МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ф.Е. Гече

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО СИНТЕЗУ БАГАТОЗНАЧНИХ

НЕЙРОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Ужгород – 2018

Методичні вказівки до синтезу багатозначних нейронних елементів/ Гече Ф.Е. – Ужгород: Ужгород. нац.. ун-т.,2018. – 41с.

Рецензенти:

О. А. Кирилюк, к. ф. – м. н., доцент, доцент кафедри алгебри (ДВНЗ “УжНУ”),

О. Ю. Мулеса, к.т. н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ “УжНУ”).

Рекомендовано до видання кафедрою кібернетики і прикладної математики.
(протокол №7 від 30.01.2018 р.)

Зміст

Передмова

Останні роки можна назвати періодом стрімкого розвитку технічних засобів та інформаційних технологій із високими показниками продуктивності, що призвело до створення та запровадження ефективніших методів оброблення та аналізу даних і до нових методів розв'язування складних прикладних задач. У зв'язку з цим спостерігається підвищений інтерес до нейроподібних структур, які знайшли широке застосування у різних галузях людської діяльності – розпізнавання образів, прогнозуванні, бізнесі, медицині, техніці.

Значні ресурси, що інвестуються у створення програмного забезпечення і апаратної реалізації штучних нейромереж, а також широке застосування нейроподібних структур, свідчать про те, що проблема синтезу нейроелементів із різними функціями активації і побудова із них логічних схем є актуальною і практично важливою.

У першому параграфі встановлені умови існування спектрів дискретних функцій над полем Галуа, а також наводяться формули знаходження спектральних коефіцієнтів.

У другому параграфі наводиться критерії реалізованості багатозначних логічних функцій одним нейронним елементом.

У третьому параграфі наводиться метод синтезу багатозначних нейронних елементів над полем Галуа.

У 5,6 параграфах встановлені критерії реалізованості функцій багатозначної логіки на нейронних елементах відносно довільної системи характерів.

У сьомому параграфі наводиться спектральний метод синтезу двошарової нейромережі з багатозначних нейронних елементів над полем Галуа.

У даній методичній розробці наводяться зразки розв’язування типових завдань по змісту параграфів і надається ряд тренувальних вправ для самостійного розв’язування.

1. Спектр дискретних функцій над полем Галуа

Нехай $F = GF\left(p^m\right)$ – поле Галуа, що містить циклічні групи

$$H_{k_1} = \langle a_1 \mid a_1^{k_1} = 1\rangle, \quad H_{k_2} = \langle a_2 \mid a_2^{k_2} = 1\rangle, \quad \ldots \quad , H_{k_n} = \langle a_n \mid a_n^{k_n} = 1\rangle$$

і $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ – прямий добуток циклічних груп H_{k_i}.

Під дискретною функцією від n змінних над полем F будемо розуміти однозначне відображення вигляду $f : G_n \to F$.

Відмітимо, що спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to C$ над полем комплексних C завжди є можливим, оскільки поле C містить первісний корінь k-го степеня з 1 при будь-якому $k = HCK\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$ – найменше спільне кратне чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Якщо за поле F вибрати поле Галуа $F = GF\left(p^m\right)$, то спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to F$ не завжди є можливим. Спектральний аналіз дискретних функцій над $F = GF\left(p^m\right)$ буде можливим тільки тоді, коли вимірність векторного простору $V_F^n = \left\{f \mid f : G_n \to GF\left(p^m\right)\right\}$ і порядок групи характерів $X(G_n)$ над полем F співпадають.

Розглянемо задачу: чи можна розкласти функцію $f : G_n \to F$ за характерами групи G_n над полем F? Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 2$ і за поле F вибрати поле дійсних чисел R, то група характерів $X\left(G_n\right)$ групи G_n над полем R співпадає з системою базисних функцій Уолша-Адамара і спектральний аналіз дискретних функцій є можливим.

Якщо $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k\left(k > 2\right)$, і за поле F вибрати поле комплексних чисел C, то група характерів $X\left(G_n\right)$ над полем C співпадає з системою базисних функцій Віленкина-Крестенсона і спектральний аналіз дискретних функцій також можливий.

Нехай $k = HCK(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Покажемо, що коли поле $F = GF(p^m)$ містить первісний корінь k-го степеня з 1, то k націло ділить $u = p^m - 1$. Припустимо, що поле з примітивним елементом ε містить первісний корінь σ k-го степеня з 1. Тоді циклічна група $H_k = \left\langle \sigma \mid \sigma^k = 1 \right\rangle$ є підгрупою циклічної групи поля F і за теоремою Лагранжа [1] отримуємо, що k є дільником числа u. Нехай k націло ділить u. Розглянемо елемент $\sigma = \varepsilon^{u/k}$. Покажемо, що він буде первісним коренем з 1. Враховуючи властивості примітивного елемента ε поля F [2-4], можна стверджувати, що для будь-яких $i, j, r \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ $\sigma^i \neq \sigma^j$, якщо $i \neq j$ і $\sigma^r \neq 1$. Отже, k – найменше таке натуральне число, що $\sigma^k = 1$. Звідси робимо висновок, що спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to F$ є можливим тоді і тільки тоді, коли k націло ділить u.

Знайдемо аналітичний вигляд характерів групи G_n над полем $F = GF\left(p^m\right)$. Нехай $k = HCK(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, ε – примітивний елемент поля $F = GF\left(p^m\right)$, $H_k = \left\langle a \mid a^k = 1 \right\rangle$ – циклічна група порядку k і k є дільником числа u. Тоді для довільного елемента $h_i \in H_{k_i}$ існує таке число $j_{k_i} \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, що $h_i = a_i^{j_{k_i}}$, де $a_i = a^{k/k_i}$ – твірний елемент циклічної групи H_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Характери χ_{r_i} групи H_{k_i} над полем $F = GF\left(p^m\right)$ можуть бути записані так:

$$\chi_{r_i}(h_i) = \sigma_i^{r_i j_{k_i}}, \tag{1}$$

де $\sigma_i = \varepsilon^{u/k_i}$, $r_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$.

З того, що група G_n є прямим добутком циклічних груп $H_{k_1}, \ldots, H_{k_n}$, випливає: для довільного $\mathbf{g} \in G_n$ існують такі числа $j_i \in \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}, i = 1, 2, \ldots, n$, що $\mathbf{g} = \left(a_1^{j_1}, \ldots, a_n^{j_n}\right) = \left(a^{kj_1/k_1}, \ldots, a^{kj_n/k_n}\right)$.

На основі мультиплікативних властивостей характерів і з (1) маємо, що всі характери групи вичерпуються функціями

$$\chi_{(r_1,\ldots,r_n)}(\mathbf{g}) = \sigma^{t_1 r_1 j_1 + \ldots + t_n r_n j_n}, \tag{2}$$

де $\sigma = \varepsilon^{u/k}$, $t_i = \dfrac{k}{k_i}$, $r_i \in \{0,1,\ldots,k_i - 1\}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Якщо на множині всіх характерів групи G_n визначити добуток двох характерів $\chi_{(r_1,\ldots,r_n)}$, $\chi_{(q_1,\ldots,q_n)}$ наступним чином:

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \chi_{(r_1,\ldots,r_n)}(\mathbf{g}) \cdot \chi_{(q_1,\ldots,q_n)}(\mathbf{g}) = \chi_{(r_1 \oplus_1 q_1,\ldots,r_n \oplus_n q_n)}(\mathbf{g}),$$

де $\oplus_i$ – додавання за модулем k_i, то вони утворюють мультиплікативну групу характерів $X(G_n)$. З (2) випливає, що кількість різних характерів групи G_n над полем F дорівнює порядку групи G_n. Тоді з того, що характери ортогональні [2] і $|X(G_n)| = \dim_F V_F^n = k_1 k_2 \ldots k_n$ ($V_F^n = \{f \mid f : G_n \to F\}$=) , маємо: $X(G_n)$ утворює ортогональний базис лінійного простору V_F^n над полем F. Отже, довільний елемент $f \in V_F^n$ однозначно запишеться так:

$$f(\mathbf{g}) = \sum_{r_1=0}^{k_1-1} \ldots \sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\ldots r_n)} \chi_{(r_1,\ldots,r_n)}(\mathbf{g}), \tag{3}$$

де додавання та множення здійснюються у полі F.

Розклад (3) називається спектральним розкладом дискретної функції $f : G_n \to F$ за характерами групи G_n над полем F.

Помноживши обидві частини рівності (3) на $\chi^{-1}_{(q_1,\ldots,q_n)}$ і просумувавши ліву і праву частину отриманої рівності за всіма елементами групи G_n, маємо:

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n}\left(\sum_{r_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)}\chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g})\right)\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}).$$

З урахуванням ортогональності характерів, праву частину останньої рівності можна записати так:

$$\sum_{\mathbf{g}\in G_n}\left(\sum_{r_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)}\chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g})\right)\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{r_n=0}^{k_n-1} s_{(r_1,\dots,r_n)}\left(\sum_{\mathbf{g}\in G_n}\chi_{(r_1,\dots,r_n)}(\mathbf{g})\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g})\right) = s_{(q_1,\dots,q_n)}|G_n|.$$

Отже, спектральні коефіцієнти функції знаходяться за формулою:

$$s_{(q_1,\dots,q_n)} = |G_n|^{-1}\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\chi^{-1}_{(q_1,\dots,q_n)}(\mathbf{g}), \tag{4}$$

де $q_i \in \{0,1,\dots,k_i-1\}$ $(i \in \{1,2,\dots,n\})$.

