МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Ю.Ю. Млавець, О.О. Синявська

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(Методичні вказівки до практичних занять
для студентів нематематичних спеціальностей)

Ч. 1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Ужгород – 2018

Млавець Ю.Ю., Синявська О.О. Теорія ймовірностей і математична статистика (Методичні вказівки до практичних занять для студентів нематематичних спеціальностей). Ч. 1. Теорія ймовірностей. – Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2018. – 72 с.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Ніколенко В.В.,
ст. викл. Герич М.С.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” від 22 лютого 2018 року, протокол № 7.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” від 19 лютого 2018 року, протокол № 6.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому вивчаються математичні моделі випадкових (стохастичних) явищ.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення імовірнісних закономірностей масових випадкових явищ.

Як наука теорія ймовірностей виникла в середині XVII століття. Перші роботи з теорії ймовірностей були присвячені аналізу азартних ігор, а тому спочатку теорія ймовірностей розвивалася як прикладна дисципліна. У зв'язку з цим її поняття і висновки належали до тих галузей знань, в яких вони були одержані.

Перші розрахунки ймовірностей виконали Н. Тарталья і Дж. Кардано, згодом ці питання досліджували Г. Галілей, П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс, Р. Декарт. Вони розробляли на замовлення відомих гравців математичні моделі, що описували ймовірності наслідків в іграх, які залежали від випадку. Під час гри в «кості», рулетку, як і при дослідженнях результати змінюються від випадку до випадку навіть при збереженні умов. В їх працях поступово сформувались поняття ймовірності та математичного сподівання, було встановлено їх властивості та способи обчислення. Згодом ці методи почали застосовувати у практиці страхових компаній для встановлення розміру виплат страхових премій. Важливу теорему (закон великих чисел), що сприяла розвитку теорії ймовірностей як науки, установив Я. Бернуллі. Імовірнісні проблеми теорії похибок вимірювань, похибок стрільби, статистики народонаселення розв'язувалися в працях А. Муавра, П. Лапласа, К. Гаусса, С. Пуассона в XVIII-XIX століттях.

Значний внесок у подальший розвиток теорії ймовірностей зробили російські математики П.Л. Чебишев, А. А. Марков А. М. Ляпунов у вигляді граничних теорем. Сучасна теорія ймовірностей була створена в працях Р. Мізеса, С. Н. Бернштейна, Е. Бореля, А. М. Колмогорова, О. Я. Хінчина, П. Леві, Ю. В. Прохорова та інших вчених XX ст. Зокрема, саме

А. М. Колмогорову належить найдосконаліша на сьогодгні аксіоматична побудова теорії ймовірностей. Її аксіоми і теореми в абстрактній формі відображають закономірності випадкових явищ.

В Україні школа теорії ймовірностей була заснована академіком Б. В. Гнеденком на базі кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Київського університету. Ця школа має заслужений авторитет міжнародного математичного співтовариства. Важлива роль у розвитку цієї школи на першому етапі її становлення належить члену-кореспонденту Й. І. Гіхману. Серед вихованців школи відомі вчені – академіки В. С. Королюк, А. В. Скороход, В. С. Михалевич, Ю. М. Єрмольєв, члени-кореспонденти НАН України М. Й. Ядренко, М. І. Портенко, Т. П. Мар'янович, В. В. Анісімов, С. І. Ляшко, професори Ю. В. Козаченко, В. Л. Гірко, О. Г. Наконечний та Д. С. Сільвестров.

Методи теорії ймовірностей широко застосовуються в таких галузях природознавства і техніки, як: теорії надійності; теорії масового обслуговування; теорії похибок; теорії автоматизованого управління; теорії ігор; загальній теорії зв'язку; теорії розпізнавання образів; радіолокаційній техніці; стохастичному програмуванні; теоретичній фізиці; генетиці; геодезії; астрономії; соціології, психології, лінгвістиці, медичній і технічній діагностиках; і в інших теоретичних і прикладних сферах науки і техніки.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Основні поняття. Простір елементарних подій. Операції над випадковими подіями

Основними в теорії ймовірності є поняття ***випадкового експерименту*** – певного випробування, спостереження чи досліду, результати якого передбачити неможливо. Можливі наслідки випадкового експерименту називаються ***випадковими подіями***. Випадкові події позначаються великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$.

Із кожною подією A можна пов'язати подію, яка полягає в тому, що A не настає. Цю подію називають ***протилежною*** до A і позначають $\bar{A}$.

Сумою подій B і C називається подія A (позначають $A = B + C$ або $A = B \cup C$), яка полягає в настанні принаймні однієї з цих подій.

Різницею подій B і C називається подія A (позначають $A = B - C$ або $A = B \backslash C$), яка настає тоді, коли настає подія B і не настає подія C.

Добутком подій B і C називається подія A (позначають $A = B \cdot C$ або $A = B \cap C$), яка полягає в одночасному настанні подій B і C.

Дві події A і B називаються ***сумісними (несумісними)***, якщо в результаті експерименту можливе (неможливе) їхнє спільне настання.

Достовірна подія – подія, яка в результаті експерименту неодмінно відбудеться (позначається літерою U).

Неможлива подія називається подія, яка при проведенні випробування не відбудеться ні за яких умов (позначається літерою V).

Події називають ***рівноможливими*** в даному випробуванні, якщо за умовами проведеного випробування немає підстав вважати появу однієї із цих подій більш можливою, ніж інших.

Подія A ***спричиняє*** подію B (позначають $A \subset B$), якщо з того що, подія A настала випливає, що настає подія B.

Подія ω буде ***елементарною***, якщо її не можна розкласти на простіші події. Множину всіх можливих елементарних подій називають ***простором елементарних подій***, який позначають Ω.

Сукупність подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ***утворюють повну групу***, якщо одна і тільки одна із цих подій в результаті експерименту обов'язково настає: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \mathrm{U},\ A_i \cap A_j = \mathrm{V}, i \neq \mathrm{j}$.

Розв'язання типових задач

Задача 1. Із двоцифрових чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події *A*={вибране число ділиться на 5}; *B*={вибране число просте}; *C*={вибране число парне}.

Розв'язання. У результаті випробування може бути вибране будь-яке двоцифрове число, не більше від 20. Отже, простір елементарних наслідків $\Omega = \{10, 11, 12, \dots, 20\}$. З усіх наслідків із простору Ω події A сприяють наслідки 10, 15, 20. Отже, $A = \{10, 15, 20\}$. Відповідно $B = \{11, 13, 17, 19\}$ і $C = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Тут простір Ω і події $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ — скінченні множини.

Задача 2. Гральний кубик підкидають двічі. Випадкові події цього випробування: A – сума очок рівна 8, B – при другому підкиданні випало 6 очок. Описати простір елементарних подій та події A, B, $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$.

Розв'язання. Наслідками випробування є наступні пари

$$\{(i, j), i, j = 1, 2, \dots, 6\}.$$

Тоді подія $A = \{(2{,}6), (5{,}3), (3{,}5), (4{,}4), (6{,}2)\}$, подія $B = \{(i, 6), i = 1{,}2, \dots, 6\}$, $A + B = \{(5{,}3), (3{,}5), (4{,}4), (6{,}2), (i, 6)\}$, де $i = 1{,}2, \dots, 6$, $A \cdot B = \{(2{,}6)\}$, $A - B = \{(5{,}3), (3{,}5), (4{,}4), (6{,}2)\}$.

Задача 3. Монету підкидають двічі. Для даного випробування описати простір елементарних подій, події: A – хоча би один раз з'явиться «герб», B – під час другого кидання з'явиться «герб». Знайти $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$, $B - A$, $\bar{A}$.

Розв'язання. При двократному підкиданні монети можливі чотири елементарних наслідки: ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ, де Г – випаданя зображення «герба», Ц – випаданя зображення «цифри». Очевидно, вони утворюють повну групу подій, тому $\Omega =${ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ} є простір елементарних подій даного випробування. Тоді $A =${ГГ, ГЦ, ЦГ}, $B =${ГГ, ЦГ}, а $A + B =${ГГ, ГЦ, ЦГ}, $A \cdot B =${ГГ, ЦГ}, $A - B =${ГЦ}, $B - A = \{V\}$, $\bar{A} =${ЦЦ}.

Задача 4. У квадрат на площині зі стороною $2a$ і з центром у початку координат, сторони якого паралельні до осей координат, навмання «кидають» точку. Описати простір елементарних подій.

Розв'язання. У цьому випадку можливими наслідками експерименту є попадання в будь-яку точку описаного квадрата. Якщо (x, y) – координати точки на площині, то простір елементарних подій $\Omega = \{(x, y) : -a \le x \le a, -a \le y \le a\}$ є множиною нескінченною і незліченною (елементів цієї множини не можна ні полічити, ні занумерувати).

Задачі для самостійного розв'язання

1. Монета підкидається три рази. Події: A − жодного разу «герб» не з'явився, B − «герб» з'явився рівно один раз; C − «герб» з'явився рівно два рази; D − «герб» з'явився рівно три рази; E − «герб» з'явився принаймні один раз. Побудувати множину елементарних подій Ω описаних експериментів і підмножини, що відповідають вказаним подіям.

2. У регіоні є два молокозаводи M_1, M_2 і чотири агрофірми Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4. Для того, щоб сформувати групи партнерів (два постачальники – один споживач), навмання вибирають по одному молокозаводу і дві агрофірми. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

3. Об'єкт, за яким ведеться спостереження за допомогою локатора, займає випадкове положення на круглому екрані радіуса r . Описати простір елементарних наслідків Ω і подію $A =${об'єкт T з'явиться всередині круга, центр якого збігається з центром екрана, а площа становить чверть площі екрана}.

4. Підкидають два гральних кубики. Нехай події $A_i =${випаде i очок на першому кубику}, $B_j =${випаде j очок на першому кубику}, $i,\ j = 1,2,\dots,6$. Виразити через A_i та B_j такі події: а) сума очок на двох кубиках дорівнює п'ять; б) випаде в сумі хоча б десять очок; в) випаде в сумі не більше трьох очок.

5. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія A_i $(i = 1,2,\dots,n)$ полягає в тому, що i-та деталь має дефект. Описати такі події: а) жодна з деталей не має дефектів; б) принаймні одна деталь має дефект; в) лише одна деталь має дефект.

6. В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна електролампочка із певною ймовірністю може перегоріти або не перегоріти. Побудувати простір елементарних подій – числа електролампочок, які не перегорять, і випадкові події: A – із чотирьох електролампочок перегорять не більш як дві; B – не менш як три.

7. Із множини подружь навмання вибирається одна пара. Події: A – чоловіку більше 30 років, B – чоловік старший, за дружину, C – дружині більше 30 років. Описати події: $ABC, A - AB, A\overline{B}C$. Перевірити, що $A\overline{C} \subset B$.

8. Стрілець двічі стріляє по мішені. Подія A – влучив при першому пострілі, подія B – влучив при другому пострілі. Описати події: C – влучив принаймні один раз; D – влучив рівно один раз; E – жодного попадання; F – влучив обидва рази.

9. Навмання підкидається гральний кубик. Нехай подія A – випало парне число очок; B – випало число очок менше трьох. Описати події: $\overline{A}, \overline{B}, A + B, AB, \overline{A} + \overline{B}, \overline{(A \cdot B)}, \overline{A} \cdot B, A \cdot \overline{B}$.

10. Два гравці кидають монету до першої появи «герба». Починає гру перший гравець. Подія A – у першого гравця випав «герб», подія B – у другого випав «герб». Описати події: C – виграв перший гравець; D – виграв другий гравець.

11. Із двоцифрових чисел, що не перевищують 20, навмання вибирається одне число. Описати простір елементарних наслідків Ω і події A – вибране число ділиться на 5; B – вибране число просте; C – вибране число парне.

12. Стрілок робить один постріл у мішень, поділену на три області. Позначимо: A_1 – влучення у першу область, A_2 – влучення у другу область, A_3 – влучення у третю область, A_4 – немає влучень у мішень, B – влучення у першу або другу області, D - влучення хоча б в одну область. Записати події B і D.

13. Гральний кубик підкидається двічі. Події: $A -$ обидва рази з'явилось однакове число очок; $B -$ жодного разу не з'явилась «шістка», $C -$ число очок при першому підкиданні менше, ніж при другому. Побудувати множину елементарних подій Ω експерименту і підмножини, що відповідають вказаним подіям.

14. В кошику 7 м'ячів, позначених номерами 1, 2, 3, …, 7. З кошика навмання беруть один м'яч. Подія A полягає в тому, що номер вибраного м'яча ділиться на 3, В – номер вибраного м’яча парний. Описати простір елементарних подій і знайти $A \cup B, A \cap B, \bar{A}, \bar{B}, A \cup \bar{B}, \bar{A} \cap B$.

15. Нехай події A – навмання взята деталь першого сорту; B – навмання взята деталь другого сорту; C – навмання взята деталь третього сорту. Що означають події $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}, \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{C}}, \mathrm{A} \cap \mathrm{C}, (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$?

1.2. Означення ймовірності події

Ймовірністю події A називається числова міра об’єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність події A: $P(A)$.

Властивості ймовірності:

1. Імовірність достовірної події $P(U) = 1$.
2. Імовірність неможливої події $P(V) = 0$.
3. Імовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Класичне означення ймовірності. Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості елементарних подій m, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Щоб обчислити ймовірність події A за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω, а також кількість їх у множині, яка відповідає події A. Для цього застосовують формули комбінаторики.

