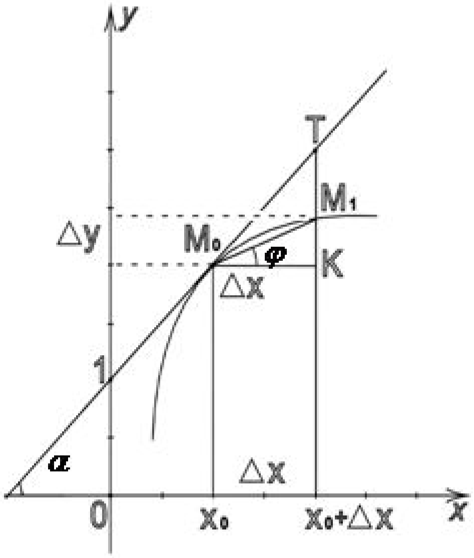
Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функція є неперервною. Теорема доведена.

Геометричний зміст похідної

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка є неперервною на деякому інтервалі *(a;b),* а у внутрішній точці x_0 має похідну $y'(x_0)$.

$\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$. З $\Delta M_1 M_0 K$: $tg\varphi = \dfrac{M_1 K}{M_0 K} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нехай $\Delta x \to 0$,тоді т. M_1 буде намагатись зайняти положення т. M_0 , а хорда $M_0 M_1$– положення дотичної $M_0 T$ до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 . Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{TK}{\Delta x} = tg\alpha$, $y'(x_0) = tg\alpha$.



Тобто, значення похідної функції в точці x_0 дорівнює тангенсу кута, що утворює дотична, проведена до кривої в цій точці з додатнім напрямом осі *Ox*. Це і є геометричний зміст похідної.

т. $M_0(x_0, y_0)$;
т. $K(x_0 + \Delta x, y_0)$;
т. $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$;
$y_0 = f(x_0)$;
$\Delta y = f(x_0 + \Delta y) - f(x_0)$.

Рівняння дотичної

Запишемо рівняння дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці $x = x_0$. Скористаємось рівнянням $y - y_0 = k(x - x_0)$, де $k = tg\alpha = y'(x_0)$. Тоді $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Похідні деяких елементарних функцій

Доведемо, що якщо:
$y = \sin x$, то $(\sin x)' = \cos x$;
$y = \cos x$, то $(\cos x)' = -\sin x$;
$y = \log_a x$, то $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
$y = \ln x$, то $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$. Скористаємось означенням похідної, тобто $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos\frac{x+\Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x+\Delta x - x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \cos x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

Аналогічно можна довести, що $(\cos x)' = -\sin x$.

Тут використано першу «чудову границю» ($\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$).

Нехай $y = \ln x$. Доведемо, що $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{1/x} = \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}.$$

Тут використано другу «чудову границю» ($\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$).

Нехай $y = \log_a x$, тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{1/x} = \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Правила диференціювання

Доведемо, що

1. $(x)' = 1$. Скористаємось означенням похідної. Якщо $y = x$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$.

2. $(c)' = 0$ (c=const).

$y = c$, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$.

3. $(cu)' = cu'$.

$$y = cu,\ \ y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(u+\Delta u)-cu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{cu + c\Delta u - cu}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\Delta u}{\Delta x} = c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'.$$

4. Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій.

Нехай $y = u + v$, тоді за означенням:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Отже $(u+v)' = u' + v'$.

5. Доведемо, що $(u\cdot v)' = u'v + v'u$.

Нехай $y = u\cdot v$, тоді

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{uv + \Delta u v + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta u}{\Delta x}v + \frac{\Delta v}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v) = u'v + v'u$, оскільки диференційована функція $v = v(x)$ є неперервною у точці x, отже $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v(x) = 0$.

6. Доведемо, що $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Якщо $y = \dfrac{u}{v}$, то враховуючи що $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, маємо (при $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$).

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{[v(x)u(x+\Delta x) - v(x)u(x)] - [v(x+\Delta x)u(x) - v(x)u(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)}\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{\frac{1}{\Delta x}\cdot[u(x+\Delta x) - u(x)]v(x)\cdot\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)} -$$

$$- \frac{1}{\Delta x}[v(x+\Delta x) - v(x)u(x)]u(x)\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\} =$$

$$= \frac{u'(x)v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{v'(x)u(x)}{[v(x)]^2} =$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}.$$

Тут враховано, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$.

7. Знайдемо похідну функції $y = tgx$.

$y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Скористаємось формулою $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді одержимо

$y' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, отже,

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Аналогічно доводиться і наступна формула: $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Похідна складної функції

Розглянемо складну функцію $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, x- незалежна змінна, u- проміжкова змінна.

Теорема. *Якщо функція $\varphi(x)$ має похідну в деякій точці x, тобто існує $\varphi'(x)$, а функція $f(u)$ має похідну $f'(u)$ у відповідній точці $u = \varphi(x)$, тоді складна функція $y = f(u)$ теж має похідну у цій точці x, яка дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжковій змінній на похідну від проміжкової змінної по незалежній змінній, тобто: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.*

Доведення. З умови теореми можна записати $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$.Звідси $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$, $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$ (якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$). Поділимо ліву і праву частини останньої рівності на Δx, тоді одержимо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ і перейшовши в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, та врахувавши, що α- нескінченно мала ($\alpha \to 0$), одержимо: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Зауваження: якщо складна функція містить кілька проміжкових змінних ($y = f(u), u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$) **,** тоді $y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t$.

Приклади 1-2.

1. $y = \ln(\sin x)$,

$y' = \dfrac{1}{\sin x}(\sin x)' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = ctgx$**.**

2. $y = \ln(\sin 2x)$,

$$y' = \frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x)' = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2ctg\,2x.$$

Похідні степеневої та показникової функцій

Розглянемо степеневу функцію виду: $y = x^{\alpha}$.

Прологарифмуємо ліву і праву частини цієї рівності, одержимо: $\ln y = \alpha \ln x$.

Знайдемо y'. Одержимо $\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$, звідки $y' = \alpha\frac{1}{x}y = \alpha\frac{1}{x}x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Таким чином, похідна степеневої функції обчислюється за формулою $(x^{a})' = a \cdot x^{a-1}$. Аналогічно знайдемо похідну показникової функції: $y = a^{x}$, $(a > 0,\, a \neq 1)$.

1. Логарифмуємо: $\ln y = x \ln a$.
2. Диференціюємо: $\frac{1}{y}y' = \ln a$, звідки $y' = y\ln a = a^{x}\ln a$.

Отже, похідна показникової функції обчислюється за формулою $(a^{x})' = a^{x}\ln a$.

Зауважимо, що $(e^{x})' = e^{x}$, оскільки $\ln e = 1$.

Приклади 3-4.

Знайти похідні функцій.

3. $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$,

$$y' = \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ отже } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $y = \sqrt[3]{\sin^{2} 2x} = (\sin 2x)^{2/3}$,

$$y' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{\frac{2}{3}-1}(\sin 2x)' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos 2x \cdot 2 = \frac{4\cos 2x}{3\sqrt[3]{\sin 2x}}.$$

Похідна складної степенево-показникової функції

Розглянемо функцію $y = u^{v}$, де u і v є функції від x.

1. Прологарифмуємо ліву і праву частини рівності: $\ln y = v \ln u$.

2. Продиференціюємо по x ліву і праву частини одержаної рівності: $\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{1}{u}u'$.

3. Знайдемо y' з отриманого вище рівняння:
$y' = (v'\ln u + v\frac{1}{u}u')y = (v'\ln u + v\frac{1}{u}u')u^v = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'$. Одержимо $\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'$.

Приклад 5.

Знайти похідну функції: $y = x^{\sin x}$.

Згідно алгоритму:

1. $\ln y = \sin x \ln x$,
2. $\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}$,
3. $y' = (\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}) \cdot x^{\sin x}$.

Такий метод диференціювання використовують і у випадках, де є більше, ніж два співмножники у записі функції.

Приклад 6.

Знайти похідну функції: $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 e^{2x} \sin x}{(x+2)\sqrt{x+3}}}$.

1. $\ln y = \frac{1}{3}[2\ln x + 2x + \ln(\sin x) - \ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+3)]$.
2. $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}[2\frac{1}{x} + 2 + \frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}]$.
3. $y' = \frac{1}{3}(2\frac{x+1}{x} + ctgx - \frac{3x+4}{2(x-2)(x+3)}) \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2 e^{2x} \sin x}{(x+2)\sqrt{x+3}}}$.

Обернена функція та її диференціювання

Нехай нам задано функцію $y = f(x)$ на проміжку *[a,b]*, $f(a) = c$, $f(b) = d$.

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на проміжку *[a,b],* якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: $\forall x_1, x_2$, таких що $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо із $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) \le f(x_2)$, тоді функція $f(x)$ називається неспадною.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною* на проміжку *[a,b],* якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції: $\forall x_1, x_2$, таких що $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) > f(x_2)$. Якщо із $x_1 < x_2$ випливає $f(x_1) \ge f(x_2)$, тоді функція $f(x)$ називається незростаючою.

Функції зростаючі, неспадні, спадні, незростаючі називають *монотонними* функціями.

Розглянемо зростаючу функцію $y = f(x)$.