Вищенаведені результати зі спектрального аналізу функцій за характерами групи проілюструємо на наступних прикладах.

Приклад 1. Нехай $n=2, k=k_1=k_2=2$ і $F=GF(3^2)$ – поле Галуа з модульним многочленом x^2+x+2. Спектральний аналіз функцій $f \in V_F^2 = \{f \mid f : G_2 \to F\}$ $(G_2 = H_2 \otimes H_2)$ можливий, оскільки k ділить число $u = 3^2 - 1$. Позначимо через ε твірний елемент циклічної групи поля $GF(3^2)$, тобто $GF\left(3^2\right)\setminus\{0\}=\left\{\varepsilon^j \,|\, j=0,1,\ldots,7\right\}$. Тоді $\sigma=\varepsilon^4=2$. Характери групи G_2 знаходимо за формулою (2):

Таблиця 1. Група характерів $X(G_2)$ над полем $GF\left(3^2\right)$

$G_2 \setminus \chi(G_2)$	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$
$(1,1)$	1	1	1	1
$(1,a)$	1	σ	1	σ
$(a,1)$	1	1	σ	σ
(a,a)	1	σ	σ	1

Нехай $f(1,1)=f(1,a)=f(a,1)=\sigma$ і $f(a,a)=0$. За формулою (4) знаходимо спектральні коефіцієнти $s_{(0,0)},s_{(0,1)},s_{(1,0)},s_{(1,1)}$ функції f:

$$s_{(0,0)}=|G_2|^{-1}(\sigma\cdot 1+\sigma\cdot 1+\sigma\cdot 1+0\cdot 1)=1\cdot 0=0,$$

$$s_{(0,1)}=|G_2|^{-1}(\sigma\cdot 1+\sigma\cdot\sigma+\sigma\cdot 1+0\cdot\sigma)=1\cdot(2\sigma+1)=2,$$

$$s_{(1,0)}=|G_2|^{-1}(\sigma\cdot 1+\sigma\cdot 1+\sigma\cdot\sigma+0\cdot\sigma)=1\cdot(2\sigma+1)=2,$$

$$s_{(1,1)}=|G_2|^{-1}(\sigma\cdot 1+\sigma\cdot\sigma+\sigma\cdot\sigma+0\cdot\sigma)=1\cdot(\sigma+2)=1.$$

Отже, $\forall \mathbf{g}\in G_2 \quad f(\mathbf{g})=2\chi_{(0,1)}(\mathbf{g})+2\chi_{(1,0)}(\mathbf{g})+\chi_{(1,1)}(\mathbf{g})$.

Приклад 2. Нехай $n=2, k_1=2, k_2=3$. Тоді $k=6$ і за поле F можна вибрати поле $GF(13)$, оскільки k ділить $u=13-1$. За твірний елемент циклічної групи поля $GF(13)$ можна вибрати $\varepsilon = 2$, тобто $GF(13) \setminus \{0\} = \{2^j | j = 0,1,\ldots,11\}$. Тоді $\sigma = 2^{12/6} = 4$. Побудуємо таблицю характерів групи $G_2 = H_2 \otimes H_3$ над полем $GF(13)$:

Таблиця 2. Група характерів $X(G_2)$ над полем $GF(13)$

$G_2 \setminus \chi(G_2)$	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(0,2)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$	$\chi_{(1,2)}$
$(1,1)$	1	1	1	1	1	1
$(1,b)$	1	3	9	1	3	9
$(1,b^2)$	1	9	3	1	9	3
$(a,1)$	1	1	1	12	12	12
(a,b)	1	3	9	12	10	4
(a,b^2)	1	9	3	12	4	10

де $H_2 = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$, $H_3 = \langle b \mid b^3 = 1 \rangle$.

Нехай $f(1,1) = f(1,b) = 6,\ f(1,b^2) = 0,\ f(a,1) = f(a,b) == f(a,b^2) = 2$. Використовуючи формулу (4), знаходимо спектральні коефіцієнти $s_{(0,0)}, s_{(0,1)}, s_{(0,2)}, s_{(1,0)}$, $s_{(1,1)}, s_{(1,2)}$ функції f у системі базисних функцій $X(G_2): s_f = (3,10,4,1,10,4)$.

Зауваження. Для знаходження спектральних коефіцієнтів $s_{(r_1,\ldots r_n)}$ дискретних функцій $f \in V_F^n$ можна застосовувати швидкі алгоритми, які базуються на відомій теоремі з теорії зображень груп [5] і факторизації матриць [6].

Тренувальні прави.

1. Нехай $n=3, k=k_1=k_2=2$ і $F=GF\left(3^2\right)$ – поле Галуа з модульним многочленом x^2+x+2. Знайти спекр дискретної функції f: $f(1,1,1)=f(1,1,a)=f(a,a,1)=2$, $f(1,\mathrm{a},1)=f(1,a,a)=f(a,1,a)=f(a,a,a)=1$ і $f(a,1,1)=0$ у системі базисних функцій $X\left(G_3\right)$.

2. Нехай $n=3, k=k_1=k_2=2$ і $F=GF\left(3^2\right)$ – поле Галуа з модульним многочленом x^2+x+2. Знайти спекр дискретної функції f: $f(1,1,1)=f(1,1,a)=f(a,a,1)=1$, $f(1,\mathrm{a},1)=f(1,a,a)=f(a,1,a)=f(a,a,a)=2$ і $f(a,1,1)=0$ у системі базисних функцій $X\left(G_3\right)$.

3. Нехай $n=2, k=k_1=k_2=3$ і $F=GF(19)$ – поле Галуа. Знайти спекр дискретної функції f: $f(1,1)=f(1,a^2)=f(a,1)=f(a,a)=f(a^2,1)=4$, $f(1,\mathrm{a})=f(a^2,a)=f(a^2,a^2)=1$ і $f(a,\mathrm{a}^2)=0$ у системі базисних функцій $X\left(G_2\right)$.

4. Нехай $n=2, k=k_1=k_2=3$ і $F=GF(19)$ – поле Галуа. Знайти спекр дискретної функції f: $f(1,1)=f(1,a^2)=f(a,1)=f(a,a)=f(a^2,1)=2$, $f(1,\mathrm{a})=f(a^2,a)=f(a^2,a^2)=4$ і $f(a,\mathrm{a}^2)=8$ у системі базисних функцій $X\left(G_2\right)$.

5. Нехай $n=3, k_1=k_2=3, k_3=2$ і $F=GF(19)$ – поле Галуа. Знайти спекр дискретної функції f: $f(1,\mathrm{a},1)=f(1,a,a)=f(a^2,1,1)=f(a^2,1,a)=f(\mathrm{a},1,1)=0$, $f(1,1,1)=f(1,1,a)=f(a,a,1)=f(a,a,a)=f(a^2,a,1)=f(a^2,a,a)=1$, $f(1,a^2,1)=f(1,a^2,\mathrm{a})=f(\mathrm{a},a^2,1)=f(\mathrm{a},a^2,a)=f(\mathrm{a}^2,a^2,1)=f(\mathrm{a}^2,a^2,a)=2$, і $f(\mathrm{a}^2,1,1)=4$ у системі базисних функцій $X\left(G_3\right)$.

2. Реалізованість дискретних функцій одним нейронним елементом над полем Галуа

Скінченні поля і групи широко застосовуються в теорії логічних функцій і автоматів [7-9]. Особливо важливу роль відіграють скінченні поля в теорії кодування [7]. У роботі [10] показано, що будь-який скінченний автомат має ізоморфне зображення у вигляді лінійного автомата над деяким скінченним полем. Аналіз і синтез лінійних автоматів над довільним скінченним полем здійснюється традиційним методом спектрального аналізу.

Основні методи спектрального аналізу можуть бути успішно використані і для перевірки реалізованості дискретних функцій одним нейронним елементом над скінченним полем Галуа.

У цьому параграфі визначимо поняття нейроелемента над полем $GF(p^m)$ відносно довільної системи характерів групи, на якій визначена дискретна функція, і наведемо ряд критеріїв реалізовності дискретних функцій на такому елементі.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n, q$ – натуральні числа $(k_i \geq 2, i = 1, \ldots\ldots, n, q \geq 2)$ і $k = HCK(k_1, k_2, \ldots, k_n, q)$. Далі будемо розглядати тільки такі поля $F = GF(p^m)$, які задовольняють умову: $p^m - 1$ націло ділиться на k. Це означає, що поле $F = GF(p^m)$ містить циклічні групи H_{k_i}, H_q із відповідними твірними елементами $\sigma_i = \varepsilon^{u/k_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n), \sigma = \varepsilon^{u/q}$, де ε – примітивний елемент поля F, $u = card\, F - 1$.

Визначимо на множині $F \setminus \{0\}$ функцію $\mathrm{Fsign}\xi$ наступним чином:

$$\forall \xi \in F \setminus \{0\}\ \ \mathrm{Fsign}\xi = \sigma^j, \quad \text{якщо } \frac{ju}{q} \leq \deg \xi < \frac{(j+1)u}{q},$$

де $\deg \xi$ – степінь елемента $\xi \left(\xi = \varepsilon^{\deg \xi}\right), j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Нейронним елементом над полем $F = GF\left(p^m\right)$ називається логічний пристрій з $n+1$ входами $x_1,\ldots,x_n;x_0$ $(n \geq 1)$, які відповідно приймають значення з множин H_{k_i} $(i = 1,\ldots,n)$ та $H_0 = \{1\}$, і одним виходом, що приймає значення з множини H_q. Кожному входу ставиться у відповідність певний елемент ω_i поля F і значення вихідного сигналу знаходиться так: значення вхідних сигналів помножаться на відповідні елементи ω_i, після цього отримані величини додаються і на виході маємо значення $\mathrm{Fsign}\xi$ від отриманої суми.