Елементи комбінаторики

Нехай скінченна невпорядкована множина складається із n елементів. Виконаємо такі випробування:

1) Упорядкуємо дану множину, пронумерувавши всі її елементи. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне переставлення з n елементів, а кількість можливих переставлень дорівнюватиме $n!$.

2) Розіб’ємо множину на впорядковані підмножини, які містять по $m\ (m \leq n)$ елементів і відрізняються між собою або порядком, або елементами. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне ***розміщення з*** n ***елементів по*** m. Кількість таких розміщень

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

3) Розіб’ємо множину на невпорядковані підмножини, які містять по $m\ (m \leq n)$ елементів і різняться принаймні одним елементом. Тоді елементарною подією у цьому випробуванні буде ***комбінація з*** n ***елементів по***

m, а кількість таких комбінацій

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Геометричне означення ймовірності. Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Під мірою розуміють довжину, площу, об'єм в одно-, двох- і тривимірному випадках відповідно.

Статистичне означення ймовірності. Нехай n – кількість усіх випробувань в окремій серії випробувань, а $m(A)$ – кількість тих випробувань, у яких відбулася подія A. Відношення $\frac{m(A)}{n}$ називається ***відносною частотою*** настання події.

Статистичною ймовірністю події A називається границя, до якої наближається відносна частота $\frac{m(A)}{n}$ події A при необмеженому збільшенні числа всіх випробувань, тобто $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n}$.

Аксіоматичне означення ймовірностей. У системі аксіом, запропонованій А. М. Колмогоровим, невизначеним є поняття елементарної події і ймовірність. Наведемо аксіоми, які визначають імовірність.

Кожній події поставлено у відповідність дійсне невід'ємне число $P(A)$. Це число називається ***ймовірністю події*** A. При цьому виконуються наступні аксіоми:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює 1: $P(U) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події дорівнює 0: $P(V) = 0$.
3. Ймовірність настання суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей подій: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $A \cap B = V$.
4. Ймовірність протилежної події: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Розв'язання типових задач

Задача 1. Партія складається з 10 стандартних (С) і 5 нестандартних (Н) деталей. Із партії навмання беруть 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей 3 виявились стандартними.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає у тому, що серед 5 деталей 3 стандартні, а 2 нестандартні. Деталі беруться навмання, тому можливою елементарною подією є будь-яка група з 5 деталей, вибраних із 15 деталей. Щоб визначити, до якого типу підмножин належать ці групи, розглянемо одну з них. Нехай у групі виявилося 2 стандартні і 3 нестандартні деталі, тобто маємо $\{C, C, H, H, H\}$. Виконаємо у групі довільне переставлення, наприклад $\{C, H, C, H, H\}$. Група не змінилась – у ній як було, так і залишилося 2 стандартні деталі. Отже, порядок у групі неістотний, тому такі групи належать до комбінацій. Усі елементарні події рівноможливі, для обчислення ймовірності застосуємо формулу класичного означення ймовірності.

Загальна кількість елементарних подій

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{360360}{120} = 3003.$$

Щоб обчислити кількість елементарних подій, які становлять подію A, міркуємо так: 3 стандартні деталі з 10 можна вибрати C_{10}^{3} способами, а 2 нестандартні з 5 – C_5^2 способами. Отже, $m = C_{10}^{3} C_5^2 = 120 \cdot 10 = 1200$.

Остаточно дістаємо:

$$P(A) = \frac{1200}{3003} = 0{,}4.$$

Задача 2. Протягом зміни чоловік прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на круглій полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

Розв'язання. Нехай подія A – {три годинники, які належать певним особам, виявились поруч}. Усі 10 годинників розкладались навмання, тому вони могли розміститися в довільному порядку. Отже, можлива елементарна подія – перестановка годинників. Загальна кількість елементарних подій дорівнює кількості перестановок із 10 елементів. Усі вони рівноможливі і несумісні. Тому можна застосувати класичне означення ймовірності. Тоді, за означенням перестановки, $n = 10!$. Щоб обчислити m, об'єднаємо 3 годинники певних осіб в одну групу. Тоді для події A буде 7! перестановок серед 7 годинників, які залишились; 3! переставлень буде у групі відібраних годинників, а крім того, група із 3 годинників може бути розміщена в будь-якому із 7 проміжків між 7 годинниками, які залишились. Отже, $m = 7! \cdot 3! \cdot 7$. Тоді

$$P(A) = \frac{7! \cdot 3! \cdot 7}{10!} = 0{,}058.$$

Задача 3. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Розв'язання. Подія A – {відстань між двома навмання взятими точками не перевищить 0,5}. Позначимо відстань від точок, узятих на сторонах квадрата, до його вершини, що є спільною для цих сторін, через x і y. Тоді відстань між зазначеними точками $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множина значень для x і y незліченна, причому значення кожної з цих змінних рівноможливі на заданих відрізках. Для обчислення ймовірності скористаємося геометричним означенням. Як елементарну подію розглядаємо $\omega_i = \{x_i; y_i\}$. Якщо x і y змінюються в зазначених межах, то множина Ω є квадратом зі стороною 1. Щоб визначити множину точок для події A, проведемо лінію $\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}5$. Мірою кожної з розглядуваних множин є відповідна площа, тому

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \pi \cdot \frac{0{,}25}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 4. Кинуто 2 гральних кубики. Яка ймовірність випадання «дубля»?

Розв'язання. Кожен наслідок цього досліду можна уявити як упорядковану пару чисел $(m;n)$, де m – число очок, які випали на першому кубику, n – число очок на другому. Усі наслідки рівно ймовірні, і число всіляких різних наслідків, тобто число таких різних упорядкованих пар, дорівнює 36. Подія A – випадання «дубля» – відбувається тоді і тільки тоді, коли настає один із наслідків $(m;n)$, при якому $m=n$. Таких наслідків 6. Отже, ймовірність події A:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Задача 5. Вісім різних книжок, серед яких є двотомник, розставляються навмання на одній полиці. Знайти ймовірність того, що книги двотомника стоятимуть поруч?

Розв'язання. Загальна кількість наслідків в цьому випадку дорівнює 8! Якщо зафіксувати на перших двох позиціях двотомник, то інші книги між собою можуть бути переставлені 6! разів. Оскільки книги можна поміняти місцями, то маємо двічі по 6! разів. Якщо пересувати двотомник на нові позиції, то отримаємо загальну кількість сприятливих наслідків $7\cdot 2\cdot 6!$. Остаточно отримаємо

$$P(A)=\frac{7\cdot 2\cdot 6!}{8!}=0{,}25.$$

Задача 6. Монету підкинути два раза. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться «герб».

Розв'язання. Випишемо всі можливі результати досліду $\{ГГ,ГЦ,ЦГ,ЦЦ\}$. З них сприятливими є перші три. Таким чином

$$P(A)=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Задача 7. Знайти ймовірність того, що при випадковому розподілі 3 одинакових куль по 5 лунках знайдеться лунка, яка містить принаймні 2 кулі.

Розв'язання. Загальне число подій дорівнює числу розміщень з повтореннями: $n=5^3$. Розглянемо протилену подію $\overline{A}$ – {кожна лунка містить не більше 1 кулі}. Занумеруємо лунки. Тоді результатами розподілу будуть 3-елементні множини, що відрізняються тільки складом елементів (внаслідок того, що кулі одинакові). Наприклад, набір $\{1,2,4\}$ означає, що кулі попали у першу, другу і четверту лунки. Згідно означення числа сполучень маємо, що число подій $\overline{A}$, дорівнює $m=C_5^3=10$. Тоді ймовірність події $\overline{A}$ дорівнює:

$$P(\overline{A})=\frac{10}{5^3}=\frac{2}{25}.$$

За властивістю ймовірностей $P(A)=1-P(\overline{A})$. Таким чином, шукана ймовірність дорівнює

$$P(A)=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}.$$

Задачі для самостійного розв’язання

1. На полиці у випадковому порядку розставлені підручники, причому п'ять з них з біології. Навмання взято три підручники. Знайти ймовірність того, що хоч би один з узятих підручників буде з біології.

2. Відстань між пунктами A і B автобус долає за 3 хв, а пішохід – за 15 хв. Інтервал руху автобусів 30 хв. У випадковий момент часу із A до B вирушив пішохід. Знайти ймовірність того, що він прибуде в пункт B раніше від наступного автобуса

3. На відрізку довжиною 12 см навмання поставлено дві точки. Яка ймовірність того, що довжина кожного з утворених при цьому послідовних відрізків буде не меншою від 3 см?

4. Два дійсних числа випадковим чином вибирають з відрізка $[0; 5]$. Яка ймовірність того, що а) сума двох чисел менша 4; б) добуток двох чисел більший за 5.

5. П’ятнадцять варіантів контрольної роботи написані на окремих картках і розподіляються випадковим чином серед 10 студентів, які сидять в одному ряду. Кожний студент отримує одну картку. Знайти ймовірність того, що а) варіанти 1 і 2 не будуть використані; б) варіанти 1 і 2 видадуть студентам, які сидять поруч.

6. Комплект складається з восьми різних виробів, 3 з яких коштують по 10 грн., ще 3 – по 20 грн. і 2 останніх – по 12 грн. Знайти ймовірність того, що взяті навмання 2 вироби коштують 22 грн.

7. У групі 12 хлопців і 5 дівчат, серед яких вибирають двох для участі у змаганні. Яка ймовірність того, що а) виберуть двох хлопців; б) виберуть хлопця й дівчину?

8. В ліфт дев’ятиповерхового будинку на першому поверсі заходять 4 чоловіки. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на шостому поверсі; б) на одному поверсі; в) на різних поверхах?

9. У магазині було продано 20 з 25 холодильників трьох марок, яких було 5, 7, 13 штук відповідно. Припустимо, що ймовірність бути проданим для усіх холодильників однакова. Знайти ймовірність того, що холодильники, які залишились : а) однієї марки; б) трьох різних марок.

10. Є шість відрізків, довжини яких відповідно рівні 2, 4, 6, 8, 10, 12 одиницям. Визначити імовірність того, шо з допомогою взятих навмання трьох відрізків з даних шести можна побудувати трикутник.

11. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер П, Т, Р, В, І, И. Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово «ПРИВІТ»?

12. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студентів не мають спільного дня народження?

13. У цеху працює 12 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в робочому стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

14. На відрізок одиничної довжини навмання ставиться точка. Обчислити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $\frac{1}{7}$.

15. Навмання взято два додатніх числа, кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел буде не більше одиниці, а їх добуток не менше 0,09.

1.3. Теореми додавання та множення ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C несумісні, то

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C);$$

б) якщо події B і C сумісні, то

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C).$$

Події B і C називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У протилежному випадку події називаються ***незалежними***.

Імовірність події B, визначена за умови, що подія C відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P(B\ /\ C)$.

Теорема множення ймовірностей. Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то

$$P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C);$$

б) якщо події B і C залежні, то

$$P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B).$$

Ці теореми справджуються й для добутку n $(n > 2)$ подій.

Імовірність настання принаймні однієї події. Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, \dots, A_n$. Потрібно знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них. Позначимо цю подію літерою A. Тоді протилежною буде подія $\bar{A}$ яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події:

$$\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i.$$

Знайдемо ймовірність події A через імовірність протилежної події:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_\iota).$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. Партія містить 12 стандартних і 4 нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;

2) усі три нестандартні;

3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання. 1) Нехай подія A – {серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні}. Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 – {серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна} і A_2 – {усі три узяті деталі стандартні}. Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності:

$$n = C_{16}^3 = 560; m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264; m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{484}{560} = 0{,}864.$$

2) Подія В – {усі три взяті деталі нестандартні}. Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i, (i = 1{,}2{,}3)$, де i-та деталь нестандартна, $B = \bigcap_{i=1}^3 B_i$.

Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом – означає те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо наступним чином:

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^3 B_i\right) = P(B_1)P(B_2/B_1)P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{2}{14} = 0{,}007.$$

3) Подія C – {із трьох деталей принаймні одна стандартна}. Протилежна подія $\bar{C}$ – {усі три деталі нестандартні}. Імовірність цієї події щойно знайдено: $P(\bar{C}) = P(B)$. Остаточно маємо:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}007 = 0{,}993.$$

Задача 2. Нехай перша партія деталей складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга – із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя – із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) тільки одна стандартна;

2) тільки дві стандартні.

Розв'язання. Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії виявилась стандартною.

1) Подія А – {тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною}. Ця подія матиме вигляд:

$$A = A_1\overline{A_2A_3} \cup \overline{A_1}\, A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1A_2}A_3.$$

Групи подій, сумою яких є подія А, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події А обчислимо так:

$$P(A) = \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{133}{1235} = 0{,}108.$$

2) Подія B – {тільки дві деталі із трьох виявились стандартними}. Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них:

$$B = A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3.$$

Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B:

$$P(B)=\frac{10}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5}+\frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{5}.$$

Задача 3. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують дві бригади, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першій бригаді дорівнює 0,7, а в другій – 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Розв'язання. Розглянемо події: А – {на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі}; A_1 – {для перевезення вантажів прибув автомобіль із першої бригади}; A_2 – {для перевезення вантажів прибув автомобіль із другої бригади}. Тоді $A=A_1\cup A_2$. Події A_1 $і$ A_2 сумісні, тому

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2).$$

Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)$. Остаточно дістаємо:

$$P(A)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}88.$$

Задача 4. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Ймовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2, 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

Розв'язання. Розглянемо події: А – {прилад працює протягом заданого часу}; B_1 – {перший вузол працює}; B_2 – {другий вузол працює}; B_3 – {третій вузол працює}. Подія *А* настає, якщо працюють перший та другий вузли, або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси:

$$A=B_1\cap(B_2\cup B_3).$$

За умовою задачі маємо, що події B_1 і $B_2\cup B_3$ незалежні, а події B_2 і B_3 – сумісні.