Нехай $f(a) = c$; $f(b) = d$.

Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку [a,b], то вона має обернену функцію $x = \varphi(y)$ на проміжку [c,d]. Зауважимо, що якщо $x = \varphi(y)$ - обернена функція для $y = f(x)$, тоді функція $y = f(x)$ є оберненою для функції $x = \varphi(y)$. Тому функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ називаються строго оберненими. Очевидно $f[\varphi(y)] = y$, $\varphi[f(x)] = x$.

Якщо функція не є ні спадною, ні зростаючою, то вона може мати декілька обернених.

Якщо ж перепозначити x та y в оберненій функції, тобто розглянути функцію $y = \varphi(x)$, то графіки функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ будуть симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Теорема. *Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$,яка має похідну $\varphi'(y) \ne 0$, то у відповідній точці функція $y = f(x)$ теж має похідну:* $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Доведення. З умови теореми $x = \varphi(y)$ є диференційованою, тобто є неперервною, а це означає, що якщо $\Delta y \to 0$, то і $\Delta x \to 0$. Розглянемо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x / \Delta y}$; звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x / \Delta y}$; Отже

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Розглянемо обернені тригонометричні функції.

1. $y = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$. Оберненою функцією до даної є $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; Скористаємось теоремою про диференціювання обернених

функцій, тобто $y'_x = \dfrac{1}{\varphi'_y}$, тоді

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y = \arccos x$, $x \in [-1;1]$, тоді оберненою функцією є $x = \cos y$, $y \in [0;\pi]$.

$$y' = (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = arctgx$, $x \in (-\infty;\infty)$. Оберненою функцією є $x = tgy$, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \text{ оскільки}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y}, \text{ бо } 1+tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

4. $y = arcctgx$, $x \in (-\infty;\infty)$, тоді оберненою функцією є $x = ctgy$, $y \in (0;\pi)$.

$$y' = (arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\frac{1}{1/\sin^2 y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Таблиця похідних

1. $C' = 0, (C = const)$;
2. $x' = 1$;
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$;
6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
7. $\left(e^x\right)' = e^x$;
8. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$;
9. $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;
10. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;
11. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
12. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
13. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
14. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
16. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
17. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Таблиця похідних складної функції

1. $(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
2. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$;
5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
8. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
9. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
12. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Похідна складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, обчислюється за формулою $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Наприклад:

$$y = e^{arctg^2 \sqrt{x}}, \quad y' = e^{arctg^2 \sqrt{x}} \cdot 2arctg\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} \cdot e^{arctg^2 \sqrt{x}}.$$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Знайти похідні функцій.

1. $y=\frac{x^4}{4}-3x^2+6x-2$;
2. $y=\frac{2x^5}{3}-\frac{3}{x}+x$;
3. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$;
4. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$;
5. $y=\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x}-23$;
6. $y=\left(x+\sqrt{x}\right)^2$;
7. $y=\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2$;
8. $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$;
9. $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$;
10. $y=2tgx-3\cos x$;
11. $y=7\sin x+5e^x$;
12. $y=\sqrt{x}+ctgx$;
13. $y=\ln x+2\sqrt[5]{x^3}$;
14. $y=e^x-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$;
15. $y=1-\frac{\cos x}{4}$;
16. $y=2\sin x-6tgx$;
17. $y=\frac{e^x}{\sqrt{5}}-\frac{\ln x}{\sqrt{3}}$;
18. $y=x^4+ctgx$;
19. $y=e^x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}\ln x$;
20. $y=\sin x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;
21. $y=\sqrt[3]{x}-2\sqrt[4]{x}$;
22. $y=\frac{tgx+\ln x}{4}$;
23. $y=\sqrt{2}\sin x-\frac{ctgx}{5}$;
24. $y=5\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{x}$;
25. $y=e^x+\cos x-\sin x$;
26. $y=\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^2$;
27. $y=\left(3x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$;
28. $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^5}}+x^4$;
29. $y=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$;
30. $y=e^x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{3}$.

Знайти похідні функцій.

1. $y=\sin x\cdot\cos x$;
2. $y=(x^2+x)\ln x$;
3. $y=tgx\cdot e^x$;
4. $y=ctgx\cdot\cos x$;
5. $y=\sin x\cdot\left(\frac{x}{2}+\sqrt{x}\right)$;
6. $y=\left(\sin x-\cos x\right)^2$;

7. $y=\frac{x-1}{x+1}$;

8. $y=\frac{x^2-2x}{\sin x}$;

9. $y=\frac{\cos x}{x+2}$;

10. $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$;

11. $y=\frac{e^x-3x^4}{\cos x}$;

12. $y=\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$;

13. $y=\left(\sin x+e^x\right)^2$;

14. $y=\frac{(x-1)^2}{\ln x}$;

15. $y=\frac{e^x-2\sin x}{x-\cos x}$;

16. $y=\frac{\ln x-3x}{tgx}$;

17. $y=\frac{tgx+\cos x}{\sqrt{x}}$;

18. $y=\sqrt[3]{x^4}\sin x$;

19. $y=(x+1)^2e^x$;

20. $y=\frac{2x-3}{4x^2+1}$;

21. $y=\frac{\sin x-4x}{ctgx}$;

22. $y=\cos x\cdot\left(\frac{x}{3}+x^2\right)$;

23. $y=\sin x\cdot tgx$;

24. $y=ctgx\cdot\cos x$;

25. $y=(3x+2)^2e^x$;

26. $y=\frac{tgx+\cos x}{x^3-2x}$;

27. $y=\left(\cos x+e^x\right)^2$;

28. $y=\frac{e^x-2tgx}{x-ctgx}$;

29. $y=\frac{\sin x\cdot e^x}{x^2}$;

30. $y=\frac{ctgx}{(x^2-x)}$.

Знайти похідні складних функцій.

1. $y=\sin^3\frac{3x}{4}$;

2. $y=\cos^2 5x$;

3. $y=\sin 3x\cdot\cos 5x$;

4. $y=\left(tg3x+\cos 2x\right)^2$;

5. $y=ctg^3(x-2x^2)$;

6. $y=\sqrt[3]{\sin 3x}$;

7. $y=\sqrt{(x^2-3x+2)}$;

8. $y=\frac{\sin 5x}{\cos 4x}$;

9. $y=\frac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{x}+1}$;

10. $y=\ln(x^4+3x-2)$;

11. $y=(\sin 4x+1)^5$;

12. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-\sin 3x)^2}}$;

13. $y=\dfrac{\sin\sqrt{x+1}}{\cos\sqrt{x-1}}$;

14. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln(1-2x)}$;

15. $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^7}$;

16. $y=\dfrac{tg\sqrt{2x+5}}{\ln(3x^2)}$;

17. $y=\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}}{(x-x^2)}$;

18. $y=\sqrt[4]{\dfrac{ax-1}{1+bx}}$;

19. $y=\dfrac{\ln\sqrt{x-5}}{\sqrt{2x+1}}$;

20. $y=\dfrac{\sin(2x-1)}{\cos x+1}$;

21. $y=(tg 4x+3)^3$;

22. $y=\dfrac{\sqrt{\sin(3x+1)}}{\cos 2x}$;

23. $y=\dfrac{1}{(1+\sqrt{\cos 2x})^3}$;

24. $y=\dfrac{\ln\sqrt{2x+1}}{\sin(3x)}$;

25. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\ln 2x-tg 3x)^4}}$;

26. $y=\sin(3x)\cdot e^{4x^2-3x}$;

27. $y=\dfrac{\sqrt{1-2x^4}}{\ln(x-x^2)}$;

28. $y=\dfrac{tg\sqrt{1+3x^2}}{\cos 5x}$;

29. $y=\sqrt[3]{\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-3}}$;

30. $y=\ln(\cos(3x^2-2x))$.

5.2. Диференціал функції.
Похідна та диференціали вищих порядків

Диференціал функції та його геометричний зміст

За означенням похідної маємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, звідки $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $y' \cdot \Delta x$ - головна лінійна частина приросту функції. Вона називається диференціалом функції, і позначається $dy = y'\Delta x$.

Тобто, диференціал функції дорівнює добутку її похідної на приріст аргументу: $dy = d(f(x)) = y'\Delta x$.

Доведемо, що приріст незалежної змінної дорівнює диференціалу незалежної змінної.

Розглянемо функцію $y = x$. Знайдемо dx: $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x$.

Тобто $\Delta x = dx$ і таким чином, диференціал функції дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної: $dy = y'dx$.

Геометричний зміст диференціалу: диференціал дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до кривої в даній точці.

Похідні та диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка має похідну $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Очевидно, що ця похідна також є функцією від x. Якщо вона є диференційованою, то її похідна називається другою похідною від функції $y = f(x)$: $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Аналогічно $y''' = \dfrac{d^3 y}{dx^3}$ є похідною третього порядку і т. д., $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^{(n)} y}{dx^n}$.

Приклади 7-9.

7. Дано $y = x \cdot e^{-x}$. Знайти y'''.

$y' = e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) = (1 - x)e^{-x}$;

$y'' = -e^{-x} + (1 - x)e^{-x}(-1) = (x - 2)e^{-x}$;

$y''' = e^{-x} + (x - 2) \cdot e^{-x}(-1) = (3 - x)e^{-x}$.

8. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \dfrac{1}{x - a}$.

$y' = [(x - a)^{-1}]' = -(x - a)^{-2}$;

$y'' = 2(x - a)^{-3}$;

$y''' = 2 \cdot (-3)(x-a)^{-4}$;
$y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4(x-a)^{-5}$;
$y^{(n)} = (-1)^n (x-a)^{-(n+1)} \cdot n!$.

9. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = \sin x$.

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$;

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi)$;

$y''' = \cos(x + \pi) = \sin(x + \pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$;

$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Розглянемо рівність $y' = \frac{dy}{dx}$, тоді $dy = y' \cdot dx$.

Якщо $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$, то $d^2 y = y'' \cdot dx^2$; аналогічно $d^{(n)} y = y^{(n)} \cdot dx^n$.

Приклад 10.
Знайти $d^2 y$, якщо $y = \sin(x^2)$.
$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$;
$y'' = 2\cos(x^2) + 2x(-\sin(x^2)) \cdot 2x = 2(\cos(x^2) - 2x^2 \cdot \sin(x^2))$;
$d^2 y = 2(\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2))dx^2$.

Основні теореми про диференційовані функції

Функція є диференційованою на проміжку *[a,b]*, якщо вона має похідну у кожній точці даного проміжку.

Теорема Ролля. *Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною на відрізку [a;b] і диференційованою на проміжку (a;b), а на кінцях проміжку набирає рівні значення $f(a) = f(b)$, тоді всередині цього проміжку існує принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, в якій похідна $f'(c) = 0$.*

Теорема Лагранжа. *Якщо функція $y = f(x)$ є неперервою на відрізку [a;b] і диференційованою на проміжку (a;b), то всередині цього проміжку існує принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Теорема Коші. *Якщо функції* $y = f(x)$ *і* $y = g(x)$ *є неперервними на відрізку [a;b] і диференційованими на проміжку (a;b), причому* $g'(x) \neq 0$ *в кожній точці* $x \in (a,b)$, *тоді знайдеться така точка* $x = c$, $a < c < b$, *що виконується рівність* $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Правило Лопіталя

Сформулюємо поняття проколотого околу точки C з інтервала *(a;b).*

Проколотим δ –околом точки C називається інтервал $(c-\delta;c+\delta)\setminus\{c\}$ з виключеною точкою C, тобто множина точок $(c-\delta;c)\cup(c;c+\delta)$ з інтервала (a;b). Вибирається $\delta > 0$ таким, щоб $(c-\delta;c)\cup(c;c+\delta)\subset(a;b)$.

Правило Лопіталя. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені і диференційовані на множині* $(c-\delta;c)\cup(c;c+\delta)$*і, крім того, похідна* $g'(x) \neq 0$ *в кожній точці* $x \in (c-\delta;c+\delta)$, *причому* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, *тоді, якщо існує* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то існує і* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причому* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауважимо, що відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to c$ є невизначеністю $\dfrac{0}{0}$, якщо $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$.

Правило Лопіталя застосовують для розкриття невизначеностей наступних типів: $"\dfrac{\infty}{\infty}","\infty-\infty"$, $"0\cdot\infty"$, $"1^{\infty}","0^{0}","\infty^{0}"$.

Зауваження. Правило Лопіталя має місце і при $x \to \infty$.

Приклади 11-21.

Наведемо два приклади, в яких не варто застосувати правило Лопіталя.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3 - 4x^2 + 9}{15x^3 + 8x + 7} = \dfrac{1}{3}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n - \sqrt[3]{2n^2})(\sqrt{4n^4 + 7n} - 5n)}{(9n^2 + 4n)\sqrt[3]{27n^3 + 3n + 1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n\cdot 2n^2}{9n^2\cdot 3n} = \dfrac{2}{9}$.

В наступних прикладах скористаємося правилом Лопіталя.

13. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{8x^3 - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x - 3}{24x^2} = -\dfrac{1}{6}$.

14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{5}{3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{2\dfrac{1}{1+2x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)\cdot e^{2x}=1$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{x^2})=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2\sin x+2x\cdot\cos x+x^2\cdot\sin x-2x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin x\cdot(2+x^2)}=\dfrac{1}{2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to 2}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}=\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)=$

$=\cos 2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{x-2}}{\dfrac{e^x}{e^x-e^2}}=\cos 2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{e^x(x-2)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{\cos 2}{e^2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x}{1}=\cos 2.$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=(0\cdot(-\infty))=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\cdot tg\,\dfrac{x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\pi-x}{ctg\,\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to \pi}2\sin^2\dfrac{x}{2}=2$.

20. $\lim\limits_{x\to 3}(2-\dfrac{x}{3})^{tg\frac{\pi x}{6}}=e^{2/\pi}$, де $\lim\limits_{x\to 3}tg\,\dfrac{\pi x}{6}\ln(2-\dfrac{x}{3})=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2-\dfrac{x}{3})}{ctg\,\dfrac{\pi x}{6}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{\pi(2-\dfrac{x}{3})}=\dfrac{2}{\pi}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x\cdot(e^{2x}-1)}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot e^{2x}}{4\cos 4x}=\dfrac{1}{2}.$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Обчислити границі користуючись правилом Лопіталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2\mathrm{x}}{x^2-x^2+x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+2\mathrm{x}-4}{x^2-x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2\mathrm{x}+1}{x^2-2x^2+x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin x}$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{e^x-1}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{e^{5x}-1}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg5x}$;
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{tg2x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\sin^3 5x}$;
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{1-\cos x^2}$;
14. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$;
16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 5x}-\dfrac{1}{5x}\right)$;
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{\cos 4x-\cos 5x}$;
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$;
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 7x-\cos 8x}$;
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg7x}$.

5.3. Дослідження поведінки функції та побудова її графіка

Зростання та спадання функцій

Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на проміжку *[a,b],* якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: $\forall x_1, x_2$, таких що $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$ називається *спадною* на проміжку *[a,b],* якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції: $\forall x_1, x_2$, таких що $x_1 < x_2$ виконується $f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема.

1) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], і зростає на цьому проміжку, то $f'(x) \geq 0$.

2) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], а $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, то вона є зростаючою на [a;b].

Доведення:

1. Розглянемо відношення $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Якщо Δx додатне, то для зростаючої функції чисельник $f(x+\Delta x) - f(x)$ теж додатній, і $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}>0$;

якщо Δx від'ємне, то чисельник $f(x+\Delta x) - f(x)$ теж від'ємний, і $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}>0$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, отже $f'(x) \geq 0$.

2. Нехай $f'(x) > 0$ при $\forall x \in [a;b]$.Розглянемо два довільних значення x_1 і x_2, що належать проміжку $[a;b]$, і нехай $x_1 < x_2$.

За теоремою Лагранжа запишемо

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2$.

За умовою $f'(\xi) > 0$, отже $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто функція $f(x)$ є зростаючою.

Таким чином теорема доведена повністю.

Теорема.

1) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], і спадає на цьому проміжку, то $f'(x) \leq 0$.

2) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], а $f'(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$, то вона є спадною на [a;b].

Доведення аналогічне попередньому.

Екстремум функції

Кажуть, що функція $y = f(x)$ в точці x_1 має локальний максимум (скорочено $\max$), якщо знайдеться такий δ –окіл точки x_1, в межах якого значення $f(x_1)$ є найбільшим серед всіх значень цієї функції $f(x)$.

Функція $y = f(x)$ в точці x_2 має локальний мінімум ($\min$), якщо знайдеться такий δ –окіл точки x_2, в межах якого значення $f(x_2)$ є найменшим серед всіх значень цієї функції $f(x)$.

Скажемо, що функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум, якщо ця функція має в указаній точці або локальний максимум, або локальний мінімум.

Необхідна умова існування екстремуму

Теорема. *Якщо диференційована функція $y = f(x)$ в точці $x = x_1$ має локальний екстремум в точці x_1, то її похідна в цій точці обертається в нуль:* $f'(x_1) = 0$.

Зауважимо, що в деяких випадках функція може мати екстремум, і в такій точці, де похідна не існує. Рівність нулю похідної функції є лише необхідною і не є достатньою умовою локального екстремуму диференційованої в точці функції.Точки, в яких похідна не існує або перетворюється в нуль, називаються критичними точками першого роду.

Достатні умови існування екстремуму:

1) якщо при переході через критичну точку похідна змінює знак з „+” на „-”, то в цій точці функція має $\max$, а якщо з „-” на „+” – то $\min$.
2) якщо в критичній точці $f''(x) > 0$, то в цій точці функція має $\min$, а якщо $f''(x) < 0$, то функція має $\max$.

Приклади 22-23.

22. Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

- $D(y)$: R;
- $y' = x^2 - 4x + 3$, $y'' = 2x - 4$,
- $y' = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$,

  $y''(1) = -2 < 0$, $y''(3) = 2 > 0$,

  отже, $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = 2\dfrac{1}{3}$, $y_{\min}(3) = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$.

23. Знайти екстремум функції та проміжки зростання і спадання функції $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$:

- $D(y)$: R $\{x \neq 0\}$,
- $y'=\dfrac{(2x-1)x^2-2x(x^2-x-2)}{x^4}=\dfrac{x+4}{x^3}$,
- $y'=0$, $\dfrac{x+4}{x^3}=0$, $x=-4$.