Схематично НЕ над полем Галуа зображено так:

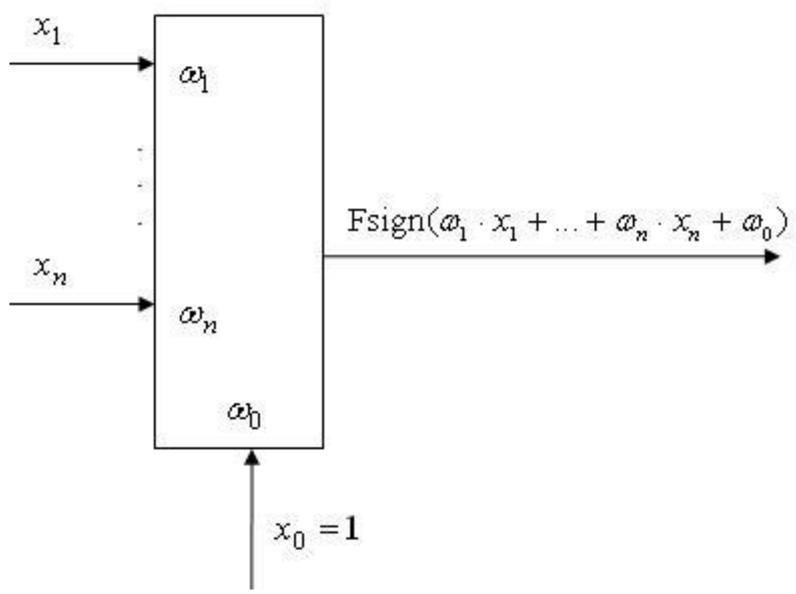

Рис. 1. Схема НЕ над полем Галуа

Вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ називається вектором структури нейронного елемента над полем Галуа $\left(\omega_i \in GF\left(p^m\right)\right)$.

Нехай $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ – прямий добуток циклічних груп H_{k_i}. Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF\left(p^m\right)$, якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$, що для всіх $\mathbf{g} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in G_n$ $f(\mathbf{g})=\mathrm{Fsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{g})$, де $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1\gamma_1 + \ldots + \omega_n\gamma_n + \omega_0$, і додавання та множення виконуються у полі F. Дискретна функція $f : G_n \to H_q$, що реалізується одним НЕ над полем F, називається нейрофункцією над F.

Теорема 1. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \;\; r(\mathbf{g})f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g}) \tag{5}$$

і

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \;\; 0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}. \tag{6}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція f реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ над полем F, тобто

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \;\; f(\mathbf{g}) = \mathrm{Fsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{g}). \tag{7}$$

Побудуємо функцію $r(\mathbf{g})$ наступним чином: для всіх $\mathbf{g}\in G_n$ покладемо

$$\deg r(\mathbf{g}) = \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) - \deg f(\mathbf{g}). \tag{8}$$

Тоді $\deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) = \deg r(\mathbf{g}) + \deg f(\mathbf{g})$. Тому для довільного $\mathbf{g}\in G_n$ $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = r(\mathbf{g})f(\mathbf{g})$. Припустимо, що на довільному фіксованому $\mathbf{g}\in G_n$ функція f приймає значення σ^j. Тоді з рівності (7) та з означення функції $\mathrm{Fsign}\,\xi$ випливає, що

$$\frac{ju}{q} \le \deg \mathrm{w}(\mathbf{g}) < \frac{(j+1)u}{q}. \tag{9}$$

Нерівність (9) перепишемо так:

$$\frac{ju}{q}-\deg f(\mathbf{g})\le \deg \mathrm{w}(\mathbf{g})-\deg f(\mathbf{g})<\frac{(j+1)u}{q}-\deg f(\mathbf{g}).$$

З останньої нерівності, враховуючи (8) і

$$\deg f(\mathbf{g})=\frac{ju}{q},\left(f(\mathbf{g})=\sigma^{j}=\varepsilon^{ju/q}\right),$$

безпосередньо маємо $0\le \deg r(\mathbf{g})<\frac{u}{q}$.

Достатність. Нехай для функції $f:G_n\to H_q$ існує така функція $r:G_n\to F\setminus\{0\}$, яка задовольняє умови (5), (6). Покажемо, що функція $f(\mathbf{g})$ реалізується над полем F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}==(\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$. З (5) та (6) випливає, що $\deg r(\mathbf{g})=\deg \mathrm{w}(\mathbf{g})-\deg f(\mathbf{g})$ і

$$0\le \deg \mathrm{w}(\mathbf{g})-\deg f(\mathbf{g})<\frac{u}{q}. \tag{10}$$

Нехай $\mathbf{g}\in G_n$ і $f(\mathbf{g})=\sigma^{j}$. Нерівність (10) з урахуванням рівності $\deg f(\mathbf{g})=\frac{ju}{q}$ можна записати так: $\frac{ju}{q}-\deg\sigma^{j}\le \deg \mathrm{w}(\mathbf{g})-\deg\sigma^{j}<\frac{(j+1)u}{q}-\deg\sigma^{j}$. Звідси для всіх $\mathbf{g}\in G_n$ $\frac{ju}{q}\le \deg \mathrm{w}(\mathbf{g})<\frac{(j+1)u}{q}$ і за означенням функції $\mathrm{Fsign}\xi$ маємо:

$$f(\mathbf{g})=\mathrm{Fsign}\,\mathrm{w}(\mathbf{g}).$$

Отже, функція $f(\mathbf{g})$ реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}=(\omega_1,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ і теорему доведено.

При розв'язуванні цілого ряду практичних задач розпізнавання образів, діагностики, при побудові нейромереж часто виникає проблема реалізації частково визначених дискретних функцій одним НЕ. Отже, розробка методів синтезу НЕ, які реалізують частково визначених дискретних функцій, є практично важливою задачею при побудові логічних схем у нейробазисі.

Нехай дискретна функція $f : G_n \to H_q$ визначена не на всіх елементах групи G_n. Позначимо через $D_n \subset G_n$ множину елементів, на яких функція f визначена, і нехай $D'_n = G_n \setminus D_n$ — множина елементів, на яких функція не визначена.

Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем F, якщо існує такий $n+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, що для всіх $\mathbf{g} \in D_n$ $f(\mathbf{g})$=Fsignw$(\mathbf{g})$.

Теорема 2. *Частково визначена дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем $F = GF(p^m)$ із вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ тоді і тільки тоді, коли існують такі повністю визначені функції $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, $h : G_n \to H_q$, що обмеження h на D_n співпадає з f ($f = h \mid D_n$) і для всіх* $\mathbf{x}$ *із* D_n *виконуються умови*

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; r(\mathbf{g}) f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}(\mathbf{g})$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; 0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема доводиться аналогічно до теореми 1.

Теорема 1 (2) встановлює реалізовність дискретних функцій (частково визначених дискретних функцій) одним НЕ над полем Галуа, але її важко застосовувати на практиці для знаходження вектора структур $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$. У наступному параграфі наведемо практично придатний метод синтезу НЕ над полем $F = GF(p^m)$.

3. Спектральний метод синтезу НЕ над полем Галуа

Нехай $f : G_n \to H_q$ – довільна дискретна функція. Виникає питання, чи реалізується функція f одним НЕ над полем $F = GF\left(p^m\right)$ і якщо так, то як знайти вектор структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ відповідного НЕ?

Нехай $X^*(G_n) = \left\{\chi_{(0,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(1,0,\ldots,0,0)}, \chi_{(0,1,\ldots,0,0)}, \ldots, \chi_{(0,0,\ldots,1,0)}, \chi_{(0,0,\ldots,0,1)}\right\}$.

Теорема 3. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q},$$

і

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$, *де* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *– скалярний добуток векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *над полем* F.

Доведення. *Необхідність.* Нехай дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Тоді, за теоремою 1, існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що $\forall \mathbf{x} == (x_1, \ldots, x_n) \in G_n$ $0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}$ і

$$r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n.$$

Останню рівність, враховуючи означення характерів групи G_n, можна переписати так:

$$r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \omega_0\chi_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \omega_1\chi_{(1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x}) + \ldots + \omega_n\chi_{(0,\ldots,0,1)}(\mathbf{x}). \qquad (11)$$

Функцію $r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \in V_F^n$ розкладемо за базисом простору V_F^n, що складається з характерів групи G_n, тобто

$$r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \sum_{\chi \in X^*(G_n)} s_\chi \chi(\mathbf{x}) + \sum_{\chi \in X(G_n)\setminus X^*(G_n)} s_\chi \chi(\mathbf{x}). \qquad (12)$$

З (11) і (12) випливає, що $s_\chi = 0$, якщо $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$. На основі рівності $|G_n|\, s_\chi = \left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right)$ отримаємо $\left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0$ для всіх $\chi \notin X^*(G_n)$. Отже, необхідність доведено.