Тому

$$A=P\big(B_1\cap(B_2\cup B_3)\big)=P(B_1)P(B_2\cup B_3)=P(B_1)\big(P(B_2)P(B_3)-$$
$$-P(B_2\cap B_3)\big)=0{,}8(0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6)=0{,}704.$$

Під час обчислення враховано, що умовою задачі задано ймовірності протилежних подій.

Задача 5. Імовірність влучення стрілком у першу область мішені дорівнює 0,45, у другу область – 0,35, у третю – 0,15. Знайти імовірність того, що при одному пострілі стрілок влучить у першу або другу області мішені.

Розв'язання. Позначимо за подію *А* – влучення у першу область мішені, за подію *В* – влучення у другу область мішені.

При одному пострілі події *А* та *В* несумісні. Тому імовірність влучення в першу або другу області мішені буде

$$P(A\cup B)=0{,}45+0{,}35=0{,}8.$$

Задача 6. Студент знає 20 з 25 питань програми іспиту. Знайти ймовірність того, що він дасть правильну відповідь на три питання, які він отримав на іспиті.

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в тому, що студент знає відповідь на перше питання, A_2 – на друге, A_3 – на третє. Тоді подія B – {він дасть правильну відповідь на три питання} має вигляд

$$B = A_1 A_2 A_3.$$

Використавши теорему добутку ймовірностей залежних подій, знайдемо

$$P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}.$$

Задача 7. Підприємець має акції двох компаній. Ймовірність отримання дивідендів по акціях тільки однієї з двох компаній дорівнює 0,38, причому для першої компанії вона дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що він отримає дивіденди по акціях другої компанії.

Розв'язання. Нехай подія A_1 полягає в отриманні дивідендів по акціях першої компанії, A_2 – другої. Тоді

$$P(A_1) = 0{,}8 \text{ і } P(A_2) = x.$$

Подія «отримано дивіденди по акціях тільки однієї з двох компаній» має вигляд

$$P(A_1\overline{A_2}) + P(A_2\overline{A_1}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(A_2)P(\overline{A_1}).$$

Звідки маємо рівняння

$$0{,}8(1 - x) + x(1 - 0{,}8) = 0{,}36,$$

розв'язавши яке, знайдемо $x = 0{,}7$.

Приклади для самостійного розв'язання

1. В урні 5 чорних і 6 білих куль. Випадковим чином виймають 4 кулі. Знайти ймовірність, того, що серед них є: а) 2 білі кулі; б) менше ніж 2 білі кулі; в) хоча б одна біла куля.

2. У першій урні 6 білих і 4 чорні кулі, а в другій урні 5 білих і 7 чорних куль. З першої урни випадковим чином взяли 3 кулі, а з другої – 2 кулі. Знайти ймовірність того, що серед вийнятих куль: а) усі кулі одного кольору; б) лише три білі кулі.

3. Авіакомпанія протягом доби виконує 2 рейси до Відня. Імовірність затримки першого рейсу за метеоумовами Відня дорівнює 0,1, другого – 0,15, причому затримка одного рейсу не залежить від іншого. Знайти ймовірність затримки принаймні одного рейсу.

4. Лінія зв'язку впродовж часу t забезпечує зв'язок між об'єктами з надійністю (імовірність безвідмовної роботи) 0,9. Для підвищення надійності встановлено дві резервні лінії з надійностями 0,85 і 0,8. Визначити надійність зв'язку між об'єктами за час t, якщо всі лінії працюють незалежно одна від одної.

5. Робітник обслуговує чотири верстати, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом години увагу робітника потребуватиме 1-ий верстат, дорівнює 0,1, 2-й – 0,2, 3-й – 0,15 і 4-й – 0,12. Яка ймовірність того, що протягом години: а) жоден верстат не потребує уваги робітника; б) усі чотири верстати потребують уваги робітника; в) Який-небудь один верстат потребує уваги робітника; г) хоча б один верстат потребує уваги робітника?

6. Для виконання одного завдання замовник звернувся до двох виконавців. Імовірність того, що перший виконавець виконає замовлення, дорівнює 0,8, а другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання замовника буде виконано.

7. Агенція оцінює стан кредитування особи, що визначає її рейтинг як «відмінний», «добрий», «задовільний» і «поганий». Імовірність, що особа отримає «відмінний» рейтинг, становить 0,25, «добрий» – 0,3, «задовільний» – 0,3. Яка ймовірність того, що: а) особа отримає «поганий» рейтинг; б) особа отримає не більше, ніж «добрий» рейтинг?

8. На 100 лотерейних білетів приходиться 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б за одним білетом, якщо придбано три білети?

9. У комп'ютерну тестову систему введено 40 запитань. Студенту випадковим чином пропонується 5 запитань і виставляється за тест оцінка «відмінно», якщо на всі запитання він дає правильну відповідь. Знайти ймовірність одержати таку оцінку, якщо з усіх введених в систему запитань студент підготував тільки 30.

10. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії сигналізатор спрацює дорівнює 0,95 для першого сигналізатора та 0,9 – для другого. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює лише один сигналізатор.

11. Імовірність влучення у мішень першого стрілка дорівнює 0,7, другого стрілка – 0,8, а третього стрілка – 0,9. Знайти імовірність влучення у мішень хоча б одного стрілка.

12. У залежності від наявності сировини підприємство може виробити та відправити замовникам щодобово кількість певної продукції від 1 до 100. Яка імовірність того, що одержану кількість продукції можна розподілити без залишку а) трьом замовникам; б) чотирьом замовникам; в) дванадцяти замовникам; г) трьом або чотирьом замовникам?

13. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, \dots, 30\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Яка ймовірність того, що воно виявиться кратним 5 або 7?

14. Чотири спортсмени мають виконати норму майстра спорту. Кожний із них може виконати її із певною ймовірністю. Яка ймовірність того, що із чотирьох спортсменів норму майстра спорту виконують не менш як два спортсмени; не більш як три?

15. В коло радіуса R вписаний квадрат. Знайти ймовірність того, що поставлені навмання всередині кола дві точки виявляться всередині квадрата.

1.4. Формула повної ймовірності . Формули Байєса. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій $B_i, (i = 1,2, \dots, n)$, які утворюють повну групу. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій B_i відбудеться подія A, то події B_i називають ***гіпотезами***.

Якщо ймовірності гіпотез задано або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i),$$

де $P(B_i)$ – імовірність події B_i (гіпотези), $P(A/B_i)$ – умовні ймовірності настання події А. Цю рівність називають ***формулою повної ймовірності***.

Гіпотези B_i і подія A залежні, тому якщо відбулась подія A, імовірності гіпотез $P(B_i)$ змінюються. Нові умовні ймовірності гіпотез $P(B_i/A)$, обчислені за умови, що подія A відбулась, знаходять за ***формулами Байєса:***

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}.$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий – з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 – {деталь виготовлено на першому верстаті}; B_2 – {деталь виготовлено на другому верстаті}; А – {вибрана деталь стандартна}. Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події А, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо

$$P(B_1) = 0{,}75 \text{ і } P(B_2) = 0{,}25.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}8375.$$

Задача 2. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий – 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого – 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 – {деталь перевіряв перший контролер}; B_2 – {деталь перевіряв другий контролер}; A – {виявлено браковану деталь}. Події B_1 *і* B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія А відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Тоді за умовою $P(B_1) = 0{,}45$, $P(B_2) = 0{,}55$, а умовні ймовірності припуститися помилки під час перевірки для першого та другого контролерів відповідно рівні $P(A/B_1) = 0{,}15, P(A/B_2) = 0{,}1$.

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події А:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = 0{,}45 \cdot 0{,}15 + 0{,}55 \cdot 0{,}1 = 0{,}1225.$$

Застосуємо формулу Байєса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{j=1}^{2} P(B_j)P(A/B_j)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}15}{0{,}1225} = 0{,}551,$$

$$P(B_2/A) = 1 - P(B_1/A) = 1 - 0{,}551 = 0{,}449.$$

Отже, більш імовірно, що помилки припустився перший контролер.

Задача 3. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 – {перший виріб взято з першої партії}; B_2 – {перший виріб узято з другої партії}; А – {перший узятий виріб стандартний}; C – {другий узятий виріб стандартний}. За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події А:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{23} = \frac{587}{874}.$$

За формулою Байєса знайдемо умовні ймовірності $P(B_1/A)\ i\ P(B_2/A)$:

$$P(B_1/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} : \frac{587}{874} = \frac{115}{229}, \quad P(B_2/A) = 1 - \frac{115}{229} = \frac{114}{229}.$$

Імовірність події C знаходимо за формулою:

$$P(C) = P(B_1/A)P(C/A \cap B_1) + P(B_2/C)P(C/A \cap B_2).$$

Умовні ймовірності такі:

$$P(C/A \cap B_1) = \frac{7}{9} \text{ і } P(C/A \cap B_2) = \frac{17}{22}.$$

Отже,

$$P(C/A) = \frac{115}{22} \cdot \frac{7}{9} + \frac{114}{229} \cdot \frac{17}{22} = 0{,}775.$$

Задача 4. У парламентську комісію, яка складається з n депутатів, включили ще одного депутата – представника партії зелених. Після цього за допомогою жеребкування було обрано голову комісії. Знайти ймовірність того, що обрано депутата від зелених, якщо рівно можливі всі припущення про початковий партійний склад комісії.

Розв'язання. Розглянемо такі гіпотези про початковий партійний склад комісії: B_1 – {в комісії не було жодного депутата від зелених}, B_2 – {в комісії був один депутат від зелених}, B_3 – {в комісії було два депутати від зелених},…, B_{n+1} – {в комісії було n депутатів від зелених}. Оскільки всі ці гіпотези рівно можливі, то їх ймовірності однакові і дорівнюють

$$P(B_i) = \frac{1}{n+1}, i = 1,2, \dots, n+1.$$

Подія А – головою комісії обрано депутата від зелених. Відповідні умовні ймовірності дорівнюють

$$P(A/B_i) = \frac{i}{n+1}, i = 1,2, \dots, n+1.$$

Далі, застосовуючи формулу повної ймовірності і перетворюючи вираз, як суму арифметичної прогресії, отримаємо остаточний результат

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_{n+1})P(A/B_{n+1}) =$$
$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{i}{n+1} + \dots + \frac{n+1}{n+1}\right) =$$
$$\frac{1}{(n+1)^2}(1 + 2 + \dots + n + 1) = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{\left(1 + (n+1)\right)}{2}(n+1) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Задача 5. Система сигналізації може помилково спрацювати з ймовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з ймовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Розв'язання. Нехай подія A – {спрацювала сигналізація}. Розглянемо гіпотези: B_1 – {є крадіжка}, B_2 – {нема крадіжки}. Очевидно, що

$$\mathrm{P}(B_1) = 0{,}25, \mathrm{P}(B_2) = 0{,}75.$$

Умовна ймовірність того, що спрацювала сигналізація, за умови, що є крадіжка, дорівнює

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_1) = 0{,}9.$$

Умовна ймовірність того, що спрацювала сигналізація, за умови, що нема крадіжки, дорівнює

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_2) = 0{,}05.$$

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність того, що сигналізація спрацювала:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = P(B_1)\mathrm{P}(A/\mathrm{B}_1) + P(B_2)\mathrm{P}(A/\mathrm{B}_2) = 0{,}263.$$

Ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково, знаходимо за формулою Байєса:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_2/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}05}{0{,}263} = 0{,}143.$$

Приклади для самостійного розв'язання

1. У ящику лежать 20 тенісних м'ячів, у тому числі 15 нових та 5, якими вже грали. Для гри навмання вибирають два м'ячі та після гри повертають їх назад. Потім після другої гри також навмання виймають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитися новими м'ячами?

2. В урні 4 чорні і білі кулі. До них додають 2 білі кулі. Після цього з урни випадковим чином виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кулі білі.

3. У ящик, що містить 3 білі й одну чорну кулю, додали одну кулю невідомого кольору, яка рівноможливо може бути чорною або білою, а потім навмання вийняли одну кулю. Знайти ймовірність того, що: 1) вийняли білу кулю; 2) вийнята куля виявилась білою. Яку найімовірніше кулю було додано в ящик?

4. Два контролери оцінюють якість виробу. Імовірність прийоме виробу першим контролером дорівнює 0,6, другим – 0,8. У результаті лише один контролер прийняв виріб. Яка ймовірність того, що його прийняв перший контролер?

5. На заводі, що виготовляє акумулятори, перша бригада виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40 % всіх виробів. У їхній продукції брак складає відповідно 5%, 4% і 2%. Яка ймовірність того, що а) випадково обраний акумулятор з дефектом; 2) випадково обраний акумулятор виготовлено третьою бригадою?