Складемо таблицю, в якій визначимо інтервали знакосталості та критичні точки:

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	$(0;+\infty)$
y'	+	0	–	$\bar{\exists}$	+
y	↗	max	↘	$\bar{\exists}$	↗

$y_{\max}(-4)=\dfrac{9}{8}$.

Дана функція на проміжках $(-\infty;-4)$, $(0;+\infty)$ зростає, а на проміжку (-4;0) спадає.

Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Неперервна на проміжку *[a;b]* функція приймає своє найбільше та найменше значення або в точках локального екстремуму або на кінцях проміжку.

Для того, щоб знайти найбільше та найменше значення функції, потрібно:

1) знайти критичні точки;

2) виключити з розгляду ті критичні точки, які не входять в заданий проміжок;

3) обчислити значення функції в критичних точках та на кінцях проміжку;

4) порівняти їх.

Приклад 24.

Знайти найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ на проміжку [0;2].

1. $y'=x^2-4x+3$

$y'=0$, $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=3$;

точка $x_1 \ =3 \notin [0;2]$.

2. $y(0)=1$, $y(2)=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$, $y(1)=\frac{7}{3}$ (згідно з даними попереднього прикладу 1 це локальний екстремум);

3. $y_{нм}=y(0)=1,\ y_{нб}=y(1)=\frac{7}{3}.$

Опуклість та увігнутість функції. Точки перегину

Неперервна функція $y=f(x)$, що має похідні до другого порядку включно, називається *опуклою* на *[a;b]* , якщо всі точки кривої на цьому проміжку знаходяться під дотичними, проведеними до цієї кривої в будь-якій точці цього проміжку.

Неперервна функція $y=f(x)$, що має похідні до другого порядку включно, називається *увігнутою* на *[a;b]* , якщо всі точки кривої знаходяться над дотичними, проведеними до цієї кривої в будь-якій точці цього проміжку.

Точки, при переході через які змінюється опуклість на увігнутість, називаються точками перегину.

Теорема. *Якщо неперервна функція $y=f(x)$ на [a;b] має похідну другого порядку, причому в усіх точках цього проміжку $f''(x)\le 0$, то на цьому проміжку функція опукла.*

Теорема. *Якщо неперервна функція $y=f(x)$ на [a;b] має похідну другого порядку, причому в усіх точках цього проміжку $f''(x)\ge 0$, то на цьому проміжку функція увігнута.*

Якщо функція $y=f(x)$ в точці $x=x_1$ має точку перегину, то в цій точці друга похідна або не існує, або дорівнює нулю (критичні точки 2-го роду).

Приклад 25.

Дослідити на опуклість та увігнутість функцію $y=\frac{x^2-x-2}{x^2}$ та знайти точки перегину.

- $D(y)\ \{x\ne 0\}$
- $y'=\frac{(2x-1)x^2-2x(x^2-x-2)}{x^4}=\frac{x+4}{x^3}$;
- $y''=\frac{x^3-3x^2(x+4)}{x^6}=-\frac{2(x+6)}{x^4}$;

$x=-6$ - критична точка, 2-го роду.

Складемо таблицю:

x	$(-\infty;-6)$	-6	$(-6;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	$\overline{\exists}$	$-$
y		т.перег		$\overline{\exists}$	

Дана функція на проміжках $(-6;0)$, $(0;+\infty)$ є опуклою, а на проміжку $(-\infty;-6)$ - увігнутою, причому $y_{т.пер.}(-6)=\dfrac{7}{9}$.

Асимптоти функцій. Похилі асимптоти

1.Вертикальні асимптоти.

$x=a$ є вертикальною асимптотою функції $y=f(x)$, якщо в цій точці функція має розрив 2-го роду.

2. Рівняння похилих та горизонтальних асимптот шукаємо у вигляді: $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,а $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

Схема повного дослідження функції . Побудова графіків функцій

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність і непарність.
3. Визначити періодичність функції.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву.
5. Знайти асимптоти.
6. Знайти нулі функції(точки перетину з осями координат).
7. Знайти екстремум, інтервали зростання та спадання функції.
8. Точки перегину, інтервали опуклості та ввігнутості.
9. Побудова графіку.

Приклад 26.

Дослідити функцію та побудувати її графік: $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$.

1) $D(y)=\mathrm{R}\setminus\{x\neq 0\}$.
2) $y(-x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2}$ – функція ні парна, ні непарна.
3) Функція неперіодична.
4) $x=0$ – точка розриву другого роду

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x-2}{x^2}=-\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x-2}{x^2}=-\infty .$$

5) $x=0$ – вертикальна асимптота. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{\infty}=0$;

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2-x-2}{x^2}-0]=1,$$

отже $y=1$ – горизонтальна асимптота.

6) $y=0$, $x^2-x-2=0$, $\Rightarrow x_1=2, x_2=-1$ - нулі функції.

7) Запишемо функцію у виді: $y=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$, тоді

$y'=\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}=\frac{x+4}{x^3}$. Тобто $y'=0$, якщо $x+4=0$.

$x=-4$ – критична точка першого роду. Складемо таблицю.

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	(0;+∞)
y'	+	0	–	$\overline{\exists}$	+
y	↗	max	↘	$\overline{\exists}$	↗

$y_{\max}(-4)=\frac{9}{8}$.

8) Знайдемо y'', якщо $y'=\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}$, тоді

$y''=-\frac{2}{x^3}-\frac{12}{x^4}$, або $y''=\frac{-2(x+6)}{x^4}$.

$y''=0$, якщо $x=-6$ - критична точка другого роду.

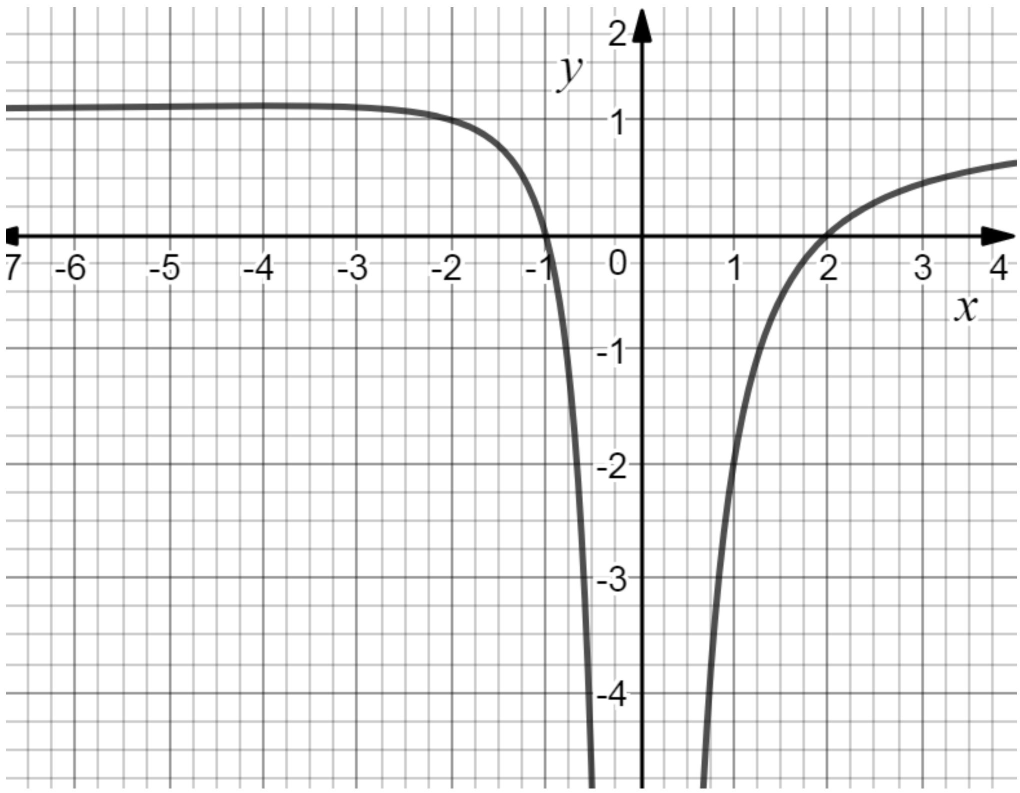
Складемо наступну таблицю.

x	$(-\infty;-6)$	-6	(-6;0)	0	(0;+∞)
y''	+	0	–	$\overline{\exists}$	–
y	∪	т.перег	∩	$\overline{\exists}$	∩

Функція увігнута на проміжку $(-\infty;-6)$ і опукла на проміжку $(-6;0)\cup(0;\infty)$.

$x=-6$ - точка перегину $y_{т.пер.}(-6)=\frac{10}{9}$.

9) Побудуємо графік цієї функції.



Приклад 27.

Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.

1) $D(y) = \{x \neq 0\}$.

2) $y(-x) = (-x)^2 + \dfrac{4}{(-x)^2} = x^2 + \dfrac{4}{x^2} = y(x)$ – функція парна, графік її симетричний відносно осі OY. Отже, надалі можна досліджувати функцію тільки при $x \in (0;+\infty)$.

3) Функція неперіодична.