Достатня умова є очевидною. Якщо дискретна функція $f: G_n \to H_q$ задовольняє умови теореми 3, то координати вектора структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ НЕ, що реалізує функцію f над полем F, знаходяться за формулами:

$$\omega_0 = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\right),$$

$$\omega_1 = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(1,0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\right), \qquad (13)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega_n = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\ldots,0,1)}(\mathbf{x})\right).$$

Приклад 3. Нехай $n = 2, k_1 = 2, k_2 = q = 3$ і $G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k = \text{НСК}(2,3,3)$ і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом 2, тобто

$GF(13)\setminus\{0\}=\{2^j \mid j=0,1,\ldots,11\}$. Твірними елементами груп H_2, H_3 над F відповідно будуть $\sigma_1 = 2^{12/2} = 12, \sigma_2 = 2^{12/3} = 3$ і областю значення дискретної функції $f: G_n \to H_q$ буде множина $\{1,3,9\}$. За допомогою наступної таблиці задаємо функції $f: G_n \to H_q$, $r: G_n \to F\setminus\{0\}$ і групу характерів $X(G_2)$ групи G_2 над полем F:

Таблиця 3. Визначення функції r на групі G_2

x_1	x_2	f	r	$\chi_{(0,0)}$	$\chi_{(0,1)}$	$\chi_{(0,2)}$	$\chi_{(1,0)}$	$\chi_{(1,1)}$	$\chi_{(1,2)}$
1	1	1	r_0	1	1	1	1	1	1
1	3	1	r_1	1	3	9	1	3	9
1	9	3	r_2	1	9	3	1	9	3
12	1	3	r_3	1	1	1	12	12	12
12	3	9	r_4	1	3	9	12	10	4
12	9	9	r_5	1	9	3	12	4	10

На основі теореми 3. та таблиці 3. побудуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь над полем F:

$$\begin{cases} r_0 + 3r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + 3r_5 = 0, \\ r_0 + 9r_1 + 9r_2 + 10r_3 + 10r_4 + 12r_5 = 0, \\ r_0 + 3r_1 + r_2 + 10r_3 + 12r_4 + 10r_5 = 0, \end{cases}$$

$r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in \{1,2,4,8\}$. Система має декілька розв'язків, одним з яких є $(1,8,1,1,4,2)$. Відповідно до отриманого розв'язку системи знаходимо вектор структури НЕ над F, що реалізує функцію f:

$$\omega_0 = 11 \cdot (1+8+3+3+36+18) = 11 \cdot 4 = 5,$$
$$\omega_1 = 11 \cdot (1+8+3+3\cdot 12+36\cdot 12+18\cdot 12) = 11 \cdot 7 = 12,$$
$$\omega_2 = 11 \cdot (1+72+9+3+9\cdot 9\cdot 4+9\cdot 3\cdot 2) = 11 \cdot 8 = 10.$$

Отже, $f(x_1, x_2)$ = $\mathrm{Fsign}(12x_1 + 10x_2 + 5)$.

Клас дискретних функцій, реалізовних одним НЕ залежить від вибраного поля Галуа. Результати програм із синтезу НЕ над F показують, що коли збільшуємо потужність поля F, то потужність класу нейрофункцій не зменшується. Для підтвердження цього факту наведемо наступні прості приклади. Нехай $n = 2, k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF(3)$. Число u ділиться на $k = HCK(k_1, k_2, q)$, отже, спектральний аналіз бульових функцій над F є можливим. Примітивним елементом поля F є $\varepsilon = 2$. У наступній таблиці наведемо всі бульові функції від двох змінних, які реалізуються одним НЕ над полем F:

Таблиця 4. Бульові нейрофункції над полем $GF(3)$

x_1	x_2	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
1	1	1	1	1	2	2	2
1	2	1	1	2	2	2	1
2	1	1	2	1	2	1	2
2	2	1	2	2	2	1	1

Векторами структури НЕ, які реалізують ці функції, відповідно будуть: $\mathbf{w}_{g_0} = (0,0;1), \mathbf{w}_{g_1} = (1,0;0), \mathbf{w}_{g_2} = (0,1;0), \mathbf{w}_{g_3} = (0,0;2), \mathbf{w}_{g_4} = (2,0;0), \quad \mathbf{w}_{g_5} = (0,2;0).$ Отже, клас бульових нейрофункцій від двох змінних над $GF(3)$ містить шість функцій $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$.

Розглянемо поле $F = GF(5)$. В якості примітивного елемента поля F можна вибрати $\varepsilon = 2$. Тоді $\sigma = \varepsilon^{\frac{5-1}{2}} = 4$. Бульові нейрофункції від двох змінних над $GF(5)$ наведемо у наступній таблиці:

Таблиця 5. Бульові нейрофункції над полем $GF(5)$

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	4	4
1	4	1	1	1	1	4	4	4	4	1	1	1	1	4	4	4	4
4	1	1	1	4	4	1	1	4	4	1	1	4	4	1	1	4	4
4	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	4

Векторами структури відповідних НЕ будуть:

$$\mathbf{w}_{f_0} = (0,0;1), \mathbf{w}_{f_1} = (2,2;2), \mathbf{w}_{f_2} = (2,3;2), \mathbf{w}_{f_3} = (1,0;0), \mathbf{w}_{f_4} = (3,2;2), \mathbf{w}_{f_5} = (0,1;0),$$

$$\mathbf{w}_{f_6} = (1,1;4), \mathbf{w}_{f_7} = (2,2;3), \mathbf{w}_{f_8} = (3,3;2), \mathbf{w}_{f_9} = (4,4;1), \mathbf{w}_{f_{10}} = (0,4;0), \mathbf{w}_{f_{11}} = (2,3;3),$$
$$\mathbf{w}_{f_{12}} = (4,0;0), \mathbf{w}_{f_{13}} = (3,2;3), \mathbf{w}_{f_{14}} = (3,3;3), \mathbf{w}_{f_{15}} = (0,0;4).$$

На основі таблиці 5 можна стверджувати, що всі бульові функції від двох змінних є нейрофункціями над $GF(5)$. Поле $GF(5)$ є мінімальним полем Галуа (полем із мінімальною потужністю), на якому всі бульові функції від двох змінних реалізуються одним НЕ.

Нехай $k = HCK(k_1, \ldots, k_n, q)(k_i \geq 2, q \geq 2)$ і $G_n = H_{k_1} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$.

Гіпотеза. Для довільного k і для довільного n можна вказати таке мінімальне поле Галуа $F_{\min}$, на якому всі дискретні функції $f : G_n \to H_q$ реалізуються одним НЕ.

Теорема 4. *Частково визначена дискретна функція* $f: G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w}$*, якщо існують такі повністю визначені функції* $r: G_n \to F \setminus \{0\}$, $h: G_n \to H_q$*, що обмеження* h *на* D_n *співпадає з* f ($f = h \mid D_n$) *і для всіх* $\mathbf{x}$ *із* D_n *виконуються умови*

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q} \ ,$$

і

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0 \,,$$

при $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$.

Доведення безпосередньо випливає з теорем 2 і 3.

Тренувальні прави.

1. Нехай $n = 2, k_1 = 2, k_2 = q = 3$ і $G_2 = H_2 \otimes H_3$. Функція $f: G_n \to H_q$ задається так: $f(1,3) = f(1,9) = 1,\ f(1,1) = f(12,3) = 3,\ f(12,1) = f(12,3) = 9$. Чи реалізується ця функція одним НЕ над поле GF(17)? Якщо так, то знайти вектор структури відповідного НЕ.

2. Нехай $n = 2, k_1 = q = 3, k_2 = 2$ і $G_2 = H_3 \otimes H_2$. Функція $f: G_n \to H_q$ задається так: $f(1,1) = f(1,12) = 1,\ f(3,1) = f(3,12) = 3,\ f(9,1) = f(9,12) = 9$. Чи реалізується ця функція одним НЕ над поле GF(17)? Якщо так, то знайти вектор структури відповідного НЕ.

2. Нехай $n = 3, k = k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF\left(3^2\right)$ – поле Галуа з модульним многочленом $x^2 + x + 2$. Функція $f: G_n \to H_q$ задається так: $f(1,1) = f(1,2) = f(2,1) = 1$ і $f(2,2) = 2$. Чи реалізується ця функція одним НЕ над полем $F = GF\left(3^2\right)$? Якщо так, то знайти вектор структури відповідного НЕ.

4. Інваріантні операції над дискретними нейрофункціями

При вивченні класів нейрофункцій над F важливо встановити ті перетворення над дискретними функціями, які зберігають властивість їх реалізованості одним НЕ. В нижченаведених теоремах опишемо операції, відносно яких клас дискретних нейрофункцій над F є замкненим.

Теорема 5. *Якщо дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n; \omega_0)$*, то функція* $f_1\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right) = f\left(x_1, \dots, \xi_i x_i, \dots, x_n\right)$*, де* $\xi_i \in H_{k_i}$*, також реалізується одним НЕ над полем* F *з вектором структури* $\mathbf{w}_1 = \left(\omega_1, \dots, \xi_i \omega_i, \dots, \omega_n; \omega_0\right)$.