6. Страхова компанія розділяє застрахованих за групами ризику: перша група – малий ризик, друга – середній, третя – великий ризик. Серед клієнтів компанії 50% – першої групи, 30% – другої та 20% – третьої групи. Ймовірність виплати страхової нагороди для першої групи ризику рівна 0,01, для другої – 0,03 та для третьої – 0,08. Яка ймовірність того, що: а) клієнт отримає грошову винагороду за період страхування; б) клієнт , який отримає грошову винагороду відноситься до групи малого ризику.

7. Група студентів складається з 5 відмінників, з 8 посередніх та 7 слабких. Відмінники склали іспит тільки на „5”, посередні можуть одержати з однаковою імовірністю „4” або „5”, а слабкі з однаковою ймовірністю „2”, „3”, „4”. Знайти ймовірність того, що навмання викликаний студент одержить 4” або „5”.

8. Система сигналізації може помилково спрацювати з імовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з імовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

9. Статистика запитів кредитів в деякому банку така: 20% – бюджетні організації, 36% – юридичні особи, а решта – фізичні особи. Імовірності неповернення взятого кредиту відповідно дорівнюють 0,01, 0,05 і 0,2. Знайти ймовірність неповернення чергового кредиту. Начальнику кредитного відділу надійшло повідомлення факсом про неповернення кредиту, але в ньому ім’я клієнта погано надруковано. Яка ймовірність, що цей кредит не повернула юридична особа?

10. Є дві партії деталей, причому в одній партії усі деталі задовольняють технічні умови, а в іншій – 25 % бракованих. Деталь, що взята з довільно обраної партії, виявилася якісною. Визначити ймовірність того, що друга деталь з тієї сам партії виявиться бракованою, якщо першу деталь повернули до партії.

11. Деталі йдуть на перевірку стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,7; відповідно до другого – 0,3. Ймовірність того, що придатна деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94; другим – 0,98. Придатна деталь при перевірці була визнана стандартною (подія A). Знайти ймовірність того, що її перевіряв перший контролер.

12. У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти імовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика стандартна.

13. Імовірність знищення літака з одного пострілу для першої гармати дорівнює 0,2, а для другої гармати – 0,1. Кожна гармата робить по одному пострілу, причому було одне влучення у літак. Яка імовірність того, що влучила перша гармата?

14. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45% усіх деталей, від другого – 35% і від третього – 20%. Перший цех допускає в середньому 6% браку, другий – 2% і третій – 8%. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

15. Три стрільці здійснюють по одному пострілу по одній і тій же мішені. Ймовірність попадання для першого стрільця рівна 0,6, для другого – 0,5, для третього – 0,4. В результаті проведених пострілів в мішені виявилось дві пробоїни. Знайти ймовірність того, що в мішень попали другий і третій стрільці.

1.5. Повторні незалежні випробування. Формула Бернулі. Локальна та інтегральна теореми Лапласа

Незалежні випробування. Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може відбутись або не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються ***незалежними*** щодо події A. Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них ймовірність настання події A однакова. Ймовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A) = p$, а ймовірність настання протилежної події

$$P(\bar{A}) = 1 - p = q.$$

Для розв’язання задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

Формула Бернуллі. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається так:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула застосовується, якщо $n \leq 10$.

Найімовірніша кількість. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається ***найімовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Розподіл може мати одне або два найімовірніші числа.

Локальна теорема Лапласа. Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність того, що в цих n випробуваннях подія A відбудеться рівно m раз, наближено дорівнює

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Функцію $\varphi(x)$ протабульовано. При користуванні таблицею її значень потрібно мати на увазі, що ця функція парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а при $x \geq 4$ її значення практично дорівнюють нулю.

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо число n проведених випробувань велике, а ймовірність появи події A в кожному випробуванні мала ($p \leq 0{,}01$), то ймовірність появи події A в цих n випробуваннях m раз обчислюють за формулою Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

де $a = np$ – середнє число появ події A в n випробуваннях.

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз, наближено дорівнює:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функція Лапласа},$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функцію $\Phi(x)$ протабульовано. При користуванні таблицею її значень потрібно мати на увазі, що функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при $x \geq 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$.

Відхилення відносної частоти від ймовірності. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить $\varepsilon > 0$, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) усі три стандартні;
2) не більш як одна нестандартна;
3) принаймні одна нестандартна.

Розв'язання. Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A – {взята щоразу деталь стандартна}, тоді $P(A) = p = \frac{12}{16} = 0{,}75$.

1) Імовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:

$$P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}75^3 = 0{,}421875.$$

2) Подію "із трьох деталей не більш як одна нестандартна" можна розглядати так: взято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь. У позначеннях формули Бернуллі

$$P_3(x \geq 2) = P_3(3) + P_3(2) = 0{,}421875 + C_3^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}84375.$$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $P_3(x < 3)$. Обчислимо цю ймовірність:

$$P_3(x < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125.$$

Задача 2. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Підставимо значення відомих величин:

$$0{,}6n - 0{,}4 \leq 40 \leq 0{,}6n + 0{,}6;\ -0{,}4 - 40 \leq -0{,}6n \leq 0{,}6 - 40,$$

$$\frac{39{,}4}{0{,}6} \leq n \leq \frac{40{,}4}{0{,}6}.$$

Задача має два розв'язки: $n = 66$ і $n = 67$.

Задача 3. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія *A* – {взято виріб без дефекту}. За умовою $\mathrm{P(A)} = \mathrm{p} = 0{,}9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Підставляючи дані за умовою задачі, дістаємо: $x = \frac{350-400\cdot0{,}9}{\sqrt{400\cdot0{,}9\cdot0{,}1}} = -1{,}67$. За таблицями знаходимо $\varphi(-1{,}67) = 0{,}098$ беручи до уваги, що $\varphi(x)$ – парна функція.

Отже, $P_{400}(350) = \frac{0{,}0989}{6} = 0{,}0165.$

Задача 4. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання. Якщо подія *A* – {виріб пошкоджено}, тоді її ймовірність $p = 0{,}003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$. Імовірність події *A* досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, a = np.$$

Виконуючи обчислення, знаходимо:

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}003 = 3; P_{1000}(3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 0{,}229.$$

Задача 5. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Подія A – {зерно пшениці зійшло}. Її імовірність $p = 0,95$, кількість незалежних випробувань $n = 2000$. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функція Лапласа},$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Далі виконаємо обчислення:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000*0,95}{\sqrt{2000*0,95*0,05}} = -2,0519567;\ x_2 = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} = 2,0519567.$$

Тоді

$$P_{2000}(1880; 1920) = \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) + \Phi(1,03) = 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці.

Задача 6. В урні 15 кульок: 10 чорних і 5 білих. Випробування виконують так: виймають одну кульку, фіксують її колір і кладуть назад; перемішують кульки і виймають ще одну кульку. Таку процедуру повторюють кілька разів. Яка ймовірність того, що під час такого випробування з п'яти вийнятих кульок буде чотири білих?

Розв'язання. Ймовірність вийняли білу кульку під час кожного випробування дорівнює $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, а ймовірність того, що білої кульки не виймуть, дорівнює $1 - p = \frac{2}{3}$. За формулою Бернуллі знаходимо ймовірність появи чотирьох білих кульк серед п'яти вийтятих:

$$\mathrm{P}_5(4) = \mathrm{C}_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-4} = 5 \cdot \frac{2}{768} = \frac{10}{768}.$$

Приклади для самостійного розв'язання

1. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

2. Імовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:

1) виграють дві облігації;
2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;
3) виграють не більш як дві облігації.

3. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об'єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.

4. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

5. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка ймовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

6. Ймовірність несплати податків для кожного із 400 підприємств дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що податки не сплатять 80 підприємств?

7. На підприємстві брак складає 1 % від загальної кількості виробів. Яка ймовірність, що з 500 навмання взятих виробів: а) жодного бракованого; б) рівно три бракованих?

8. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно вкомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

9. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з імовірністю 0,9 можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

10. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину дорівнює 0,6. Виконано 8 спроб. Знайти ймовірність того, що при цьому буде рівно два влучення?

11. На факультеті налічується 600 студентів. Яка ймовірність того, що 1 січня є днем народження одночасно для $k = 0; 1; 2$ студентів даного факультету?

12. Через канал зв'язку передається 5 повідомлень. Кожне з повідомлень незалежно від інших з ймовірністю 0,3 спотвориться перешкодами. Знайти ймовірність подій: а) з 5 повідомлень 3 спотворені; б) не більше двох переданих повідомлень спотворені.

13. Імовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Скільки деталей потрібно відібрати, щоб з ймовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота появи нестандартних деталей відхиляється від постійної ймовірності за абсолютним значенням не більше ніж на 0,03.

14. Імовірність появи події A в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що в 100 проведених випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 75 раз; б) від 70 до 85 раз.

15. Імовірність появи події A в кожному незалежному випробуванні дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що в 1000 випробувань подія А відбудеться: а) два рази; б) не менш як два рази.

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Закон розподілу і числові характеристики випадкових величин

Випадковою називають величину, яка в результаті випробування набуває одне і лише одне з можливих значень, наперед не відоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Випадкові величини прийнято позначати великими латинськими літерами: $X, Y, Z, \ldots,$ а їх можливі значення – відповідними малими: $x, y, z, \ldots$.

Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини. Якщо множина можливих значень випадкової величини зліченна, то таку величину називають ***дискретною***. ***Неперервною випадковою величиною*** називається величина, яка набуває будь-яких значень з деякого скінченного або нескінченного інтервалу (області).

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їй імовірностями, називають ***законом розподілу випадкової величини***.

Якщо у результаті експерименту дискретна випадкова величина X набуває одного із значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тобто відбулась одна з повної групи несумісних подій: $X = x_1, X = x_2, \ldots, X = x_n$ з ймовірностями цих подій $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2), \ldots, p_n = P(X = x_n)$, тоді

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Якщо ж величина набуває зліченної множини значень, тоді $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються в табличній формі, аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$ сполучивши точки відрізками прямих, одержимо многокутник розподілу ймовірностей).

При табличному способі задання закону розподілу перший рядок таблиці містить можливі значення випадкової величини, а другий – відповідні ймовірності:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Ця таблиця називається ***таблицею розподілу*** ймовірностей дискретної випадкової величини X або ***рядом розподілу***.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для кожного значення x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу, функцію розподілу задають наступним чином

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i).$$

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва, $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β, $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то $F(x)$ – функція неперервна й диференційовна; її похідна $F'(x) = f(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***.

Властивості щільності розподілу ймовірностей:

1. $f(x) \ge 0$ для всіх $x \in R$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx$.
4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Числові характеристики випадкових величин

1. ***Математичним сподіванням*** або ***середнім значенням*** дискретної випадкової величини X, називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Якщо X приймає нескінчену кількість значень, то

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причому математичне сподівання існує, якщо ряд у правій частині рівності збігається абсолютно.

Якщо неперервна випадкова величина приймає значення на відрізку $[a, b]$ та має щільність імовірності $f(x)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою

$$MX = \int_a^b xf(x)dx.$$

Якщо ж можливі значення неперервної випадкової величини X належать нескінченному інтервалу $(-\infty; +\infty)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

за умови, що інтеграл збігається абсолютно.

Основні властивості математичного сподівання:

1) Математичне сподівання сталої дорівнює самій сталій, тобто $MC = C$;

2) Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(CX) = C \cdot MX$;

3) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто $M(X + Y) = MX + MY$;

4) Математичне сподівання добутку незалежних дискретних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто $M(XY) = MX \cdot MY$.

2. Дисперсією або розсіюванням DX випадкової величини X називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) Дисперсія будь-якої випадкової величини X невід'ємна, тобто $DX \geq 0$;

2) Дисперсія сталої C дорівнює нулеві, тобто $DC = 0$;

3) Сталий множник С можна виносити за знак дисперсії, при цьому сталий множник треба піднести у квадрат, тобто $D(CX) = C^2DX$;

4) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі їх дисперсій, тобто $D(X + Y) = DX + DY$.

3. Корінь квадратний з дисперсії називається ***середнім квадратичним відхиленням*** і позначається:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \text{ або } \sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Якщо від випадкової величини віднімемо її математичне сподівання, то дістанемо центровану випадкову величину, математичне сподівання якої дорівнює нулю. Ділення випадкової величини на її середнє квадратичне відхилення називається ***нормуванням*** цієї випадкової величини.

4. Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку k величини X визначають відповідно за такими формулами:

$$v_k = MX^k, \mu_k = M(X - MX)^k, \alpha_k = M|X|^k.$$

Якщо існує початковий абсолютний момент порядку k, то існують усі моменти нижчих порядків.

5. Мода і медіана. Крім математичного сподівання, яке є основною характеристикою положення випадкової величини, у теорії ймовірностей знаходять застосування інші характеристики положення – мода і медіана випадкової величини.

Модою $Mo\,(X)$ випадкової величини X називається її найбільш імовірне можливе значення. Для дискретної випадкової величини X, яка має ряд розподілу, $Mo\,(X)$ дорівнює тому можливому значенню, якого величина набуває з найбільшою ймовірністю.