4) $x = 0$ – точка розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + \dfrac{4}{x^2}) = \infty$.

5) Із попереднього пункту слідує, що $x = 0$ – вертикальна асимптота.
Похилі асимптоти:
$y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty}(x + \dfrac{4}{x^3}) = \infty$ – похилих асимптот немає.

6) $y \neq 0$, бо $x^2 + \dfrac{4}{x^2} \neq 0.$

Отже, графік функції не перетинає вісь *ox,* при $x \neq 0$ маємо $y > 0$.

7) $y' = 2x - \dfrac{8}{x^3}$ $2x - \dfrac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$,

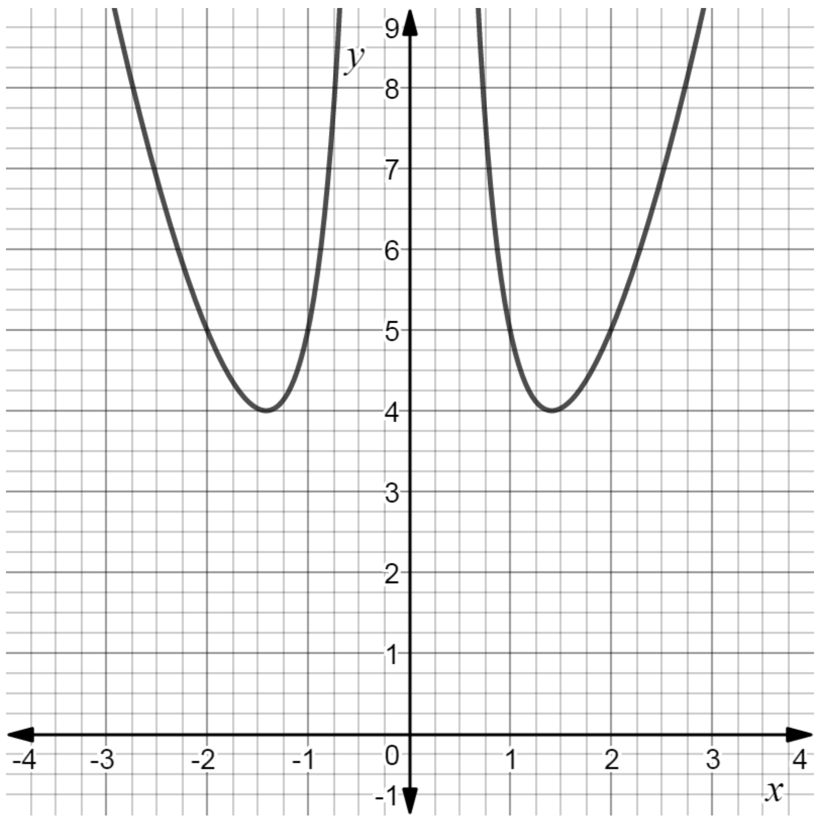
$y_{\min}(\sqrt{2}) = 4.$

x	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
y'	–	0	+
y	↘	min	↗

8) $y'' = 2 + \dfrac{24}{x^4} > 0$— функція є ввігнутою на всій області визначення.

x	$(0;+\infty)$
y''	+
y	$\smile$

9) Схематична побудова графіка.



Приклад 28.

Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x}{e^x}$.

1) $D(y) = \mathrm{R}$;

2) $y(-x) = \dfrac{-x}{e^{-x}}$ – функція ні парна, ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Точок розриву нема.

5) Функція неперервна, вертикальних асимптот нема.
Знайдемо похилі асимптоти у виді $y = kx + b$.

$k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x \cdot e^x} = 0$, $b_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, отже $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

$k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{xe^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = \infty$. При $x \to -\infty$ похилої асимптоти нема.

6) $y = \dfrac{x}{e^x} = 0$, коли $x = 0$ (нуль функції).

7) $y' = (x \cdot e^{-x})' = e^{-x}(1 - x)$.

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$,

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	–
y	$\nearrow$	max	$\searrow$

$y_{\max}(1) = \dfrac{1}{e}$.

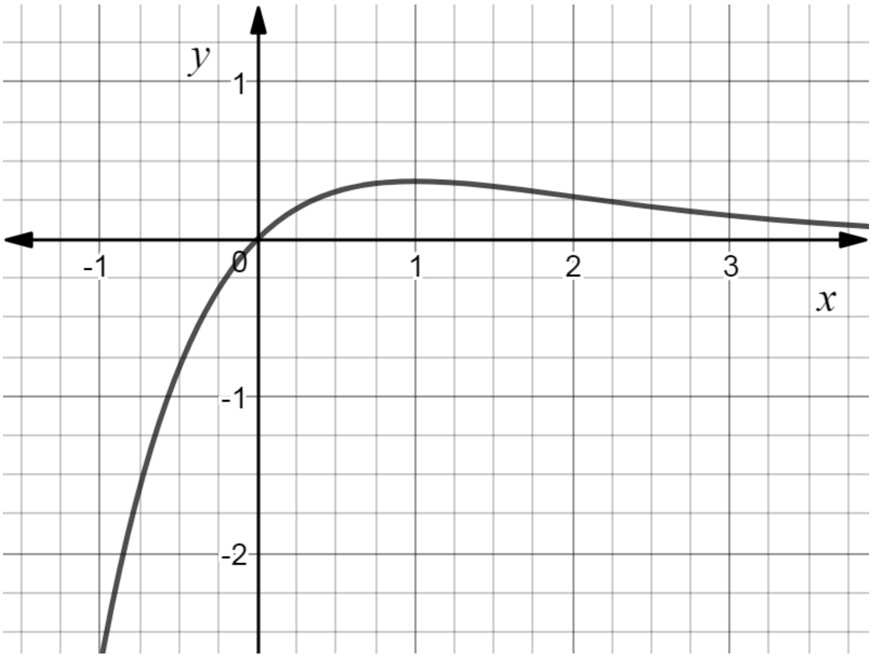
8) $y'' = (e^{-x}(1 - x))' = e^{-x}(x - 2)$.

$y'' = 0$, якщо $x = 2$.

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	–	0	+
y	$\frown$	т.перег.	$\smile$

$$y_{т.перег.}(2) = \frac{2}{e^2}.$$

9) Схематична побудова графіку.



ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Дослідити функції та побудувати їх графіки.

1. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

2. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

4. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

5. $y=32x^2(x^2-1)^3$;

6. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$;

7. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$;

8. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$;

11. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

12. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

14. $y=(x^2-1)^3$;

15. $xy=(x^2-1)(x-2)$;

16. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$;

19. $y=x\sqrt{1-x}$;

20. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

21. $y=\dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$;

22. $y=4x-\dfrac{x^3}{3}$;

23. $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}$;

24. $y=x^2(1-x)$;

25. $y=\dfrac{x^5}{5}-x^4+x^3$;

26. $y=\dfrac{x}{(x-1)(x-4)}$.

VI. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

6.1. Невизначений інтеграл

Первісна функція. Невизначений інтеграл та його властивості

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо для будь-яких значень x, де $x \in (a,b)$, функція $F(x)$ диференційована і має похідну $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функції $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3$, $F_3(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5$ є первісними для однієї й тієї ж функції $f(x) = x^2$.

Дійсно, $\left(\dfrac{x^3}{x}\right)' = x^2$, $\left(\dfrac{x^3}{x} - 3\right)' = x^2$, $\left(\dfrac{x^3}{x} + 5\right)' = x^2$.

Теорема. *Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ є первісними функціями для $f(x)$ на проміжку (a,b), то різниця між цими первісними дорівнює сталій $c: F_1(x) - F_2(x) = c$.*

Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на (a,b), то будь-яка інша первісна для функції $f(x)$ матиме вигляд $F(x) + c$.

Сукупність всіх первісних функцій для даної функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на цьому інтервалі та позначається символом $\int f(x)dx$. В цьому позначенні знак $\int$ називається знаком інтеграла, $f(x)$ — підінтегральна функція, $f(x)dx$ — підінтегральний вираз.

Зауважимо, що не будь-яка функція є первісною, тому що не кожна функція є диференційованою на (a,b).

З означення невизначеного інтегралу випливає:

1) Якщо $F(x)$ одна з первісних функцій для функції $f(x)$ на (a,b), тоді $\int f(x)dx = F(x) + c$, де c - довільна стала.

2) Якщо первісна (а отже, й невизначений інтеграл) для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) існує, тоді підінтегральний вираз у символічному записі $\int f(x)dx$ зображує диференціал будь-якої з цих первісних $dF(x) = f(x)dx$.

3) Похідна від інтегралу є підінтегральною функцією.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = f(x);$$

4) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

5) $\int d(F(x)) = F(x)+c$;

$\int dx = x + c$;

6) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

7) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$;

8) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b)+c$, якщо $\int f(x)dx = F(x)+c$.

Табличні інтеграли

1. $\int 0dx = c$, де c - довільна стала;
2. $\int 1\cdot dx = x + c$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$;
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;
5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$;
7. $\int e^x dx = e^x + c$;
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$;
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + c$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + c$;

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$;

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$;

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

16. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$, де $u = u(x)$ визначена і диференційована;

17. $\int \frac{u' \cdot dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$, де $u = u(x)$ визначена і диференційована;

18. $\int \frac{u' \cdot dx}{u} = \ln u + c$, де $u = u(x)$ визначена і диференційована.