Доведення. Дано, що функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n; \omega_0)$. Тоді на основі теореми 5.3 існує така функція $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, що

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$ і $0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \dfrac{u}{q}$. Нехай $\xi_i \in H_{k_i}$. Визначимо функцію $r_1\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right)$ так:

$$r_1\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\right) = r\left(x_1, \dots, \xi_i x_i, \dots, x_n\right).$$

Елемент $\mathbf{x}' = (x_1, \dots x_{i-1}, \xi_i x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ групи G_n запишемо наступним чином: $\mathbf{x}' = \left(1, \dots, 1, \xi, 1, \dots, 1\right) \circ \left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\right)$, де $\circ$ – символ операції покоординатного множення векторів. Характери $\chi \in X\left(G_n\right)$ є мультиплікативними функціями, визначеними на групі G_n, тобто $\chi(\mathbf{x}') == \chi(1, \dots, 1, \xi_i, 1, \dots, 1) \chi(\mathbf{x})$. Отже,

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \left(r(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}'), \chi^{-1}(\mathbf{x}')\right) =$$

$$= \chi^{-1}(1,\ldots,1,\xi_i,1,\ldots,1)\big(r_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}),\chi^{-1}(\mathbf{x})\big) = 0$$

при всіх $\chi \notin X^*(G_n)$, де $X^*(G_n) = \{\chi_{(0,0,\ldots,0,0)},\chi_{(1,0,\ldots,0,0)},\chi_{(0,1,\ldots,0,0)},\ldots,\chi_{(0,0,\ldots,0,1)}\}$.

Тоді з урахуванням того, що $\forall \mathbf{x} \in G_n \;\; 0 \le \deg r_1(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}$, маємо, що функція f_1 реалізується одним НЕ над полем F.

Нехай $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots,\omega_i,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ – вектор структури НЕ над F, що реалізує функцію $f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, а $\mathbf{w'} = (\omega'_1,\ldots,\omega'_i,\ldots,\omega'_n;\omega'_0)$ – вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f_1(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$. Тоді з (13) і з означення характерів групи G_n маємо:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1}\big(r_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\big) = |G_n|^{-1}\big(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0)}(\mathbf{x'})\big) = \omega_0$$

якщо $j \ne i$, то

$$\omega'_j = |G_n|^{-1}\Big(r_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\Big) = |G_n|^{-1}\Big(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(j)}{1},0,\ldots,0}(\mathbf{x'})\Big) = \omega_j$$

і

$$\omega'_i = |G_n|^{-1}\Big(r_1(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x})\Big) = |G_n|^{-1}\xi_i\Big(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\chi^{-1}_{(0,\ldots,0,\underset{(i)}{1},0,\ldots,0)}(\mathbf{x'})\Big) = \xi_i\omega_i$$

Отже, НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (\omega_1,\ldots,\xi_i\omega_i,\ldots,\omega_n;\omega_0)$ реалізує функцію f_1 . Теорему доведено.

Приклад 4. Нехай $n=2, k_1=2, k_2=3, q=3, G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k=6$ і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом $\varepsilon_2 = 2$. Функція $f(x_1,x_2)$=Fsign$(12x_1+10x_2+5)$ реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}=(12,10;5)$. Покажемо, що функція $f_1(x_1,x_2) = f(x_1,\xi x_2)$ також реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (12,10\xi;5)$, де ξ – довільний елемент циклічної групи H_3. В якості ξ виберемо 3 і задаємо функції f і f_1 за допомогою наступної таблиці:

Таблиця 6. Визначення функцій f і f_1

x_1	x_2	f	f_1
1	1	1	1
1	3	1	3
1	9	3	1
12	1	3	9
12	3	9	9
12	9	9	3

Нейронний елемент над $GF(13)$ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (12,4;5)$ реалізує функцію f_1, якщо $f_1(x_1, x_2) = \mathrm{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$. Знайдемо значення $\mathrm{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$ на кожному наборі:

$$(1,1) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5) = \mathrm{Fsign}8 = 1,$$

$$(1,3) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5) = \mathrm{Fsign}3 = 3,$$

$$(1,9) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 5) = \mathrm{Fsign}1 = 1,$$

$$(12,1) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 1 + 5) = \mathrm{Fsign}10 = 9,$$

$$(12,3) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 5) = \mathrm{Fsign}9 = 9,$$

$$(12,9) \to \mathrm{Fsign}(12 \cdot 12 + 4 \cdot 9 + 5) = \mathrm{Fsign}3 = 3.$$

Отже, $f_1(x_1, x_2) = \mathrm{Fsign}(12x_1 + 4x_2 + 5)$.

Теорема 6. *Якщо дискретна функція* $f: G_n \to H_q$ *реалізується одним НЕ над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *із вектором структури* $\mathbf{w} = \left(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0\right)$ *і* $k_i = k_j$, *то функція* $f_2\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j \ldots, x_n\right) = \; = f\left(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n\right)$ *також реалізується одним НЕ з вектором структури* $\mathbf{w}_2 = (\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots \ldots, \omega_i \ldots, \omega_n; \omega_0)$

Доведення. Дано, що функція $f: G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0)$. Тоді, на основі теореми 3, існує така функція $r: G_n \to F \setminus \{0\}$, що

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q} \tag{14}$$

і

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0 \tag{15}$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus X^*(G_n)$. Нехай $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_i, \ldots \ldots, x_j \ldots, x_n\right)$, $\mathbf{x'} = \left(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i \ldots, x_n\right)$, $r_2(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x'})$ і $\tilde{\chi}(\mathbf{x'}) = \chi(\mathbf{x})$. Очевидно, що

$$\max_{\mathbf{x} \in G_n} \{\deg r_2(\mathbf{x})\} = \max_{\mathbf{x} \in G_n} \{\deg r(\mathbf{x})\}.$$

Тому функція $r_2(\mathbf{x})$ задовольняє нерівність (14) і приймає значення у множині $F \setminus \{0\}$. На основі (2) систему рівнянь (15) можна переписати так:

$$\left(r_2(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \left(r(\mathbf{x'}) f(\mathbf{x'}), \tilde{\chi}^{-1}(\mathbf{x'})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X\left(G_n\right) \setminus X^*\left(G_n\right)$. Звідси з урахуванням нерівності $0 \le \deg r_2(\mathbf{x}) < \frac{u}{q}$ випливає реалізованість функції $f_2(\mathbf{x})$ одним НЕ. Нехай $\mathbf{w} = \left(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_j \ldots, \omega_n; \omega_0\right)$ – вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f(\mathbf{x})$. Позначимо через $\mathbf{w}_2 = \left(\omega'_1, \ldots, \omega'_i, \ldots, \omega'_j \ldots, \omega'_n; \omega'_0\right)$ вектор структури НЕ, що реалізує функцію $f_2(\mathbf{x})$. Тоді на основі (13) маємо:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\chi^{-1}_{(0,\dots,0)}(\mathbf{x'})\right) = \omega_0.$$

Якщо $s \neq j$ і $s \neq i$, то

$$\omega'_s = |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\dots,0,\underset{(s)}{1},0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\chi^{-1}_{(0,\dots,0,\underset{(s)}{1},0,\dots,0)}(\mathbf{x'})\right) = \omega_s$$

$$\omega'_i = |G_n|^{-1}\left(r_2(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}),\chi^{-1}_{(0,\dots,0,\underset{(i)}{1},0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = |G_n|^{-1}\left(r(\mathbf{x'})f(\mathbf{x'}),\tilde{\chi}^{-1}_{(0,\dots,0,\underset{(j)}{1},0,\dots,0)}(\mathbf{x'})\right) = \omega_j,$$

і, аналогічно, $\omega'_j = \omega_i$. Отже, функція $f_2(\mathbf{x})$ реалізується над F одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_2 = (\omega_1,\dots,\omega_j,\dots,\omega_i\dots,\omega_n;\omega_0)$. Теорему доведено.

Теорема 7. *Якщо дискретна функція $f: G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем $F = GF(p^m)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1,\dots,\omega_n;\omega_0)$, то функція $f_3(x_1,\dots,x_n) == \xi f(\xi_1 x_1,\dots,\xi_n x_n)$, де $\xi \in H_q$, $\xi_i \in H_{k_i}(i = 1,2,\dots,n)$, також реалізується одним НЕ над полем F з вектором структури $\mathbf{w}_3 = (\xi\cdot\xi_1\omega_1,\dots,\xi\cdot\xi_n\omega_n;\xi\cdot\omega_0)$.*

Доведення. Враховуючи теорему 5, доведення досить провести для випадку $f_3(x_1,\dots,x_n) = \xi f(x_1,\dots,x_n)$. Нехай функція $f: G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над F з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1,\dots,\omega_n;\omega_0)$. Покладемо $r_3(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})$. Тоді на основі теореми 3 маємо:

$$\left(r_3(\mathbf{x})f_3(\mathbf{x}),\chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = \xi\left(r(\mathbf{x})f(\mathbf{x}),\chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0, \text{для всіх } \chi \in X(G_n)\setminus X^*(G_n).$$

Тому $f_3(\mathbf{x})$ є нейрофункцією над F. Перейдемо до знаходження вектора структури $\mathbf{w}_3 = (\omega'_1,\dots,\omega'_n;\omega'_0)$ НЕ, що реалізує функцію $f_3(\mathbf{x})$. На основі (13) маємо:

$$\omega'_0 = |G_n|^{-1}\left(r_3(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = \ |G_n|^{-1} \cdot \xi\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = \xi\omega_0,$$

і для $1 \le j \le n$

$$\omega'_j = |G_n|^{-1}\left(r_3(\mathbf{x}) f_3(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = |G_n|^{-1} \cdot \xi\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}_{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}(\mathbf{x})\right) = \xi\omega_j.$$

Отже, функція $f_3(\mathbf{x})$ реалізується на НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_3 = \xi(\omega_1,\dots,\omega_n;\omega_0)$. Звідси та з теореми 5 безпосередньо випливає справедливість загального твердження. Теорему доведено.