Для неперервної випадкової величини X , заданої щільністю ймовірності $f(x)$ на проміжку $[a;\, b]$, мода дорівнює тому значенню x, при якому $f(x)$ досягає максимуму або (у разі відсутності максимуму) набуває найбільшого значення. Якщо $f(x)$ набуває найбільшого значення в одній точці x з проміжку $[a;\, b]$, то розподіл випадкової величини X називається *унімодальним*, а якщо в кількох точках – *полімодальним*.

Медіаною $Me(X)$ випадкової величини X називається те значення x , для якого

$$P\{X < Me(X)\} = P\{X > Me(X)\} = \frac{1}{2}.$$

Медіана, як правило, застосовується для неперервної випадкової величини і геометрично подає абсцису точки, в якій пряма $x = Me\,(X)$ поділяє навпіл площу, обмежену кривою розподілу $f(x)$ і віссю *Ox*.

6. Асиметрія й ексцес. Крім розглянутих характеристик випадкової величини застосовуються й інші, які характеризують той чи інший бік розподілу випадкової величини.

Коефіцієнт асиметрії або ***асиметрія*** – нормований центральний момент 3-го порядку. Цей коефіцієнт характеризує асиметрію графіка $f(x)$ щодо точки математичного сподівання випадкової величини та визначається за формулою:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Коефіцієнт ексцесу або ***ексцес*** – нормований центральний момент 4-го порядку:

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Він характеризує ступінь відхилення закону розподілу випадкової величини *X* від нормального (гауссового).

Розв'язання типових задач

Задача 1. Проводиться випробування надійності системи, яка складається з трьох приладів, що працюють незалежно один від одного. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) першого приладу дорівнює 0,9, другого — 0,8, третього — 0,7. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X — кількості надійних приладів у системі. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X і знайти ймовірності того, що X набуде можливого значення з проміжку (0,5; 2).

Розв'язання. Випадкова величина X набуває можливих значень 0, 1, 2, 3. Позначимо відповідно через g_1, g_2 і g_3 імовірності безвідмовної роботи першого, другого і третього приладів. Тоді за умовою задачі $g_1 = 0{,}9$; $g_2 = 0{,}8$; $g_3 = 0{,}7$, а отже, імовірність виходу з ладу цих приладів становить відповідно $\bar{g}_1 = 0{,}1$; $\bar{g}_2 = 0{,}2$; $\bar{g}_3 = 0{,}3$. За теоремами додавання і множення ймовірностей обчислимо ймовірності, з якими величина X набуває можливих значень:

$$p_0 = P\{X = 0\} = \bar{g}_1\bar{g}_2\bar{g}_3 = 0{,}006;$$
$$p_1 = P\{X = 1\} = g_1\bar{g}_2\bar{g}_3 + \bar{g}_1 g_2\bar{g}_3 + \bar{g}_1\bar{g}_2 g_3 = 0{,}092;$$
$$p_2 = P\{X = 2\} = g_1 g_2\bar{g}_3 + g_1\bar{g}_2 g_3 + \bar{g}_1 g_2 g_3 = 0{,}398;$$
$$p_3 = P\{X = 3\} = g_1 g_2 g_3 = 0{,}504.$$

Ряд розподілу величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

Для нього виконується умова: $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

За рядом розподілу та за означенням маємо функцію розподілу $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}006, 0 < x \le 1, \\ 0{,}006 + 0{,}0092 = 0{,}098, 1 < x \le 2, \\ 0{,}006 + 0{,}0092 + 0{,}398 = 0{,}496, 2 < x \le 3, \\ 0{,}006 + 0{,}0092 + 0{,}398 + 0{,}504 = 1, x > 3. \end{cases}$$

З властивостей функції розподілу отримаємо, що

$$P\{0{,}5 < X < 2\} = F(2) - F(0{,}5) = 0{,}098 - 0{,}006 = 0{,}092.$$

Задача 2. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Імовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання. Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення $X = 1$ буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює $0{,}75$. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої – придатну. За теоремою множення ймовірностей імовірність цієї події:

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

Аналогічно, $X = 3$, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки – придатна:

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}.$$

Нарешті, $X = 4$, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані:

$$P(X = 4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

Запишемо закон розподілу:

X	1	2	3	4
P	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними вище формулами.

$$MX = 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{64} + 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{58}{64},$$

$$MX^2 = 1 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 9 \cdot \frac{1}{64} = \frac{105}{64},$$

$$DX = \frac{105}{64} - \left(\frac{58}{64}\right)^2 = \frac{3008}{4096}.$$

Якщо подія A – {із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь}, тоді

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{255}{256}.$$

Задача 3. Задано функцію

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ ax^2 + bx, 1 < x \le 4; \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

Довести, що можна підібрати такі значення a i b, при яких $F(x)$ буде функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Знайти $P(2 \le X \le 3)$.

Розв'язання. Щоб знайти a і b скористаємося неперервністю функції розподілу в точках $x = 1$ і $x = 4$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = 0; \\ 16a + 4b = 1. \end{cases} \begin{cases} a = -b; \\ 16b + 4b = 1. \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{1}{12}; \\ a = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Отже,

$$F(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12}x.$$

Доведемо, що на цьому проміжку функція монотонно зростає. Відшукуємо похідну функції: $F'(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$. Похідна дорівнює нулю при $x = \frac{1}{2}$. На проміжку $(0; 4)$ похідна функції $F(x)$ додатна, а отже, ця функція зростає. Отже, $F(x)$ задає закон розподілу випадкової величини X.

Обчислюємо ймовірність:

$$P(2 \leq X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{12} \cdot 9 - \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Задача 4. Випадкова величина X задана законом розподілу:

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

Знайти середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Математичне сподівання знайдемо наступним чином

$$MX = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}5 = 6{,}4.$$

Далі знайдемо математичне сподівання X^2:

$$MX^2 = 2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54,$$

$$DX = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислимо наступним чином

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{13{,}04} = 3{,}61.$$

Задача 5. У грошовій лотереї випущено 100 білетів. Розігрується один виграш у 50 гривень і 10 виграшів по 1 гривні. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білету.

Розв'язання. Випишемо можливі значення X:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 50.$$

Ймовірність цих можливих значень дорівнюють:

$$p_1 = \frac{89}{100},\ p_2 = \frac{10}{100} = 0{,}1,\ p_3 = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Закон розподілу приймає вигляд:

X	0	1	50
P	0,89	0,1	0,01

Перевіримо контрольну суму:

$$0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1.$$

Математичне сподівання знайдемо

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 50 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}89 = 0{,}6,$$

а для знаходження дисперсії попередньо побудуємо закон розподілу величини X^2:

X^2	0	1	2500
P	0,89	0,1	0,01

Далі знайдемо її математичне сподівання

$$MX^2 = 2500 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}89 = 25{,}1.$$

Тоді

$$DX = 25{,}1 - 0{,}6^2 = 24{,}74.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Дискретну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0{,}3, & 0 < x \leq 2 \\ 0{,}4, & 2 < x \leq 3 \\ 0{,}7, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

Знайти закон розподілу випадкової величини X у табличній формі.

2. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a + b \cdot \mathrm{arctg} x, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнти a, b та щільність $f(x)$.

3.Проводяться чотири незалежних постріли в однакових умовах по деякій цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,25. Знайти закон розподілу для числа влучень у ціль.

4. Партія товару складається з 25 виробів, серед яких 6 бракованих. Навмання вибирають 3 вироби для перевірки їх якості. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа вибраних бракованих виробів.

5. Мисливець стріляє по дичині до 1-го попадання, але встигає зробити не більше 4-х пострілів. Скласти закон розподілу числа пострілів, вироблених мисливцем. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти функцію розподілу та побудувати многокутник розподілу.

6. Ймовірність виявити бракований виріб у партії з 10000 одиниць товару дорівнює 0,005. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини – числа бракованих виробів у партії.

7. Авіакомпанія виконує щоденно 2 рейси. Імовірність затримки першого рейсу за метеоумовами дорівнює 0,05, другого – 0,1. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості затриманих рейсів та знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення і моду цієї випадкової величини.

8. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка задана таким законом:

X	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

9. Неперервна випадкова величина X має щільність імовірності:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 2, \\ A(-x^2 + 6x - 8), 2 < x \le 4, \\ 0, x > 4. \end{cases}$$

Знайти параметр A, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду і медіану цієї випадкової величини.

10. Із урни, в якій є 4 білих і 6 чорних кульок, навмання і без повернення дістають 3 кульки. Випадкова величина X – число білих кульок у вибірці. Описати закон розподілу X, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

11. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ A \sin x, 0 < x \le \pi, \\ 0, x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: 1) Знайти коефіцієнт A; 2) побудувати графік щільності розподілу $f(x)$; 3) знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік; 4) обчислити ймовірність потрапляння величини X в інтервал $(0;\ \pi\ /\ 2\ )$.

12. Неперервна випадкова величина має щільність імовірності

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2, x \in (0;2) \\ 0, x \notin (0;2). \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , математичне сподівання, дисперсію, моду і медіану величини X.

13. Дискретну випадкову величину задано таким рядом розподілу

X	-0,1	x_2	0,2	0,4
p	0,3	0,1	p_3	p_4

Знайти x_2, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0{,}13$ і дисперсія $D(X) = 0{,}0341$. Скласти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайти ймовірність потрапляння цієї випадкової величини у проміжок $(-0{,}05;\ 0{,}2]$.

14. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1, \\ a(x-1)^3, 1 < x \le 4, \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

1) Визначте параметр A; 2) знайдіть щільність імовірності $f\ (x)$; 3) побудуйте графіки функцій $F\ (x)$ і $f\ (x)$; 4) знайдіть числові характеристики $M(X)$, $D\ (X)$, $\sigma(X)$.

15. Дискретну випадкову величину X задано рядом розподілу:

X	-0,1	0,2	0,4
p	p_1	p_2	p_3

Знайти ймовірності p_1, p_2 і p_3, якщо відомі математичне сподівання $M(X) = 0{,}21$ і дисперсія $D(X) = 0{,}0469$, побудувати функцію розподілу $F(x)$ та обчислити ймовірність того, що величина X у результаті випробування набуде можливого значення з проміжку $[0;\ 0{,}2]$.

2.2. Основні закони розподілу ймовірностей

1. Біноміальний закон розподілу

Біноміальний закон розподілу виникає у схемі Бернуллі, коли проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова подія A може або відбутися зі сталою ймовірністю p, або невідбутися з імовірністю $q = 1 - p$, а випадкова величина X – кількість появ події A в цих n випробуваннях.

Дискретна величина X набуває цілих невід'ємних значень m ($m = 0,1, \dots, n$) з імовірностями, які обчислюються за формулою Бернуллі

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Числові характеристики розподілу: $MX = np,\ DX = np(1-p)$.

2. Закон розподілу Пуассона

Розподіл Пуассона виникає в схемі Бернуллі, коли кількість n виконуваних незалежних випробувань велика, імовірність p появи події A в кожному випробуванні мала, а випадкова величина X – кількість появ події A в цих n випробуваннях.

Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень $m = 0,1, \dots$ з імовірностями

$$P_n(m) = P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (a > 0).$$

Цей розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові і дорівнюють a. Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень $a(0{,}1 - 20)$. У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності

$$P(X = m)\ і\ P(X \geq m).$$

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p або $1 - p$ прямують до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a = np$.

3. Геометричний розподіл

Геометричний розподіл виникає, коли незалежні випробування, у кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, проводяться до першого “невдалого” випробування (подія A не відбулась) і далі припиняються, а випадкова величина X – кількість проведених “вдалих” випробувань.

Закон подається формулою:

$$P(X = m) = p(1-p)^{m-1}, m = 1,2, \dots .$$

Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{1-p}{p^2}$.

4. Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X = m) = \frac{C_k^n C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, m = 0,1,2, \dots, n; k \geq n.$$

Наприклад, імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k – кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{kn}{N}, DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p = \frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a = \frac{nk}{N}$.

5. Рівномірний закон розподілу

Рівномірний розподіл неперервної випадкової величини X виникає у випробуваннях типу кидання навмання точки на відрізок $[a;\ b]$ (X – відстань точки від межі a відрізка), або у випробуваннях, пов’язаних з округленням вимірювань фізичних величин за допомогою приладів (X – похибка округлення).

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має ***рівномірний закон розподілу***.

Щільність рівномірного закону розподілу має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0, x > b\ . \end{cases}$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія рівномірного закону розподілу дорівнюють

$$MX = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна діставати величини з довільним законом розподілу.

6. Показниковий закон розподілу

Показниковий, або ***експоненціальний*** розподіл неперервної випадкової величини має широке застосування в теорії надійності технічного обладнання для характеристики терміну безвідказної роботи елементів та пристроїв і в теорії масового обслуговування для характеристики тривалості обслуговування.

Неперервна випадкова величина *X* розподілена за ***показниковим законом*** з параметром $a > 0$ якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ ae^{-ax}, x \ge 0. \end{cases}$$

Функція розподілу показникового закону розподілу задається формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1 - e^{-ax}, x \ge 0. \end{cases}$$

Показниковому розподілу задовольняють: час телефонної розмови, час ремонту техніки, час безвідмовної роботи комп'ютера.