Доведемо деякі з формул.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$;

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)\cdot x^\alpha = x^\alpha;$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2 \pm a^2}}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Приклади 1-38.

1. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$;

2. $\int 4x^5 dx = \frac{2}{3}x^6 + c$**;**

3. $\int \frac{x^7}{7} dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{x^8}{8} + c = \frac{x^8}{56} + c$**;**

4. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = c - \frac{1}{2x^2}$ **;**

5. $\int \frac{3dx}{x^4} = 3\int x^{-4} dx = c - \frac{1}{x^3}$ **;**

6. $\int \sqrt[4]{x^5} dx = \int x^{5/4} dx = \frac{4x^{9/4}}{9} + c = \frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} + c$ **;**

7. $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{x^7}} = 2\int x^{-7/5} = \frac{-5}{\sqrt[5]{x^2}} + c$ **;**

8. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2x^{-1/2} = \sqrt{x} + c$ **;**

9. $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$ **;**

10. $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + c$ **;**

11. $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{\sqrt{4}} arctg \frac{x}{\sqrt{4}} + c = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} + c$ **;**

12. $\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + c$ **;**

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c$ **;**

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp 4}\right| + c$ **;**

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 2}\right| + c$ **;**

16. $\int (3x+7)^{15} dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{16}}{16} + c$;

17. $\int (5x-4)^3 dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-4)^4}{4} + c = \frac{(5x-4)^4}{20} + c$;

18. $\int \frac{dx}{(3x-8)^5} = \int (3x-8)^{-5} dx = \frac{1}{3}\frac{(3x-8)^{-4}}{-4} + c = c - \frac{1}{12(3x-8)^4}$;

19. $\int \sqrt[3]{(2-3x)^2} dx = \int (2-3x)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{1}{3}\frac{3(2-3x)^{\frac{5}{3}}}{5} + c = c - \frac{(2-3x)^{\frac{5}{3}}}{5}$;

20. $\int \frac{5}{\sqrt[4]{(7-x)^3}} = 5\int (7-x)^{\frac{3}{4}} dx = -5\frac{4(7-x)^{\frac{1}{4}}}{1} + c = c - 20\sqrt[4]{7-x}$;

21. $\int \frac{3}{5-x}dx = -3\ln|5-x| + c$;

22. $\int \frac{dx}{3x+7} = \frac{1}{3}\ln|3x+7| + c$;

23. $\int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}e^{5x+1} + c$;

24. $\int e^{2-x}dx = -e^{2-x} + c$;

25. $\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$;

26. $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$;

27. $\int \sin(x+\frac{\pi}{4})dx = -\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + c$;

28. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$;

29. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2tg\frac{x}{2} + c$;

30. $\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2} + c$;

31. $\int \frac{dx}{(2x+3)^2+1} = \frac{1}{2}arctg\frac{2x+3}{1} + c$;

32. $\int \frac{dx}{(5-x)^2+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{5-x}{\sqrt{3}} + c$;

33. $\int \frac{dx}{(x+1)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1-2}{x+1+2}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + c$;

34. $\int \frac{dx}{(2x+3)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+3-1}{2x+3+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$;

35. $\int \frac{dx}{(5-x)^2-3} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{5-x-\sqrt{3}}{5-x+\sqrt{3}}\right| + c$;

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-(x+1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3+(x+1)^2}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+3}\right| + c$;

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-(6x+1)^2}} = \frac{1}{6}\arcsin\frac{6x+1}{3} + c$;

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^2-9}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+1+\sqrt{(3x+1)^2-9}\right| + c$.

Методи інтегрування невизначених інтегралів

Заміна змінних у невизначеному інтегралі

Нехай дано інтеграл $\int f(x)dx$, який безпосередньо проінтегрувати по x немає можливості, оскільки він не є табличним інтегралом.

Ефективним прийомом зведення підінтегрального виразу до виду, який присутній в табличних інтегралах, є заміна змінної(або підстановка). В підінтегральному виразі $f(x)dx$ вводять замість змінної x допоміжну змінну t, пов'язану з деякою залежністю: $x = \varphi(t)$. Причому, береться така функція $\varphi(t)$, яка має неперервну похідну $\varphi'(t)$, що забезпечує тим існування диференціала $dx = \varphi'(t)dt$. При такій заміні підінтегральний вираз представиться у вигляді $f[\varphi(t) \cdot \varphi'(t)]dt$. Ми одержали $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t) \cdot \varphi'(t)]dt$. В правій частині останньої рівності підінтегральна функція $f[\varphi(t) \cdot \varphi'(t)]$ є функцією від t. Якщо виявиться, що ця функція $f_1(t) = f[\varphi(t) \cdot \varphi'(t)]$ є такою, при якій $\int f_1(t)dt$ уже належить до табличних або зводиться до табличних простіше, ніж вихідний інтеграл , тоді наша заміна змінної і наше перетворення досягає мети.

На запитання: як вибрати вдалу підстановку(заміну змінної), однозначної відповіді дати не можна. В інтегральному численні формулюють правила заміни змінних для важливих частинних випадків(див. приклади). Після того, як інтеграл буде обчислений по змінній t, потрібно повернутися до старої змінної x.

Наприклад,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4} = \int \frac{2t}{t+4}dt = 2\int \frac{(t+4)-4}{t+4}dt = 2\int \left(\frac{t+4}{t+4} - \frac{4}{t+4}\right)dt = 2\int \left(1 - \frac{4}{t+4}\right)dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = 2(t - 4\ln|t+4|) + c = 2(\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+4|) + c\,.$$

Приклади 39-41.

39. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{t} + c = c - \sqrt{t} = c - \sqrt{4-x^2}\,.$$

$$\left| \begin{array}{l} 4 - x^2 = t, \\ -2xdx = dt, \\ xdx = -\dfrac{1}{2}dt. \end{array} \right|$$

40. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\cos x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + c = c - 2\sqrt{2+\cos x}$.

$\begin{vmatrix} 2+\cos x = t, \\ -\sin xdx = dt, \\ \sin xdx = -dt. \end{vmatrix}$

41. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\cos^2 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{2+t^2}\right| + c = -\ln\left|\cos x + \sqrt{2+\cos^2 x}\right| + c$.

$\begin{vmatrix} \cos x = t, \\ -\sin xdx = dt, \\ \sin xdx = -dt. \end{vmatrix}$

Інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ неперервно диференційовані функції. Тоді справедлива формула:
$\int udv = uv - \int vdu$, яка називається формулою інтегрування частинами.

Доведення.

$d(uv) = vdu + udv,$

$udv = d(uv) - vdu.$

Проінтегруємо обидві частини:

$\int udv = \int d(uv) - \int v(du),$

$\int udv = uv - \int vdu.$

Інтегрування частинами використовується тоді, коли підінтегральна функція є:

I. Добутком степеневої на тригонометричну функцію.

II. Добутком степеневої на показникову функцію.

III. Добутком показникової на тригонометричну функцію.

IV. Деяких інших видів, зокрема добутком степеневої на логарифмічну функцію та обернену тригонометричну функцію.

Приклади 42-49.

42. $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = c - e^{-x}(x+1)$.

$\begin{vmatrix} u = x, \\ dv = e^{-x}dx, \\ du = dx, v = -e^{-x}. \end{vmatrix}$

43. $\int x^2\cos 2x dx=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-\int 2\frac{1}{2}\sin 2x\, x dx=$

$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x-(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx)=$

$=\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+c=\left(\frac{1}{2}x^2\right)\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x+C$.

$$\left|\begin{array}{l} u=x^2; \\ du=2xdx; \\ dv=\cos 2xdx; \\ v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x. \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} u=x; \\ du=dx; \\ dv=\sin 2xdx; \\ v=\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\cos 2x. \end{array}\right|$$

44. $\int x^2\ln x dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+c=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+c$.

$$\left|\begin{array}{l} u=\ln x, \\ dv=x^2dx, \\ du=\frac{dx}{x}, \\ v=\frac{x^3}{3}. \end{array}\right|$$

45. $\int\ln^2 xdx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx=x\ln^2 x-2(x\ln x-x)=x^2\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$.

$$\left|\begin{array}{l} u=\ln^2 x; \\ dv=dx; \\ du=\frac{2\ln x}{x}dx; \\ v=x. \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} u=\ln x; \\ dv=dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; \\ v=x. \end{array}\right|.$$

46. $\int x^2e^{2x}dx=2\cdot\frac{1}{2}x^2e^{2x}-2\cdot\frac{1}{2}\int e^{2x}xdx=x^2e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

$$\left|\begin{array}{l} u=x^2; \\ du=2xdx; \\ dv=e^{2x}dx; \\ v=\frac{1}{2}e^{2x}. \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} u=e^{2x}; \\ du=2e^{2x}; \\ dv=xdx; \\ v=\frac{x^2}{2}. \end{array}\right|$$

47. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$.

$$\left|\begin{array}{l} u = \ln x; \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}}dx; \\ du = \frac{1}{x}dx; \\ v = 2\sqrt{x}. \end{array}\right|$$

48. $\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{-d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$

$$\left|\begin{array}{l} u = \arcsin x; \\ dv = dx; \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx; \\ v = x. \end{array}\right|$$

49. $\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx =$

$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx) =$

$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx.$

Ми одержали рівняння відносно інтеграла $\int e^{2x}\cos 3x dx$

$$\left|\begin{array}{l} u = e^{2x}; \\ du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos 3x dx; \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x. \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} u = e^{2x}; \\ du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin 3x dx; \\ v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x. \end{array}\right|$$

Введемо позначення: $I = \int e^{2x}\cos 3x dx$.