Приклад 5. Нехай $n = 2, k_1 = 2, k_2 = 3, q = 3, G_2 = H_2 \otimes H_3$. Тоді $k = 6$ і за поле F виберемо поле $GF(13)$ з примітивним елементом $\varepsilon = 2$. Функція $f(x_1, x_2) = \mathrm{Fsign}(12x_1 + 10x_2 + 5)$ реалізується НЕ з вектором структури $\mathbf{w} = (12,10;5)$. Задаємо функції $f(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2) == 3f(12x_1, 3x_2)$ і

$$\mathrm{Fsign}(3\cdot 12\cdot 12\cdot x_1 + 3\cdot 3\cdot 10x_2 + 3\cdot 5) = \mathrm{Fsign}(3\cdot x_1 + 12x_2 + 2)$$

за допомогою наступної таблиці:

Таблиця 7. Реалізація функції f_3 над полем $GF(13)$

x_1	x_2	f	f_3	$\mathrm{Fsign}(3x_1 + 12x_2 + 2)$
1	1	1	1	$\mathrm{Fsign}(3+12+2) = \mathrm{Fsign}4 = 1$
1	3	1	1	$\mathrm{Fsign}(3+36+2) = \mathrm{Fsign}2 = 1$
1	9	3	9	$\mathrm{Fsign}(3+108+2) = \mathrm{Fsign}9 = 9$
12	1	3	3	$\mathrm{Fsign}(36+12+2) = \mathrm{Fsign}11 = 3$
12	3	9	9	$\mathrm{Fsign}(36+36+2) = \mathrm{Fsign}9 = 9$
12	9	9	3	$\mathrm{Fsign}(36+108+2) = \mathrm{Fsign}3 = 3$

Як бачимо, НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_3 = (3,12;2)$ реалізує функцію $f_3(x_1, x_2)$.

Тренувальні прави.

1. Нехай $n = 2, k_1 = 2, k_2 = 3, q = 3, G_2 = H_2 \otimes H_3$. Перевірте, чи може бути вектор $\mathbf{w} = (2,7;5)$ вектором структури НЕ над полем F=GF(13) і якщо так, то побудуйте функцію $f(x_1, x_2)$=Fsign$(2x_1 + 7x_2 + 5)$. Покажіть, що функція $f_1(x_1, x_2) = f(\xi x_1, x_2)$ також реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (2\xi,7;5)$, де ξ – довільний елемент циклічної групи H_2.

2. Нехай $n = 2, k_1 = q = 3, k_2 = 2, G_2 = H_3 \otimes H_2$. Перевірте, чи може бути вектор $\mathbf{w} = (3,5;6)$ вектором структури НЕ над полем F=GF(17) і якщо так, то побудуйте функцію $f(x_1, x_2)$=Fsign$(3x_1 + 5x_2 + 6)$. Покажіть, що функція $f_1(x_1, x_2) = f(\xi_1 x_1, \xi_2 x_2)$ також реалізується одним НЕ, де ξ_1, ξ_2 – довільні елементи відповідних циклічних груп H_3, H_2.

3. Нехай $n = 3, k_1 = k_2 = q = 2, G_3 = H_2 \otimes H_2 \otimes H_2$. Перевірте, чи може бути вектор $\mathbf{w} = (2,3,5;1)$ вектором структури НЕ над полем F=GF(7) і якщо так, то побудуйте функцію $f(x_1, x_2, x_3)$=Fsign$(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1)$. Покажіть, що функція $f_1(x_1, x_2, x_3) = \xi f(\xi x_1, \xi x_2, \xi x_3)$ також реалізується одним НЕ з вектором структури $\mathbf{w}_1 = (2\xi,7;5)$, де ξ – твірний елемент циклічної групи H_2.

4. Нехай $n = 3, k = k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF(3^2)$ – поле Галуа з модульним многочленом $x^2 + x + 2$. Перевірте, чи може бути вектор $\mathbf{w} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4; 1)$ (ε – примітивний елемент поля F) вектором структури НЕ над полем $F = GF(3^2)$ і якщо так, то побудуйте функцію $f(x_1, x_2, x_3)$=Fsign$(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^4 x_3 + 1)$. Покажіть, що функція $f_1(x_1, x_2, x_3) = \xi f(x_1, \xi x_2, x_3)$ також реалізується одним НЕ, де ξ – твірний елемент циклічної групи H_2.

5. Дискретні нейрофункції над полем Галуа відносно довільної системи характерів

Нехай $GF\left(p^m\right)$ – поле, що містить циклічні групи $H_{k_i} = \left\langle a_i \mid a_i^{k_i} = 1\right\rangle$, $i = 1,\ldots,n$, $H_q = \left\langle a \middle| a^q = 1\right\rangle$, $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ – прямий добуток циклічних груп H_{k_i}, і нехай $k = HCK\left(k_1, k_2, \ldots, k_n, q\right)$ є дільником числа $u = p^m - 1$. Із різних елементів групи $X\left(G_n\right)$, крім головного χ_0, утворимо множину $X = \left\{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_t}\right\}$ і відносно X розглянемо наступну математичну модель нейронного елемента:

$$f\left(\mathbf{g}\right) = \mathrm{Fsign}\left(\sum_{j=1}^{t} \omega_j \chi_{i_j}\left(\mathbf{g}\right) + \omega_0\right), \tag{16}$$

де $\mathbf{w}_\chi = \left(\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0\right)$ – вектор структури нейроелемента відносно системи X і $\mathbf{g} \in G_n$. Якщо $t = n$ і $\chi_{i_1} = \chi_{(1,0,\ldots,0)}, \ldots, \chi_{i_t} = \chi_{(0,\ldots,0,1)}$, то отримаємо модель НЕ, яка показана на рис. 1.

Нехай $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}) = \omega_1 \chi_{i_1}(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_t \chi_{i_t}(\mathbf{g}) + \omega_0$. Відносно нової математичної моделі НЕ (16) теореми 1, 2 і 3 можуть бути узагальнені наступним чином.

Теорема 9. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi = \left(\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0\right)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad r\left(\mathbf{g}\right) f\left(\mathbf{g}\right) = \mathrm{w}_\chi\left(\mathbf{g}\right)$$

і

$$0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема 10. *Частково визначена дискретна функція* $f: G_n \to H_q$ *реалізується одним НЕ над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існують такі повністю визначені функції* $r: G_n \to F \setminus \{0\}$, $h: G_n \to H_q$, *що обмеження* h *на* D_n *співпадає з* f ($f = h \mid D_n$) *і для всіх* $\mathbf{x}$ *із* D_n *виконуються умови*

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; r(\mathbf{g}) f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})$$

і

$$\forall \mathbf{g} \in D_n \;\; 0 \le \deg r(\mathbf{g}) < \frac{u}{q}.$$

Теорема 11. *Дискретна функція* $f: G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* $F = GF\left(p^m\right)$ *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_t; \omega_0)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r: G_n \to F \setminus \{0\}$, *що*

$$0 \le \deg r(\mathbf{x}) < \frac{u}{q},$$

і

$$\left(r(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \chi^{-1}(\mathbf{x})\right) = 0,$$

для всіх $\chi \in X(G_n) \setminus (X \cup \{\chi_0\})$.

Остання теорема дає можливість синтезувати НЕ над полем Галуа відносно системи характерів X.

Приклад 7. Нехай $n = 2, k_1 = k_2 = q = 2$ і $F = GF(3)$. Тоді бульова функція $\varphi(x_1, x_2) = 2^{(\deg x_1 + \deg x_2) \bmod 2}$ в алфавіті {1,2}, як бачимо у таблиці 5.4, не реалізується одним НЕ відносно системи характерів $X = \{x_1, x_2\}$, але реалізується одним НЕ відносно системи $X' = \{\chi_3\}$ з вектором структури $\mathbf{w} = (1;0)$. Приклад показує, що якщо змінити систему характерів, відносно якої розглядаються НЕ над полем F, то зміниться і клас нейрофункцій. Якщо за X вибрати групу характерів $X(G_n)$, то, очевидно, клас нейрофункцій співпаде з множиною усіх дискретних функцій типу $f : G_n \to H_q$.

6. Дискретні нейрофункції над полем комплексних чисел відносно довільної системи характерів

Нехай $H_{k_i} = \left\langle a_i \mid a_i^{k_i} = 1 \right\rangle$, $i = 1,\ldots,n$, $H_q = \langle a \mid a^q = 1 \rangle$ – циклічні групи, $G_n = H_{k_1} \otimes H_{k_2} \otimes \ldots \otimes H_{k_n}$ – прямий добуток груп H_{k_i}, і нехай $k = HCK(k_1, k_2, \ldots, k_n, q)$. Поле комплексних чисел C при довільному натуральному k містить k різних коренів k-го степеня з 1. Отже, спектральний аналіз дискретних функцій $f : G_n \to \mathrm{X}$ є завжди можливим. Визначимо на полі C, за винятком точки 0, функцію $\mathrm{Csign}\, z$ так:

$$\forall z \neq 0 \ \mathrm{Csign}\, z = \sigma^j, \quad \text{якщо } \frac{2\pi j}{q} \leq \arg z < \frac{2\pi(j+1)}{q},$$

де $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $\sigma = \varepsilon^{k/q}$, ε – первісний корінь k-го степеня з 1.