Математичне сподівання та дисперсія величини X, розподіленої за показниковим законом розподілу можна знайти за формулами:

$$MX = \frac{1}{a}, DX = \frac{1}{a^2}.$$

7. Нормальний закон розподілу

Нормальний (гауссівський) закон розподілу неперервної величини є одним із найчастіше застосовуваних на практиці розподілів. Йому підлягають похибки вимірювань різних фізичних величин, розміри або маса виробів, які сходять з поточної лінії, тощо.

Неперервна випадкова величина X називається ***розподіленою за нормальним законом*** з параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

для всіх $x \in (-\infty; \infty)$.

Параметри a і σ, які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на проміжок використовується функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Часто застосовується також формула

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0,1,2,\dots,n$$

$$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X \ge 3) = C_5^3 0{,}8^3 0{,}2^2 + C_5^4 0{,}8^4 0{,}2 + 0{,}8^5 =$$
$$0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

Задача 2. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень $0, 1, 2, \dots$. Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено: $P(X = 0) = p = 0{,}2$. Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то $X = 1$; $P(X = 1) = p(1-p)$. Аналогічно

$$P(X = 2) = p(1-p)^2,\ P(X = 3) = p(1-p)^3, \dots,$$

$$P(X=k)=p(1-p)^k,\ldots.$$

Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо здобутий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y=m)=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\ldots$. Очевидно, що $X=Y-1$. Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$MX=M(Y-1)=MY-1=\frac{1}{p}-1=5-1=4,$$

$$DX=D(Y-1)=DY=\frac{1-p}{p^2}=20.$$

Задача 3. На автоматичну телефонну станцію надходить простий потік викликів, інтенсивність (щільність) якого $k=0{,}8$ (викликів/хв.). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Нехай X – випадкова величина (число викликів за 2 хвилини), яка розподілена за законом Пуассона з параметром $kt=0{,}8\cdot 2=1{,}6$. Маємо:

а) $P_2(0)=P(X=0)=\frac{(kt)^0}{0!}e^{-kt}=e^{-kt}=0{,}2024;$

б) $P_2(1)=P(X=1)=\frac{(1{,}6)^1}{1!}e^{-kt}=0{,}323;$

в) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-P_2(0)=0{,}798.$

Задача 4. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X\geq 3)=0{,}4$, а математичне сподівання рівне $MX=2$.

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу $f(x)=\frac{1}{b-a}$. Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\int_3^b \frac{1}{b-a}dx=0{,}4;\\ \int_a^b \frac{x}{b-a}dx=2\,;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{b-3}{b-a}=0{,}4;\\ \frac{a+b}{2}=2;\end{cases}\quad \begin{cases}0{,}6b+0{,}4a=3;\\ b=4-a;\end{cases}\quad b=7,\ a=-3.$$

Тому

$$f(x)=\begin{cases}0, x\leq -3;\\ 0{,}1 -3<x\leq 7;\\ 0, x>7.\end{cases}$$

Задача 5. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з $MX=0$ і $DX=25$ мкм^2. Чи відповідає заданій гіпотезі те, що в перевірених 6 деталях відхилення належить проміжку $[5,13)$? Рівень значущості $\alpha=0{,}0005$.

Розв'язання. Розглянемо подію A – {відхилення в 6 деталей належить проміжку $[5,13)$}. Обчислимо ймовірність цієї події і зіставимо її з рівнем значущості α. Якщо ймовірність буде меншою за α, то результат випробування не відповідатиме висунутій гіпотезі. Імовірність події A знайдемо за теоремою множення ймовірностей:

$$P(A)=p^6, \text{ де } p=P(5\leq X<13).$$

Обчислимо цю ймовірність:

$$P(5 \le X < 13) = \Phi\left(\frac{13-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{5}\right) = \Phi(2{,}6) - \Phi(1) =$$
$$0{,}4953 - 0{,}3413 = 0{,}154.$$

Тоді

$$P(A) = 0{,}154^6 < 0{,}2^6 = 0{,}000064.$$

Імовірність події A менша від рівня значущості. Отже, гіпотеза про закон розподілу не відповідає значенням випадкової величини у випробуваннях.

Задача 6. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $a = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання. Згідно з умовою потрібно знайти $P(|X| \ge 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$P(|X| \ge 10) = 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) =$$
$$1 - \Phi\left(\frac{10-5}{4}\right) + \Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right) = 1 - \Phi(1{,}25) - \Phi(3{,}75) =$$
$$1 - 0{,}3944 - 0{,}4999 = 0{,}1057.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати розподіл результатів іспитів для 200 студентів, які абсолютно нічого не знають з дисципліни і випадково вгадують відповіді на чотири питання з чотирма можливими варіантами відповідей на кожне з них (тільки одна з чотирьох відповідей правильна).

2. Середня кількість інкасаторів, що прибувають зранку на автомобілі в банк впродовж 15 хвилин, рівна 2. Інкасатори приїздять випадково і незалежно один від одного. Побудувати ряд розподілу числа інкасаторів, які приїжджають зранку на автомобілі в банк впродовж 15 хвилин. Знайти числові характеристики цього розподілу.

3. Проводиться перевірка великої партії деталей до виявлення нестандартної (без обмеження числа перевірених деталей). Побудувати закон розподілу числа перевірених деталей. Знайти його математичне сподівання та дисперсію, якщо відомо, що ймовірність браку для кожної деталі рівна 0,1.

4. З 20 лотерейних білетів виграшними є 4. Навмання вилучають 4 білети. Скласти ряд розподілу числа виграшних білетів серед відібраних. Знайти числові характеристики цього розподілу. 3) Знайти функцію розподілу числа виграшних білетів серед відібраних. 4) Визначити ймовірність того, що серед відібраних чотирьох білетів виявиться не менше трьох виграшних білетів.

5. Потяги метрополітену ходять регулярно з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу у будь-який момент часу. Яка ймовірність того, що чекати пасажиру доведеться не більше як півхвилини. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – часу чекання потягу.

6. Відомо, що час ремонту телевізорів є випадкова величина X, розподілена за показниковим законом. Знайти ймовірність того, що ремонт телевізора потребуватиме не менше 20 днів, якщо середній час ремонту телевізорів складає 15 днів. Знайти щільність ймовірності, функцію розподілу та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

7. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з математичним сподіванням $а = 950$ кг та середнім відхиленням $\sigma = 150$ кг. Знайти ймовірність того, що вага випадково відібраної туші: а) виявиться більшою 1250 кг; б) виявиться меншою 850 кг; в) буде знаходитись між 800 та 1300 кг.

8. За метеоумов, що склалися, імовірність вчасного відправлення кожного рейсу дорівнює 0,6. Випадкова величина X – кількість вчасно відправлених рейсів з трьох передбачених розкладом. Скласти ряд розподілу і знайти середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

9. Нехай випадкова величина X – кількість номерів, угаданих гравцем у лотереї «6 із 36». Побудувати ряд розподілу та обчислити середнє значення випадкової величини X . Знайти значення функції розподілу в точці $x = 3$.

10. Брак у продукції цеху з виробництва однотипних виробів становить 10 %. Для оцінювання якості великої партії виробів контролер навмання відбирає по одному виробу до появи першого бракованого. Знайти ряди розподілу, середнє значення та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – кількості відібраних доброякісних виробів.

11. Система продажу авіаквитків має 1000 пультів керування. Імовірність надходження запиту з кожного пульта протягом однієї хвилини дорівнює 0,002. Знайти: а) закон розподілу випадкової величини X – кількості запитів, що надійдуть до системи протягом однієї хвилини; б) середню кількість запитів; в) імовірність надходження протягом однієї хвилини принаймні двох запитів.

12. Автобуси вирушають із залізничного вокзалу до аеропорту з інтервалом 30 хв. Час очікування автобуса на зупинці – випадкова рівномірно розподілена величина *X*. Знайти функцію розподілу середнє значення та середнє квадратичне відхилення, а також імовірність того, що час очікування для пасажира, який у випадковий момент підійшов до зупинки, не перевищить 5 хв.

13. За даними відділу технічного контролю 10 % виробів підприємства має довжину, меншу від 14,4 см, а 20 % – довжину, більшу 15,2 см. Довжина виробів – нормально розподілена випадкова величина .*X*. Знайти середній (номінальний) розмір виробів і його середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

14. Час обслуговування пасажира в авіакасі – випадкова величина *X*, розподілена за показниковим законом із середнім значенням, що дорівнює 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який звернувся до каси, буде обслуговуватись: а) від 2 до 5 хв; б) більше 10 хв.

15. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Знайти середнє значення та середнє квадратичне відхилення для випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

2.3. Функції випадкового аргументу

Нехай X – дискретна випадкова величина, яку задано табличним законом розподілу:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Відомо, що $Y = \varphi(X)$, тоді закон розподілу Y має такий вигляд:

x_i	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Числові характеристики функції можна знайти за її законом розподілу або за формулами:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i, \qquad DY = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i))^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i\right)^2 .$$

Нехай X – неперервна випадкова, яку задано щільністю розподілу $f_1(x)$. Якщо $Y = \varphi(X)$ і φ — диференційована функція, монотонна в області значень X, то щільність розподілу цієї функції подається у вигляді

$$f(y) = f_1(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|,$$

де ψ – функція, обернена до φ. Якщо φ – не монотонна функція в області зміни аргументу, то обернена функція неоднозначна і щільність розподілу $f(y)$ визначається як сума стількох доданків, скільки значень має обернена функція:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} f_1(\psi(y))\left|\psi_i'(y)\right|,$$

де $\psi_i(y)$ – функції, обернені до φ.

Розв’язання типових задач

Задача 1. Робітник обслуговує 4 верстати, які розміщено в одну лінію на відстані а один від одного. Знайти закон розподілу для випадкової величини Z – відстані, яку проходить робітник між двома обслуговуваннями, вважаючи, що події – “робітник перебуває біля будь-якого з верстатів” і “довільний верстат потребує обслуговування” – рівноможливі.

Розв’язання. Розглянемо випадкові величини: X – номер верстата, біля якого перебуває робітник; Y – номер верстата, який потребує обслуговування. Якщо верстати перенумерувати у тій послідовності, в якій їх розміщено (1, 2, 3, 4), то закони розподілу X і Y наберуть такого вигляду:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

При цьому $Z = a|X - Y|$. Складаючи закон розподілу Z , обчислимо значення функції для всіх можливих комбінацій значень X і Y. Таких комбінацій буде 16. Імовірності для всіх цих комбінацій однакові і дорівнюють $\frac{1}{16}$ (за теоремою множення ймовірностей):

z_i	0	a	$2a$	$3a$	a	0	a	$2a$	$2a$	a	0	a	$3a$	$2a$	a	0
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

У таблиці значення z_i повторюються. Складаємо нову таблицю, в якій такі значення запишемо один раз, а їхні ймовірності додамо.

z_i	0	a	$2a$	$3a$
p_i	0,25	0,375	0,25	0,125

Задача 2. Випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \frac{1}{2}, 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{3}x, 1 < x \le 2; \\ 0, x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(y)$, якщо $Y = X^2$.

Розв'язання. Дослідимо задану функцію на монотонність: $y' = 2x$, $2x = 0$, $x = 0$. Отже, критична точка міститься на мережі зміни X. Функція монотонно зростає в області зміни аргументу x. Тому можна застосувати формулу:

$$f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|, \text{ де } x = \psi(y) = \sqrt{y},\ \psi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Щільність розподілу для X має два відмінні від нуля аналітичні вирази. Стільки ж виразів матиме і щільність розподілу Y.

Якщо $x \in (0; 1], y \in (0; 1]$, то $f_1(x) = \frac{1}{2}$,$f(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$. Якщо $x \in (0; 2], y \in (1; 4]$, тоді $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f(y) = \frac{1}{6}$. Звідси маємо:

$$f(y) = \begin{cases} 0, y \le 0; \\ \frac{1}{4\sqrt{y}}, 0 < y \le 1; \\ \frac{1}{6}, 1 < y \le 4; \\ 0, y > 4. \end{cases}$$

Задача 3. Швидкість обробки – випадкова величина X з напівнормальним законом розподілу:

$$f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x > 0.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини Y – часу, потрібного для обробки деталі, якщо сумарний час її обробки дорівнює A.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $Y = \frac{A}{X}$. Ця функція монотонна при додатних значеннях X. Скориставшись тією самою формулою, яка застосовувалась у попередніх прикладах, дістанемо:

$$f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|,\ x = \psi(y) = \frac{A}{y},\ \psi'(y) = \frac{A}{y^2},$$

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{A^2}{2y^2\sigma^2}} \cdot \frac{A}{y^2} = \frac{2A}{\sigma\sqrt{2\pi}y^2} e^{-\frac{A^2}{2y^2\sigma^2}}.$$

Оскільки область зміни Y – множина додатних чисел, то маємо:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2A}{\sigma\sqrt{2\pi}y^2} e^{-\frac{A^2}{2y^2\sigma^2}}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-2	-1	1	2	4
$P\{X = x_i\} = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Побудувати закон розподілу ймовірностей для випадкві величини $Y = 3X^2$

2. Нехай X – нормально розподілена випадкова величина з параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

3. За заданим законом розподілу

$X = x_i$	-4	-2	-1	1	2	4
$P\{X = x_i\} = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

обчислити $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$, якщо $Y = \cos^2 x$.

4. Випадкова величина X має розподіл Коші з щільністю $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^3 + 2$.