$I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}I;$

$9I = 3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x - 4I;$

$13I = e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x);$

$$I = \frac{e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x)}{13} + c.$$

Інтегрування найпростіших раціональних дробів

До найпростіших раціональних дробів відносяться:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;
2. $\dfrac{A}{(x-a)^2}$;
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ – тричлен в знаменнику немає дійсних коренів;
4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, де квадратний тричлен в знаменнику немає дійсних коренів.

Проінтегруємо дроби 1-3.

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$.

2) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c$.

3) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}dx + \int \frac{B - \frac{A}{2}p}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (B - \frac{A}{2}p)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B - \frac{A}{2}p)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c.$$

Де використано підхід виділення повного квадрата:

$$x^2+px+q = (x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}) - \frac{p^2}{4} + q = (x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}).$$

Приклади 50-51.

$$\textbf{\textit{50.}}\int\frac{3x-5}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6-5}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-11}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)}{x^2+4x+5}dx-11\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-11\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-11arctg\,(x+2)+c\,.$$

$$\textbf{\textit{51.}}\int\frac{5x-6}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+1)-\frac{5}{2}-6}{x^2+x+1}dx=\frac{5}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{17}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{17}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{(x+\frac{1}{2})\cdot 2}{\sqrt{3}}=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{17}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

Інтегрування раціональних дробів

Нехай задано два многочлени з дійсними коефіцієнтами *P(x)* степеня *n* і *Q(x)* степеня *m*.

Частку $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ прийнято називати раціональним дробом.

Раціональний дріб називається правильним, якщо $n<m$ і неправильним, якщо $n\geq m$.

Для того, щоб проінтегрувати раціональний дріб потрібно встановити чи дріб правильний, чи неправильний.

Якщо дріб неправильний, потрібно спочатку виділити цілу частину, поділивши чисельник на знаменник, тоді під інтегралом буде сума деякого многочлена і правильного раціонального дробу. Тоді дістанемо:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int(k(x)+\frac{M(x)}{N(x)})dx=\int k(x)dx+\int\frac{M(x)}{N(x)}dx.$$

Дріб $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ потрібно розкласти на найпростіші дроби методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай,

$$N(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{\alpha_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot$$
$$\cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_r$,- дійсні корені многочлена $N(x)$, причому α_i – кратність кореня a_i. $i = \overline{1, r}$,а квадратні тричлени мають комплексні корені кратності β_j, $j = \overline{1, s}$.

Тоді цей дріб розкладеться на суму найпростіших дробів:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1^{\;1}}{x-a_1} + \frac{A_2^{\;1}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^{\;1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} +$$
$$+ \frac{A_1^{\;2}}{x-a_2} + \frac{A_2^{\;2}}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_2}^{\;2}}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \ldots +$$
$$+ \frac{A_1^{\;r}}{x-a_r} + \frac{A_2^{\;r}}{(x-a_r)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^{\;r}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} +$$
$$+ \frac{B_1^{\;1} x + C_1^{\;1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \frac{B_2^{\;1} x + C_2^{\;1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_1}^{\;1} x + C_{\beta_1}^{\;1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} +$$
$$+ \frac{B_1^{\;2} x + C_1^{\;2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)} + \frac{B_2^{\;2} x + C_2^{\;2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_2}^{\;2} x + C_{\beta_2}^{\;2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{\beta_2}} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1^{\;s} x + C_1^{\;s}}{(x^2 + p_s x + q_s)} + \frac{B_2^{\;s} x + C_2^{\;s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta_s}^{\;s} x + C_{\beta_s}^{\;s}}{(x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}}.$$

В цьому розкладі великими буквами в чисельнику позначено деякі дійсні сталі, частина із яких може бути рівна нулю. Для того, щоб визначити ці коефіцієнти потрібно додати дроби у правій частині. Одержаний дріб є такий, що знаменник даного дробу є рівним знаменнику одержаного в правій частині. Через те, що дроби рівні потрібно прирівняти чисельники. Одержана рівність є такою, що і зліва і справа є многочлени. Многочлени є рівні тоді і тільки тоді коли рівні коефіцієнти при однакових степенях змінних. Прирівнявши коефіцієнти одержимо систему лінійних рівнянь, з якої і одержимо ці невідомі коефіцієнти. Після цього замість даного дробу треба записати суму одержаних дробів, які можна проінтегрувати.

Приклади 52-55.

52. Знайти $\int \frac{x}{(2x-1)(x+2)} dx.$

$$\frac{x}{(2x-1)(x+2)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+2};$$

$$x=Ax+2A+2Bx-B;$$

$$\begin{cases}A+2B=1;\\ 2A-B=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+2B=1;\\ 4A-2B=0.\end{cases}\quad\Rightarrow 5A=1;\ A=\frac{1}{5};B=\frac{2}{5};$$

$$\int\frac{xdx}{(2x-1)(x+2)}=\int(\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{2}{5}}{x+2})dx=\frac{1}{10}\ln|2x-1|+\frac{2}{5}\ln|x+2|+c.$$

53. Знайти $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$.

Дріб під знаком інтеграла є неправильним, тому виділимо з нього цілу частину:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-17 & x^2-4x+3 \\ & \underline{x^3-\ 4x^2+\ 3x} & x+4 \\ - & 4x^2-\ 3x-17 & \\ & \underline{4x^2-16x+12} & \\ & 13x-29 & \end{array}$$

Отже, $\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}=(x+4)+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}$.

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\int(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3})dx=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{x^2}{2}+4x+\int(\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3})dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+c.$$

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3};$$

$$13x-29=Ax-3A+Bx-B;$$

$$\begin{cases}A+B=13;\\ -3A-B=-29;\end{cases}\Rightarrow\quad A=8;\ B=5.$$

54. Знайти $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$.

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2};$$

$$x^2+4x+4=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx;$$

$$\begin{cases} A+B=1; \\ -2A-B+C=4; \\ A=4. \end{cases}$$

$B=-3;$

$C=9.$

$$\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\right)dx=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+c.$$

55. Знайти $\int\frac{3x+2}{(2x-1)(x^2+1)}$

$$\frac{3x+2}{(2x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1};$$

$$3x+2=Ax^2+A+2Bx^2-Bx+2Cx-C;$$

$$\begin{cases} A+2B=0; \\ -B+2C=3; \\ A-C=2. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=A-2; \\ B=-\dfrac{A}{2}; \\ \dfrac{1}{2}A+2(A-2)=3. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=\dfrac{14}{5}; \\ B=-\dfrac{7}{5}; \\ C=\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\int\frac{3x+2}{(2x+1)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{\frac{14}{5}}{2x+1}+\frac{-\frac{7}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+1}\right)dx=\frac{14}{5}\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\int\frac{-\frac{7}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{7}{5}\ln|2x+1|-\frac{1}{5}\int\frac{7x-4}{x^2+1}dx=\frac{7}{5}\ln|2x+1|-\frac{1}{5}\int\frac{7x}{x^2+1}dx+\frac{4}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{7}{5}\ln|2x+1|-\frac{7}{5}\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{7}{5}\ln|2x-1|-\frac{7}{10}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{4}{5}arctgx+c.$$

ЗАВДАННЯ ДО ТЕМИ

Знайти інтеграли **:**

1. $\int\left(2x^2-4x+\frac{2}{x}\right)dx$;
2. $\int(\sqrt{x}+2)^2\,dx$;
3. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx$;
4. $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3}}dx$;
5. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$;
6. $\int\frac{x^3+2}{\sqrt{x}}dx$;
7. $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$;
8. $\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3}dx$;
9. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$;
10. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$;
11. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$;
12. $\int\frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$;
13. $\int\left(5\sqrt[3]{x^2}+2x-3\right)dx$;
14. $\int\frac{4-tg^2 x}{\sin^2 x}dx$;
15. $\int\frac{2-\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;
16. $\int\frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}}dx$;
17. $\int\frac{(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt{x})^2}{\sqrt[4]{x}}dx$;
18. $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;
19. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dx$;
20. $\int\frac{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;
21. $\int\frac{3dx}{\sin^2 x}$;
22. $\int\frac{(x^2-9)^2}{x^4}dx$;
23. $\int\frac{(\sqrt[3]{x^2}-1)^2}{\sqrt{x^3}}dx$;
24. $\int\frac{3\sqrt[4]{x}-2\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx$;
25. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{2x}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx$;
26. $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;
27. $\int\left(\frac{1-x^2+3x^3}{\sqrt{x}}\right)dx$;
28. $\int\left(\frac{3\sqrt[3]{x}+2x^5}{4x}\right)dx$;
29. $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

Знайти інтеграли:

1. $\int (3x+2)^4\,dx$;