Із різних характерів групи G_n побудуємо множину $X = \{\chi_{i_1}, \chi_{i_2}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ і відносно X розглянемо наступну модель нейронного елемента:

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{Csign}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{x}) + \omega_0 \right).$$

Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним НЕ над полем C відносно системи характерів X, якщо існує такий вектор $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0) \in \mathrm{C}^{n+1}$, що для всіх $\mathbf{x} \in G_n$ $f(\mathbf{x}) = \mathrm{Csign}\, \mathrm{w}_\chi(\mathbf{x})$, де $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{x}) = \omega_1 \chi_{i_1}(\mathbf{x}) + \ldots \omega_m \chi_{i_m}(\mathbf{x}) + \omega_0$. Вектор $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ називається вектором структури нейроелемента відносно системи характерів X над полем комплексних чисел C.

Теорема 12. *Дискретна функція* $f : G_n \to H_q$ *реалізується одним нейронним елементом над полем* C *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ *відносно системи характерів* X *тоді і тільки тоді, коли існує така функція* $r : G_n \to \mathrm{X} \setminus \{0\}$, *що*

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad r(\mathbf{g}) f(\mathbf{g}) = \mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})$$

і

$$0 \le \arg r(\mathbf{g}) < \frac{2\pi}{q}.$$

Розглянемо вектори $\mathbf{a} = (1,0)$ і $\mathbf{b} = \left(\cos\frac{2\pi}{q}, \sin\frac{2\pi}{q}\right)$, які при $q > 2$ неколінеарні. Це означає, що функцію $r(\mathbf{x})$ можна записати у вигляді:

$$r(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon,$$

де $a(\mathbf{x}), b(\mathbf{x})$ набувають дійсних значень. У праці [11] показано, що функція $r(\mathbf{x})$ $(r : G_n \to \mathrm{X} \setminus \{0\})$, яка задовольняє умову

$$0 \le \arg r(\mathbf{g}) < \frac{2\pi}{q} (q > 2),$$

допускає зображення $r(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon$ тоді і тільки тоді, коли існують такі функції $a(\mathbf{x})\,(a : G_n \to \mathrm{R} \setminus \{0\})$, $b(\mathbf{x})(b : G_n \to \mathrm{R})$, що $a(\mathbf{x}) > 0$ і $b(\mathbf{x}) \ge 0$.

Теорему 12 на основі останнього твердження можна переформулювати так.

Теорема 13. *Дискретна функція $f : G_n \to H_q$ реалізується одним нейронним елементом над полем C із вектором структури $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ відносно системи характерів X тоді і тільки тоді, коли існують такі дві функції $a(\mathbf{x}), b(\mathbf{x})$, які визначені на G_n і набувають значення з R, що*

$$\forall \mathbf{x} \in G_n \quad (a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\varepsilon) f(\mathbf{x}) = \mathrm{w}_\chi(\mathbf{x}) \text{ і } a(\mathbf{x}) > 0, b(\mathbf{x}) \ge 0.$$

Зауважимо, що теорема13 невірна при $q = 2$, оскільки в цьому випадку вектори $\mathbf{a} = (1,0)$ і $\mathbf{b} = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0)$ колінеарні.

7. Спектральний метод синтезу двошарової нейромережі над полем Галуа

Нехай $k\ (k \geq 2)$ – довільне натуральне число і поле $F = GF\left(p^m\right)$ таке, що число k є дільником числа $u = p^m - 1$. Тоді поле F містить циклічну групу $H_k = \left\langle \sigma \mid \sigma^k = 1 \right\rangle$, де $\sigma = \varepsilon^{u/k}$, ε – примітивний елемент поля F.

Нехай $P_k^n = \{ f \mid f : G_n \to H_k \}$ – множина всіх функцій k-значної логіки від n змінних в алфавіті $H_k = \{1, \sigma, \ldots, \sigma^{k-1}\}$, $G_n = H_k \otimes \ldots \otimes H_k$ – прямий добуток n циклічних груп H_k. Позначимо через $P_k^n(F)$ множину всіх нейрофункцій від n змінних над полем F. Якщо поле F таке, що $P_k^n(F) = P_k^n$, то задача синтезу нейромережі вироджується, оскільки всі функції P_k^n є нейрофункціями, тобто реалізуються одним НЕ. Нехай поле F таке, що $P_k^n(F)$ є власною підмножиною P_k^n. Виберемо у множині $P_k^n(F)$ довільну систему функцій $\{f_1, \ldots, f_t\}$ і через $P(f_1, \ldots, f_t)$ позначимо множину всіх таких функцій f, які допускають зображення:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t - 1} s_i \varphi_i(\mathbf{x}), \tag{17}$$

де $\varphi_i(\mathbf{x}) = f_1^{i_1}(\mathbf{x}) f_2^{i_2}(\mathbf{x}) \ldots f_t^{i_t}(\mathbf{x}), i = i_1 k^{t-1} + i_2 k^{t-2} + \ldots + i_t, i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Рівність (17) допускає схематичне зображення, що показано на рис. 5.2. Якщо за систему функцій $\{f_1, \ldots, f_t\}$ вибрати систему функцій $\{x_1, \ldots, x_n\}(t = n)$, то, очевидно, що $P(x_1, \ldots, x_n) = P_k^n$, і задача синтезу двошарової нейромережі зводиться до синтезу вихідного НЕ відносно системи усіх характерів групи G_n над полем F. У цьому випадку перший шар є зайвим.

Якщо система функцій $\{f_1, \ldots, f_t\}$ така, що $P(f_1, \ldots, f_t) \subseteq P_k^n(F)$, то задача синтезу нейромережі є, очевидно, недоцільною.

Отже, систему функцій $\{f_1,\ldots,f_t\}$ треба вибрати так, щоб $P_k^n(F)$ була власною підмножиною множини $P(f_1,\ldots,f_t)$, і нейромережі будуємо для функцій $f \in P(f_1,\ldots,f_t) \setminus P_k^n(F)$.

Функції $\varphi_i(\mathbf{x})(i = 0,1,\ldots,k^t - 1)$ належать простору $V_F^n = \{f \mid f : G_n \to F\}$ з ортогональним базисом $X(G_n)$, а це означає, що кожну функцію однозначно можна записати у вигляді:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k^n-1} q_{ij}\chi_j(\mathbf{x}), \tag{18}$$

де q_{ij} — j-а складова спектра функції $\varphi_i(\mathbf{x})$. Об'єднавши рівності (17) і (18), одержимо:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t-1}\sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij}\chi_j(\mathbf{x}).$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $\chi_m^{-1}(\mathbf{x})$ і просумуємо по всіх $\mathbf{x} \in G_n$. Отримаємо:

$$\sum_{\mathbf{x}\in G_n} f(\mathbf{x})\chi_m^{-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{k^t-1}\sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij} \sum_{\mathbf{x}\in G_n}\chi_j(\mathbf{x})\chi_m^{-1}(\mathbf{x}).$$

Ліва частина останньої рівності з точністю до множника k^n співпадає з m-ою складовою r_m спектра вихідного сигналу мережі від вхідних змінних $x_1,\ldots,x_n$. Отже,

$$r_m = k^{-n}\sum_{i=0}^{k^t-1}\sum_{j=0}^{k^n-1} s_i q_{ij} \sum_{\mathbf{x}\in G_n}\chi_j(\mathbf{x})\chi_m^{-1}(\mathbf{x}). \tag{19}$$

Враховуючи властивість ортогональності характерів, рівність (19) можна переписати так:

$$r_m = \sum_{i=0}^{k^t-1} s_i q_{im}. \tag{20}$$

Співвідношення (20) є спектральним засобом визначення мережі. Складові спектра $r_m\left(m = 0,1,\ldots,k^n - 1\right)$ можуть бути знайдені за заданою функцією $f(\mathbf{x})$. Отже, синтез двошарової мережі зводиться до знаходження такого вектора $\mathbf{s} = \left(s_0, s_1, \ldots, s_{k^t-1}\right)$ і матриці $\left(q_{im}\right)$, яка перетворює $\mathbf{s}$ у відомий вектор $\mathbf{r} = \left(r_0, r_1, \ldots, r_{k^n-1}\right)$. При цьому перші $t+1$ рядки матриці $\left(q_{im}\right)$ відповідно мають співпадати зі спектрами функцій, що належать множині $P_k^n(F)$. Ці перетворення не дають практично придатний метод синтезу нейромережі. Основні труднощі полягають у знаходженні спектрів проміжкових функцій $\varphi_i(\mathbf{x})$, а також вибору вектора $\mathbf{s}$.