5. Щільність розподілу випадкової величини X рівна $f(x), 0 < x < +\infty$. Чому дорівнює щільність розподілу $f(y)$ випадкової величини $Y = \ln X$.

6. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 9]$. Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$, якщо $Y = \sqrt{x}$.

7. Випадкова величина X розподілена рівномірно на $(0, 2)$. Знайти дисперсію випадкової величини $Y = 3 - 2X$.

8. Задано щільність розподілу випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти щільність $f(y)$ та функцію розподілу $F(y)$ випадкової величини $Y = 2X^2$.

9. Випадкові величини X і Yзадані такими законами розподілу:

x_i	-1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

y_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

Побудувати закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$ та знайти математичне сподівання Z.

10. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X, для якої характеристична функція має вигляд

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\sin(t)}{t}, t\ne 0;\\ 1, \quad t=0.\end{cases}$$

11. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

X	-2	-1	0	1	2	4
p_i	0,05	0,2	0,2	0,3	0,1	0,15

Написати закон розподілу для функції $Y = \frac{2}{X^2+3}$.

12. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \frac{1}{2}x, 0<x\le 2;\\ 0, x>2.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $g(y)$ для функції $Y = X^3$.

13. Дана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X, можливі значення якої належать інтервалу $(-\infty; +\infty)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2$.

14. Випадкова величина X задана законом розподілу.

X	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Обчислити математичне сподівання і дисперсію для випадкової величини $\mathrm{Y} = \sin X$.

15. Задана щільність імовірності випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, x\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y = \sin 2X$.

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1 Закони розподілу системи випадкових величин і випадкових величин, які входять до системи

Сукупність випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, які розглядаються одночасно, називається ***системою*** n ***випадкових величин***. Якщо $n = 2$, тобто розглядається система двох випадкових величин (X, Y), то геометрично її можна тлумачити як випадкову точку з координатами (X, Y) на площині XOY, або як випадковий вектор, складові якого – випадкові величини X і Y. Аналогічно, якщо $n = 3$, то маємо випадкову точку (X, Y, Z), або випадковий вектор у тривимірному просторі. У загальному випадку систему n випадкових величин можна інтерпретувати як випадкову точку або випадковий вектор у просторі n вимірів.

Функція розподілу $F(x, y)$ системи двох випадкових величин визначає ймовірність спільного настання двох подій: $X < x$ і $Y < y$;

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрично функцію розподілу визначає ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить у нескінченний квадрат із вершиною в точці $M(x, y)$, що знаходиться лівіше й нижче від неї.

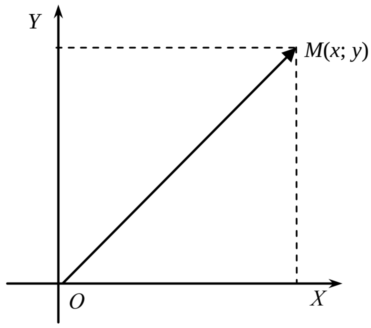

Рис. 3.1

Функція розподілу має такі властивості:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$;

2) $F(x, y)$ – неспадна функція x і y;

3) $F(-\infty, -\infty) = F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$;

4) $F(+\infty, +\infty) = 1$;

5) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$.

Функції $F_1(x)$ і $F_2(y)$ визначають закони розподілу для випадкових величин X і Y, які входять до системи.

За допомогою функції розподілу можна подати ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник, сторони якого паралельні осям координат:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) -$$
$$-F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

Як і в одновимірному випадку, системи випадкових величин можна розділити на два класи: дискретні і неперервні.

Закон розподілу системи (X, Y) дискретних випадкових величин можна задати таблицею (матрицею):

x_i \ y_i	y_1	y_2	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}

У першому її стовпці наведено всі можливі значення x_i $(i = 1,2,..,n)$ складової X, у першому рядку – можливі значення y_j $(j = 1,2,..,m)$ складової Y, а на перетині рядків і стовпців – імовірності p_{ij}, тобто ймовірності подій $\{X = x_i, Y = y_j\}$. Оскільки ці події утворюють повну групу, тоді для ймовірностей p_{ij} виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Для дискретної випадкової величини (X, Y) функція розподілу набуває вигляду суми:

$$F(x, y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij}.$$

Коли відомий закон розподілу системи випадкових величин, то можна знайти закони розподілу для її складових. Якщо в таблиці задано закон розподілу системи (X, Y), то ймовірності $p(x_i)$ і $p(y_j)$ визначаються за формулами:

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},\ P(Y = y_j) = p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Якщо розглядається система неперервних випадкових величин, то для неї визначається щільність розподілу $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$. При цьому $f(x, y)$ має такі властивості:

1. $f(x, y) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$.
3. Імовірність того, що неперервна випадкова величина (X, Y) потрапить в область D подається формулою:

$$P\big((X, Y)\epsilon D\big) = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

4. Функція розподілу системи двох випадкових величин виражається через

щільність розподілу $f(x,y)$:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$

Скориставшись властивостями функції розподілу системи неперервних величин, можна знайти щільності розподілу величин, які входять до цієї системи:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Умови незалежності випадкових складових системи

Дві випадкові величини ***незалежні***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина.

Теорема. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Наслідок. Щоб неперервні випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб диференціальна функція системи (X,Y) дорівнювала добутку диференціальних функцій складових

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Основні числові характеристики складових системи

Математичне сподівання і дисперсія випадкових величин X та Y обчислюються за формулами:

X і Y – дискретні	X і Y – неперервні
$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$	$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$
$M(Y) = \sum_{i=1}^{m} y_j \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$	$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$
$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{m} p_{ij} - M^2(X)$	$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$
$D(Y) = \sum_{i=1}^{m} y_j^2 \sum_{j=1}^{n} p_{ij} - M^2(Y)$	$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$

Умовні закони розподілу складових системи

Умовним розподілом дискретної випадкової величини X за умови, що $Y = y_j$, називається сукупність умовних імовірностей

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},$$

де $i = 1,2, \dots, n$.

Аналогічно визначається

$$p(y_j/x_i) = \frac{p(y_j, x_i)}{p(x_i)}, \text{ де } j = 1,2, \dots, m.$$

Умовні щільності для системи неперервних випадкових величин визначаються за формулами:

$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}; \varphi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$

Умовне математичне сподівання подається у вигляді:

2) для системи дискретних випадкових величин:

$$M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i/y_j), (Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x_i);$$

3) для системи неперервних випадкових величин:

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x/y)dx, M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y/x)dy.$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. Дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y) задано законом розподілу

y_i \ x_i	1	3	4
– 1	0,04	$2a$	0,1
0	0,05	0,2	0,1
2	a	0,05	0,01

Знайти: параметр a; закони розподілу випадкових величин X і Y; функцію розподілу $F(x,y)$; функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$; ймовірності $P(1{,}3 < X < 5; -0{,}1 < Y < 1)$; математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$; дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$; умовне математичне сподівання $M(Y/X = 0)$.

Розв'язання.

1) Параметр a знаходимо з умови $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$:

$$0{,}04 + 2a + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}1 + a + 0{,}05 + 0{,}01 = 1, \text{ або } a = 0{,}15.$$

2) Обчислюємо за допомогою формули $P(X = x_i) = p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ значення:

$$p(x_1) = 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}24, p(x_2) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}55,$$
$$p(x_3) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}21.$$

Далі записуємо ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	1	3	4
$p(x_i)$	0,24	0,55	0,21

Аналогічно, за формулою $P(Y = y_j) = p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$, знаходимо:

$$p(y_1) = 0{,}04 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}44, p(x_2) = 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}35,$$
$$p(x_3) = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}01 = 0{,}21$$

та записуємо ряд розподілу випадкової величини Y:

y_j	− 1	0	2
$p(y_j)$	0,44	0,35	0,21

3) Використовуючи формулу

$$F(x, y) = \sum_{x_i<x} \sum_{y_j<y} p_{ij}$$

знаходимо двовимірну функцію розподілу:

$$F(1, y) = 0, F(x, -1) = 0, F(3{,}0) = 0{,}04, F(3{,}2) = 0{,}04 + 0{,}05 = 0{,}09,$$
$$F(3, y)|_{y>2} = 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}15 = 0{,}24, F(4{,}0) = 0{,}04 + 0{,}3 = 0{,}34,$$
$$F(4{,}2) = 0{,}04 + 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}59,$$
$$F(4, y)|_{y>2} = 0{,}04 + 0{,}3 + 0{,}05 + 0{,}2 + +0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}79,$$
$$F(x, 0)|_{x>4} = 0{,}04 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}44,$$
$$F(x, 2)|_{x>2} = 0{,}04 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}79,$$
$$F(x, y)|_{x>4,y>2} = 0{,}04 + 0{,}3 + +0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1.$$

4) Скориставшись законами розподілу випадкових величин X і Y, знайдемо функції розподілу складових системи $F_1(x) = P(X < x)$ та $F_2(y) = P(Y < y)$:

$$F_1(1) = P(X < 1) = 0, F_1(3) = P(X < 3) = 0{,}24,$$
$$F_1(4) = P(X < 4) = 0{,}24 + 0{,}55 = 0{,}79,$$
$$F_1(x)|_{x>4} = P(X < x) = 0{,}24 + 0{,}55 + 0{,}24 = 1, F_2(-1) = P(Y < -1) = 0, F(0) = P(Y < 0) = 0{,}44 , F_2(2) = P(Y < 2) = 0{,}44 + 0{,}35 = 0{,}79,$$
$$F_2(y)|_{y>2} = P(Y < y) = 0{,}44 + 0{,}35 + 0{,}21 = 1.$$

5) З властивостей функції розподілу системи випадкових величин одержимо:

$$P(1{,}3 < X < 5; -0{,}1 < Y < 1) = F(5; 1) - F(1{,}3; 1) - F(5; -0{,}1) + +F(1{,}3; 1) = 0{,}79 - 0{,}09 - 0{,}44 + 0{,}09 = 0{,}35.$$

6) Для обчислення $M(X)$ і $M(Y)$ скористаємось рядами розподілу випадкових величин X і Y:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p\,(x_i) = 1 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}55 + 4 \cdot 0{,}21 = 2{,}73,$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j) = -1 \cdot 0{,}44 + 0 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}21 = -0{,}02.$$

7) Обчислюємо дисперсії випадкових величин X і Y:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i)-M^2(X)=1^2\cdot 0{,}24+3^2\cdot 0{,}55+4^2\cdot 0{,}21-2{,}73^2=1{,}097,$$

$$D(Y)=\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p(y_j)-M^2(Y)=(-1)^2\cdot 0{,}44+0^2\cdot 0{,}35+2^2\cdot 0{,}21-$$

$$-(-0{,}02)^2=1{,}2796.$$

8) Обчислимо значення умовних імовірностей: $p(x_i/y_2)=\frac{p(x_i,y_2)}{p(y_2)}$,

$$p(x_1/y_2)=\frac{0{,}05}{0{,}35}=\frac{1}{7},\ p(x_2/y_2)=\frac{0{,}2}{0{,}35}=\frac{4}{7},\ p(x_3/y_2)=\frac{0{,}1}{0{,}35}=\frac{2}{7}.$$

Тоді умовне математичне сподівання рівне:

$$M(X/Y=0)=1\cdot p(x_1/y_2)+3\cdot p(x_2/y_2)+4\cdot p(x_3/y_2)=$$
$$=1\cdot\frac{1}{7}+3\cdot\frac{4}{7}+4\cdot\frac{2}{7}=\frac{21}{7}=3.$$

Задача 2. Двовимірна випадкова величина (X,Y) має щільність розподілу $f(x,y)=ax^2(y+1)$ в області $D=\{y\geq x^2-1; y\leq 0\}$ і $f(x,y)=0$ поза областю. Знайти: 1) параметр a; 2) імовірність потрапити в область $D_1=\{y=x-1; y=0; x=0\}$.

Розв'язання. 1) Параметр a знаходимо з умови, що $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$. Тоді

$$\iint_D ax^2(y+1)dxdy=\int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{0} ax^2(y+1)dxdy=a\int_{-1}^{1}x^2\int_{x^2-1}^{0}(y+1)dy\,dx=$$

$$a\int_{-1}^{1}\frac{x^2(y+1)^2}{2}\Big|_{x^2-1}^{0}dx=\frac{a}{2}\int_{-1}^{1}x^2(1-x^4)dx=a\int_{0}^{1}(x^2-x^6)dx=$$

$$a\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1=a\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)=a\cdot\frac{4}{21}=1.$$

Звідси, $a=\frac{21}{4}=5{,}25$.

$$2)\ P\big((x,y)\epsilon D_1\big)=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_{x-1}^{0}\frac{21}{4}x^2(y+1)dxdy=$$

$$\frac{21}{4}\int_0^1 x^2\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_{x-1}^{0}dx=\frac{21}{4}\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{21}{8}\cdot\frac{2}{15}=\frac{7}{20}=0{,}35.$$

Задача 3. Двовимірна випадкова величина (X,Y) має щільність розподілу $f(x,y)=\frac{2}{3}x^2(y+1)$ у прямокутній області $D=\{y=-1; y=2; x=0, x=1\}$ і $f(x,y)=0$ поза областю. Знайти: 1) функцію розподілу $F(x,y)$; 2) $M(X)$ і $M(Y)$; 3) $D(X)$ і $D(Y)$.