2. $\int e^{-3x}dx$;

3. $\int \sin\frac{2x}{3}\,dx$;

4. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

5. $\int \frac{dx}{3x+1}$;

6. $\int \sqrt{3-5x}dx$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$;

8. $\int \sqrt[3]{7x+5}dx$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^2(6x+1)}$;

10. $\int \left(e^{3x}-e^{\frac{x}{2}}\right)dx$;

11. $\int ctg(3x)dx$;

12. $\int \frac{dx}{\cos^2(2-9x)}$;

13. $\int \sqrt[4]{(7x+5)^3}\,dx$;

14. $\int e^{2x}\left(1-\frac{e^{-2x}}{x^3}\right)dx$;

15. $\int (5x+1)^{\frac{3}{5}}\,dx$;

16. $\int (tgx+\cos\sqrt{3}x)dx$;

17. $\int \frac{5-\sin^3(4x+1)}{\sin^2(4x+1)}\,dx$;

19. $\int \sqrt[3]{\left(\frac{5x}{2}+\frac{1}{3}\right)^2}\,dx$;

20. $\int tg(2x-1)dx$;

21. $\int \frac{3dx}{\sin^2(2x-1)}$;

22. $\int \left(\frac{e^{2x}+e^{-3x}}{\sqrt{3}}\right)dx$;

23. $\int \sqrt[5]{(7x+3)^2}\,dx$;

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x+1)^3}}$;

25. $\int \sqrt[3]{\left(3x+\sqrt{5}\right)^4}\,dx$;

26. $\int ctg(5x-2)dx$;

27. $\int \sin(4x-1)dx$;

28. $\int \frac{dx}{3-8x}$;

29. $\int \frac{4dx}{(3-2x)^6}$;

30. $\int \sqrt[7]{\left(\frac{x}{3}+2\right)^5}\,dx$.

Знайти інтеграли, використовуючи заміну змінної:

1. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$;

2. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx$;

3. $\int \sqrt[3]{\sin x} \cos x \, dx$;

4. $\int (x^3+1)^4 \cdot x^2 dx$;

5. $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x} dx$;

6. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}} dx$;

7. $\int (e^x+1)^3 \cdot e^x dx$;

8. $\int (x^2+5x+1)^2 (2x+5) dx$;

9. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}} dx$;

10. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} dx$;

11. $\int \frac{dx}{(1+x^2) arctgx}$;

12. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} dx$;

13. $\int \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$;

14. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

16. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$;

17. $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+2} \, dx$;

18. $\int \sin(e^x) \cdot e^x \, dx$;

19. $\int \frac{2x\,dx}{x^4+1}$;

20. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$;

21. $\int x \cos x^2 dx$;

22. $\int x \cdot e^{1-x^2} \, dx$;

23. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$;

24. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

25. $\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x} dx$;

26. $\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x} dx$;

27. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx$;

28. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

29. $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$;

30. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$;

31. $\int 2^{x^2} \cdot x\,dx$;

32. $\int e^x \cos(e^x) \, dx$;

33. $\int x \cdot e^{4-x^2} \, dx$;

34. $\int e^{x^3} \cdot x^2 \, dx$;

35. $\int \frac{2^x}{2^x+3} dx$;

36. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

37. $\int x^2 (2+x^3)^4 \, dx$;

38. $\int (x^3-4x)^{10} (3x^2-4) \, dx$;

39. $\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx;$

40. $\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx;$

41. $\int 3^{\cos x}\cdot \sin x\,dx;$

42. $\int e^{\cos x}\cdot \sin x\,dx;$

43. $\int \frac{4x}{1+3x^2}\,dx;$

44. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}\,dx;$

45. $\int x\cos(x^2+1)\,dx;$

46. $\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx;$

47. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x};$

48. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

49. $\int x\cos(1-x^2)\,dx;$

50. $\int (x^6-5x+1)^5(6x^5-5)\,dx;$

51. $\int 2^{\sin x}\cdot \cos x\,dx;$

52. $\int \sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}\cdot(2x+1)\,dx;$

53. $\int 2^{\arcsin x}\cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

54. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$

56. $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}\,dx;$

57. $\int (x^3+2)^{1/3}\cdot x^2\,dx;$

58. $\int x^2\sin(x^3+1)\,dx;$

59. $\int \cos x\cdot \sqrt[3]{\sin x+3}\,dx;$

60. $\int \sqrt[4]{2x^3+x}\cdot(6x^2+1)\,dx;$

61. $\int \frac{x}{\sin^2(x^2-1)}\,dx;$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x};$

63. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

64. $\int \frac{arcctg^4 x}{1+x^2}\,dx;$

65. $\int 5^{\cos x}\cdot \sin x\,dx;$

66. $\int x\cdot \cos(x^2-3)\,dx;$

67. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx;$

68. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx;$

69. $\int \frac{\sqrt{arctgx}}{1+x^2}\,dx;$

70. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx;$

71. $\int (x+1)\cdot \sin(x^2+2x)\,dx;$

72. $\int 2^{\sin x}\cdot \cos x\,dx;$

73. $\int 3^{x^3+1}\cdot x^2\,dx;$

74. $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2x}\,dx;$

Знайти інтеграли частинами:

1. $\int x \sin x dx$;
2. $\int x \cos 2x dx$;
3. $\int x e^{3x} dx$;
4. $\int (x-4) \sin 2x dx$;
5. $\int x e^{-x} dx$;
6. $\int x \sin \frac{x}{2} dx$;
7. $\int x \cos(3x-1) dx$;
8. $\int x^2 \sin 5x dx$;
9. $\int x^2 e^{-2x} dx$;
10. $\int \ln x dx$;
11. $\int x \ln(x-1) dx$;
12. $\int (x+3) \sin x dx$;
13. $\int (x-2) \cos x dx$;
14. $\int (x-5) e^{2x} dx$;
15. $\int x^2 \sin(2-5x) dx$;
16. $\int x^2 \cos(4x+1) dx$;
17. $\int \ln(x^2+1) dx$;
18. $\int x^2 \ln(1+x) dx$;
19. $\int x^2 \sin \frac{x}{2} dx$;
20. $\int (3x-1) e^{-2x} dx$;
21. $\int (2-4x) \sin 5x dx$;
22. $\int \frac{x e^{-4x}}{2} dx$;
23. $\int x \cos(7x+5) dx$;
24. $\int \frac{x dx}{\cos^2 4x}$;
25. $\int \frac{x dx}{\sin^2 5x}$;
26. $\int (2x+4) e^{3x} dx$;
27. $\int (x-3) \cos 4x dx$;
28. $\int (x+4) e^{-2x} dx$;
29. $\int (x+1)^2 e^x dx$;
30. $\int 7x^2 \sin 3x dx$.

Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій:

1. $\int \frac{x+2}{x^2-9}dx$;

2. $\int \frac{x^2-4x+1}{x^3-4x}dx$;

3. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}dx$;

4. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

5. $\int \frac{x-3}{x^2-16}dx$;

6. $\int \frac{x^2+4x}{x^3-25x}dx$;

7. $\int \frac{(x+2)}{x^2-9}dx$;

8. $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx$;

9. $\int \frac{x^2-1}{4x^3-x}dx$;

10. $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}dx$;

11. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;

12. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$;

13. $\int \frac{3-x^2}{x(x^2-64)}dx$;

14. $\int \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$;

15. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

16. $\int \frac{x^2-1}{(x-3)(x+2)}dx$;

17. $\int \frac{5x^3+2x^2-4x+1}{x(x+3)^2(x-2)^2}dx$;

18. $\int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$;

19. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-9)}dx$;

20. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$;

21. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$;

22. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$;

23. $\int \frac{3x^2}{x^3-a^3}dx$;

24. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$;

25. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$;

26. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$;

27. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4}dx$;

28. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

ПІСЛЯМОВА

Висловлюємо щиру подяку рецензентам Моці А.І. та Лазару В.Ф. за висловленні побажання та зауваження, значна частина, яких врахована в даному виданні.

Наступне видання посібника буде доповнене ще більшою кількістю ілюстративних прикладів та задач для самоперевірки і новими розділами.

Також будемо вдячні всім за пропозиції та зауваження щодо виправлення помилок та описок, які просимо направляти на поштову скриньку: natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Кондрук Н.Е., Маляр М.М., Ніколенко В.В., Шаркаді М.М.

ЕЛЕМЕНТИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник

Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк. 7,20. Зам. № 56. Наклад 150 прим.
Видавництво УжНУ «Говерла».
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18. E-mail: hoverla@i.ua

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року

Е 50 Елементи вищої математики: навч. Посібник / Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр, В.В. Ніколенко, М.М. Шаркаді. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – 124 с.

ISBN 978-617-7333-42-4

Розглянуто розділи вищої математики, що входять до програми перших курсів вищих навчальних закладів нематематичних спеціальностей – лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення. Теоретичний матеріал ілюструється великою кількістю прикладів і завдань для самостійної роботи. Посібник відповідає сучасним робочим та навчальним програмам з вищої математики.

Для студентів вищих навчальних закладів різних напрямів та спеціальностей, для яких «Вища математика» є непрофільною дисципліною, викладачів та всіх бажаючих самостійно вивчити даний курс.

УДК 517(075.8)