Розглянемо нейромережу (рис. 2)

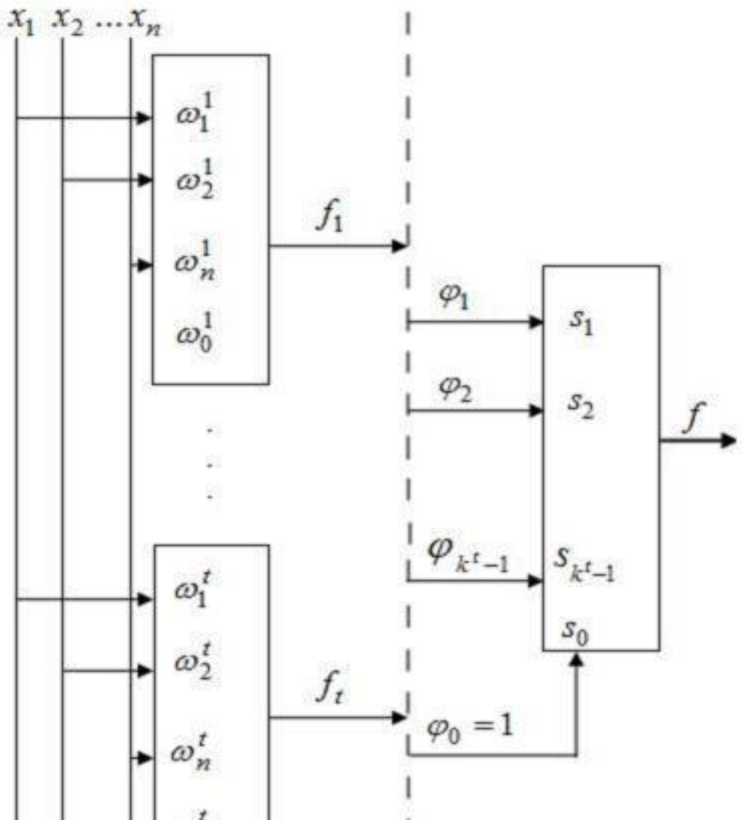

Рис. 2. Схема двошарової нейромережі

з наступним НЕ у другому шарі:

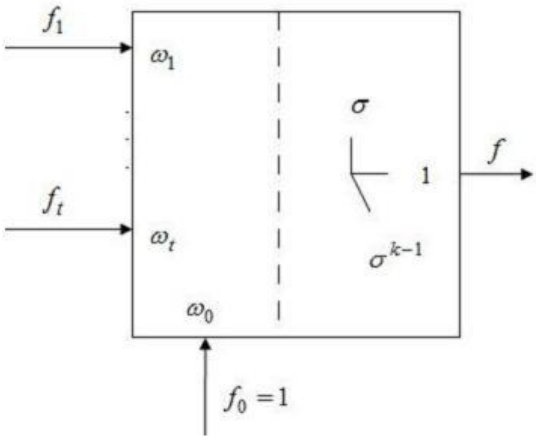

Рис. 3. Вихідний НЕ нейромережі

і розглянемо функцію

$$\mathrm{w}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{t} \omega_i f_i(\mathbf{x}), \tag{21}$$

що задає відображення $\mathrm{w}: G_n \to F \setminus \{0\}$. Розкладемо ліву і праву частини рівності (21) за характерами групи G_n. Тоді

$$\sum_{j=0}^{k^n-1} v_j \chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{k^n-1} \sum_{i=0}^{t} \omega_i q_{ij} \chi_j(\mathbf{x}), \tag{22}$$

де q_{ij} – j-а складова спектра функції f_i. Якщо покласти $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{k^n-1})$ і $\mathbf{r}_i = (q_{ij}), (j = 0, 1, \ldots, k^n - 1)$, то з (22) маємо:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{t} \omega_i \mathbf{r}_i, \tag{23}$$

де $\mathbf{v}$ – спектр функції $\mathrm{w}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{r}_i$ — спектр нейрофункції f_i над полем F. Якщо би спектр $\mathbf{v}$ був відомий, то задача синтезу двошарової нейромережі із заданим вихідним НЕ була б відносно простою. Але у загальному випадку спектр $\mathbf{v}$ невідомий, і при розв'язуванні задачі синтезу двошарової нейромережі накладаємо додаткові обмеження на вихідний НЕ, а саме, припустимо, що $\mathbf{v}$ співпадає зі спектром $\mathbf{r}$ функцій $f(\mathbf{x})$. Тоді рівність (23) можна переписати так:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^{t} \omega_i \mathbf{r}_i. \tag{24}$$

Таким чином, для синтезу двошарової нейромережі за таких обмеженнь на вихідний НЕ нам достатньо знайти множину спектрів $\mathbf{r}_i$ відповідних нейрофункцій f_i над полем F і такі числа ω_i, які задовольняють рівність (24). У загальному випадку знаходження величин ω_i є непростою задачею. Щоб уникнути цих труднощів, при знаходженні $\omega_i \in F$ використовують різні методи локальної мінімізації. В основі цих методів, як правило, лежать додаткові обмеження на кількість входів нейроелементів першого шару. При такому підході виникає питання: чи можна реалізувати будь-яку функцію з множини $P(x_1,\ldots,x_n)$ на двошаровій нейромережі, якщо перший шар містить тільки такі НЕ, кількість входів яких менша за кількість входів у нейромережі.

Теорема 14. *Якщо двошарова нейромережа* (рис. 2) *реалізує довільну функцію* $f \in P(x_1,\ldots,x_n)$, *то перший шар за умови* (24) *містить хоча б один нейроелемент, у якого кількість входів не менша за кількість входів самої мережі.*

Доведення. Доводити теорему будемо від супротивного. Припустимо, що можна синтезувати двошарову нейромережу за умови (24), яка реалізує довільну функцію $f \in P(x_1,\ldots,x_n)$, і кількість входів кожного нейроелемента вхідного шару менша за число n. Тоді така мережа має реалізувати і функцію $f(\mathbf{g}) = x_1^{k-1}(\mathbf{g})\cdot\ldots\cdot x_n^{k-1}(\mathbf{g})$, де n – кількість входів нейромережі, $x_i(\mathbf{g})$ — значення змінної x_i на елементі $\mathbf{g} \in G_n$. Знайдемо спектр $\mathbf{r} = (r_i), (i = 0,1,\ldots,k^n - 1)$ функції f у системі $X(G_n)$ над F. З ортогональної властивості характерів та з того, що $f \in X(G_n)$, випливає, що

$r_i = 0, (i = 0,1,\ldots,k^n - 2)$ і $r_{k^n - 1} = 1$. Легко бачити, що останній компонент спектра довільної функції, що реалізується НЕ першого шару, дорівнює нулю. Дійсно, кількість входів кожного нейроелемента першого шару обмежена зверху числом $\nu\ (\nu < n)$, а це означає, що спектр довільної функції, реалізованої такими нейроелементами, може містити не більше ніж k^ν ненульових складових, які мають порядкові номери, не більші за $k^\nu - 1$. Отже, $k^n - 1$-а складова спектра зваженої суми $\mathrm{w}(\mathbf{g}) = \omega_1 f_1(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_t f_t(\mathbf{g}) + \omega_0$ вихідного нейроелемента дорівнює нулю, оскільки спектр зваженої суми $\mathrm{w}(\mathbf{g})$ є лінійною комбінацією спектрів функцій $f_i\ (i = 1,2,\ldots,t)$, які реалізуються відповідними НЕ першого шару. Якщо спектр зваженої суми $\mathrm{w}(\mathbf{g})$ вихідного НЕ у системі $X(G_n)$ над полем F позначити через $\mathbf{s} = (s_i)\left(i = 0,1,\ldots,k^n - 1\right)$, то, очевидно, що $s_{k^n - 1} = 0$.

За нашим припущенням існує такий вектор $\mathbf{w} = (\omega_1,\ldots\omega_t;\omega_0)$, що

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad f(\mathbf{g}) = \omega_1 f_1(\mathbf{g}) + \ldots + \omega_t f_t(\mathbf{g}) + \omega_0. \tag{25}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (25) на $(f(\mathbf{g}))^{-1}$, а потім просумуємо за всіма $\mathbf{g} \in G_n$. Тоді, з урахуванням того, що кількість аргументів кожної функції f_i менша ніж n, маємо:

$$k^n = 0. \tag{26}$$

У зв'язку з тим, що поле $GF\left(p^m\right)$ було вибрано таким чином, що число k є дільником числа $u = p^m - 1$, можна стверджувати, що рівність (26) не має місце, оскільки k і p взаємно прості числа. Отримане протиріччя вказує на неможливість нашого припущення, отже, теорему доведено.

Список використаної літератури

1. Курош А. Г. Теория групп / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1979. – 623 с.

3. Кострикин А. И. Введение в алгебру/ А. И. Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 495 с.

4. Постников М. М. Теория Галуа / М. М. Постников. – М.: Физматгиз, 1963. – 218 с.

5. Кертис Ч. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр / Ч. Кертис, И. Райнер. – М.: Наука, 1969. – 667 с.

6. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений / Л. П. Ярославский. – М.: Советское радио, 1979. – 312 с.

7. Берлекемп Э. Алгебраическая теория кодирования / Э. Берлекемп. – М.: Мир, 1971. – 477 с.

8. Кузьмин И. В. Основы теории информации и кодирования / И. В. Кузьмин, В. А. Кедрус. – К.: Вища школа, 1977. – 278 с.

9. Кларк Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Дж. Кларк, Дж. Кейн мл. – М.: Радио и связь, 1987. – 391 с.

10. Eichner L. Homomorphe Darstellungen endlicher Automaten in linearen Automaten / L. Eichner. – EIK. – 1973. – T. 9. – № 10. – P. 67-76.

11. Айзенберг Н. Н. Многозначные пороговые функции II. Синтез многозначных пороговых елементов / Н. Н. Айзенберг, Ю. Л. Иваськив, Д. А. Поспелов, Г. Ф. Худяков // Кибернетика. – К., 1973. – № 1. – С. 53-66.