Розв'язання. За означенням $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$, тоді $F(x,y)=0$, якщо $y\leq -1$ та $x\leq 0$;

$$F(x,y)=\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-1}^{y}\frac{2}{3}x^2(y+1)dxdy=\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{x}x^2dx\int\limits_{-1}^{y}(y+1)dy=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\cdot\frac{(y+1)^2}{2}=\frac{1}{9}x^3(y+1)^2,$$

якщо $-1<y\le 2,\ 0<x\le 1$ і $F(x,y)=1$, якщо $y>2$ і $x>1$.

Для того, щоб знайти $M(X)$ та $M(Y)$ потрібно визначити $f_1(x)$ і $f_2(y)$. Знайдемо ці щільності розподілів :

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int\limits_{-1}^{2}\frac{2}{3}x^2(y+1)dy=\frac{2}{3}x^2\int\limits_{-1}^{2}(y+1)dy=$$

$$\frac{2}{3}x^2\cdot\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=3x^2,\ f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=$$

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{2}{3}x^2(y+1)dx=\frac{2}{3}(y+1)\int\limits_{0}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}(y+1)\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{9}(y+1).$$

Математичні сподівання знаходимо за формулами:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)dx=\int\limits_{0}^{1}x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_{0}^{1}=\frac{3}{4},$$

$$M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y)dy=\int\limits_{0}^{1}y\cdot\frac{2}{9}(y+1)dy=\frac{2}{9}\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=1.$$

Дисперсії знаходимо за формулами

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x)dx-\big(M(X)\big)^2=\int\limits_{0}^{1}x^2\cdot 3x^2dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}x^5\Big|_{0}^{1}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2f_2(y)dy-\big(M(Y)\big)^2=\int\limits_{0}^{1}y^2\cdot\frac{2}{9}(y+1)dy\ =\frac{2}{9}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Система випадкових величин (X,Y) із невід'ємними складовими має функцію розподілу $F(x,y)=1-e^{-\alpha x}-e^{-\beta y}+e^{-\alpha x-\beta y}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. Знайти $f(x,y)$ і $P(1\le X<2;\ 2\le Y<3)$. Дослідити, чи будуть незалежними величини X і Y, які входять до системи.

Розв'язання. Обчислимо ймовірність за допомогою функції розподілу за наведеною раніше формулою:

$$P(1\le X<2;\ 2\le Y<3)=F(2,3)-F(1,3)-F(2,2)+F(1,2)=$$

$$1-e^{-2a}-e^{-3\beta}+e^{-2\alpha-3\beta}-1+e^{-a}+e^{-3\beta}-e^{-\alpha-3\beta}-$$

$$1+e^{-2a}+e^{-2\beta}-e^{-2\alpha-2\beta}+1-e^{-a}-e^{-2\beta}+e^{-\alpha-2\beta}=$$

$e^{-\alpha-3\beta}(-e^{-\alpha}+1)+e^{-\alpha-2\beta}(-e^{-\alpha}+1)=(1-e^{-\alpha})\big(1-e^{-\beta}\big)e^{-\alpha-2\beta}$.

Для дослідження незалежності X і Y знайдемо щільність розподілу системи:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\alpha e^{-\alpha x}-\alpha e^{-\alpha x-\beta y},$$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}=\alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}.$$

Щільність розподілу системи подано як добуток двох функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Отже, величини, що утворюють систему, незалежні.

Задача 5. Система випадкових величин рівномірно розподілена в даній області D. Знайти $f(x,y)$, $f_1(x)$, $f_2(y/x)$, $M(Y/x)$, $D(Y/x)$ й умовну ймовірність $P(0{,}2\le Y<1{,}6/X=3{,}5)$.

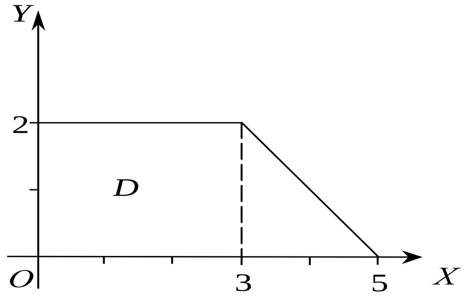

Рис. 3.2

Розв'язання. Для визначення щільності розподілу даної системи випадкових величин скористаємося її властивістю: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$, а також тим, що в області D функція $f(x,y)=c$. Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1,\qquad c\iint\limits_D dxdy=1.$$

Оскільки даний подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області, обчислимо його як площу трапеції: $S_D=\frac{3+5}{2}\cdot 2=8$.

Тоді

$$f(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\notin D;\\ \dfrac{1}{8},(x,y)\in D.\end{cases}$$

Знайдемо щільність розподілу $f_1(x)$. За формулою $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$. Якщо значення x недодатні, то щільність розподілу системи дорівнює нулю, а отже, щільність $f_1(x)=0$. Якщо $x\in(0{,}3]$, то область обмежена лініями $y=0$ і $y=2$. Маємо, $f_1(x)=\int_0^2\frac{1}{8}dy=\frac{1}{4}$. Коли x змінюється на проміжку (3,5] обмеження області D за y такі: знизу $y=0$, угорі $y=5-x$. Звідси $f_1(x)=\int_0^{5-x}\frac{1}{8}dy=\frac{5-x}{8}$. Нарешті, якщо $x>5$, $f_1(x)=0$ (згідно зі значенням $f(x,y)$). Запишемо щільність розподілу для X:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{4}, & 0 < x \le 3; \\ \dfrac{5-x}{8}, & 3 < x \le 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Знайдемо умовну щільність розподілу, скориставшись формулою $f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$. Тоді

$$f_2(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 < y < 2, 0 < x \le 3; \\ \dfrac{1}{5-x}, & 0 < y < 5-x, 3 < x < 5. \end{cases}$$

Умовна щільність має два відмінні від нуля аналітичні вирази, кожний з яких має певне умовне математичне сподівання та дисперсію.

Якщо $x \in (0,3)$, то $M(Y/X) = \int_0^2 \frac{1}{2} y dy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^2 = 1$, а якщо $x \in (3,5)$, тоді $M(Y/X) = \int_0^{5-x} \frac{y}{5-x} dy = \frac{1}{5-x} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^{5-x} = \frac{5-x}{2}$. Отже,

$$M(Y/X) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 3; \\ \dfrac{5-x}{2}, & 3 < x < 5. \end{cases}$$

Для знаходження умовної дисперсії обчислимо $M(Y^2/X)$. Якщо $x \in (0,3]$, тоді

$$M(Y^2/X) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{y^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}; D(Y/X) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3},$$

а якщо $x \in (3,5)$, тоді

$$M(Y^2/X) = \int_0^{5-x} \frac{y^2}{5-x} dy = \frac{1}{5-x} \cdot \frac{y^3}{3} = \frac{(5-x)^2}{3},$$

$$D(Y/X) = \frac{(5-x)^2}{3} - \frac{(5-x)^2}{4} = \frac{(5-x)^2}{12}.$$

Тобто,

$$D(Y/X) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0 < x \le 3; \\ \dfrac{(5-x)^2}{12}, & 3 < x < 5. \end{cases}$$

Для обчислення умовної ймовірності потрібно проінтегрувати умовну щільність на відповідному проміжку:

$$P(0{,}2 \le Y < 1{,}6/X = 3{,}5) = \int_{0,2}^{1,6} f_2(y/x) dy.$$

Якщо $x \in (3,5)$, то значення y обмежені нерівністю $0 < y < 5$. Тоді при $x = 3{,}5$ верхня межа для значення $y = 1{,}5$. Підставляючи у вираз для умовної щільності значення $x = 3{,}5$, маємо:

$$P(0{,}2 \le Y < 1{,}5/X = 3{,}5) = \int_{0,2}^{1,5} \frac{2}{3}\,dy = \frac{13}{15}.$$

Задачі для самостійного розв’язання

1. Систему двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано законом розподілу:

Y \ X	–2	–1	0	2
1	0,03	0,07	0,25	0,08
2	0,04	0,05	0,1	0,15
4	0,02	0,01	0	0,2

Знайти: а) закони розподілу випадкових величин X та Y; б) функцію розподілу $F(x, y)$; в) функції розподілу $F_1(x)$ і $F_2(y)$; г) імовірність $P(X < 1, Y < 3)$.

2. Систему двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано законом розподілу:

Y \ X	–2	–1	0	2
1	0,01	0,06	$5a$	0,11
2	0,07	a	0,09	0,14
4	0,03	0,13	0,02	0,04

Знайти: параметр a; $M(X)$ та $M(Y)$; $D(X)$ та $D(Y)$; $M(Y/X = 0)$.

3. Система двох випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу $f(x, y) = axy$ в області D і $f(x, y) = 0$ поза областю. Область D – трикутник, обмежений прямими $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Знайти: параметр a; $M(X)$ і $M(Y)$; $D(X)$ і $D(Y)$.

4. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	–2	–1	0	x_4	3
21	0,04	a	0,03	0,04	0,1
y_2	0,05	0,12	0,02	0,12	0,01
35	A	0,03	0,05	0,14	0,01

Знайти: параметр a; x_4 та y_2, якщо $M(X) = 0{,}36$, а $M(Y) = 28{,}14$.

5. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	–1	0	1
–3	0,13	0,07	0,18
0	0,06	0,08	0,11
1	0,04	0,02	0,03

2	0,05	0,12	0,02
4	0,01	0,03	0,05

Знайти: функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(y)$; $M(X)$ та $M(Y)$; $P(-3 < X < 0{,}52;\ -2{,}1 < Y < 2{,}7)$; $M(X/Y = 2)$.

6. Кожний із двох студентів відповідає на два поставлені питання. Імовірність правильної відповіді на кожне питання першим студентом дорівнює 0,9, другим – 0,8. Побудувати матрицю розподілу системи $(X;\ Y)$, якщо X – кількість правильних відповідей у першого студента, Y – у другого. Знайти ряди розподілу складових X і Y, а також установити, чи залежні складові системи.

7. Два контролери незалежно один від одного оцінюють якість двох виробів. Імовірність того, що кожний із виробів буде прийнятий першим контролером, дорівнює 0,9, другим – 0,7. Скласти закон розподілу системи $(X;\ Y)$, де X – кількість виробів, прийнятих першим контролером, Y – другим контролером, і рядирозподілу складових системи X і Y.

8. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	1,3	1,6	2,2	2,8
–1,5	0,03	$4a$	0,02	0,1
–0,6	0,06	0,09	0,02	0,01
0,8	a	0,15	0,05	0

Знайти: а) коефіцієнт a; б) ряди розподілу складових X і Y; в) функцію розподілу $F\,(x, y)$; г) імовірність події $\{1{,}3 < X \le 2{,}8; -0{,}6 \le Y \le 0{,}8\}$.

9. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	–1	0	1	2
1	0,04	a	0,03	0,1
2	0,05	0,12	0,02	0,01
3	a	0,03	0,05	0,01

Знайти: 1) параметр a; 2) закони розподілу випадкових величин X та Y; 3) функцію розподілу $F(x, y)$; 4) функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(y)$; 5) математичні сподівання $M(X)$ та $M(Y)$; 6) дисперсії $D(X)$ та $D(Y)$; 7) $P(-0{,}3 < X < 1{,}2;\ -0{,}1 < Y < 2{,}5)$; 8) $M(Y/X = 1)$.

10. Система випадкових величин (X,Y) має щільність розподілу

$$f(x; y) = \frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Знайти: 1) параметр А; 2) функцію розподілу $F\ (x, y)$; 3) ймовірність події $\{0 \le X \le 1; 0 \le Y \le 1\}$.

11. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	–1	0	x_3	3
–2	0,04	a	0,03	0,04
0	0,05	0,12	0,02	0,12
y_3	0,02	0,2	0,04	0,1
7	a	0,03	0,05	0,14

Знайти: 1) параметр a; 2) x_3 та y_3, якщо $M(X) = 1{,}37$, а $M(Y) = 2{,}4$; 3) $M(X/Y = y_3)$.

12. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	1	3	4	6
–5	0,11	0,04	0,02	0,1
–3	0,05	0,07	0,05	0,11
–2	0,04	0,04	0,03	0,04
0	0,03	0,1	0,08	0,03
2	0,01	0,03	0,04	0,04

Знайти: 1) функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(Y)$; 2) $M(X)$ та $M(Y)$; 3) ймовірність $P(-3 < X < 5; -3{,}4 < Y < 0{,}7)$.

13. Система неперервних випадкових величин має щільність розподілу

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x^2 + y), (x;y) \in D, \\ \quad 0, \qquad (x;y) \notin D, \end{cases}$$

де область D обмежено лініями $x = 0, y = x^2, y = 4$. Знайти: а) коефіцієнт *A*; б) функцію розподілу; в) математичні сподівання та середні квадратичні відхилення складових *X* і *Y*.

14. Систему двох дискретних випадкових величин задано таблицею

Y \ X	–2,3	–1,4	0,2	1,2
–0,5	0,12	$3a$	0,01	0,03
0	0,03	0,1	0,2	0,01
0,3	$2a$	0,12	0,06	0,07

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x,y)$; 3) ряди розподілу складових *X* і *Y*; 4) математичні сподівання складових.

15. Систему двох дискретних випадкових величин (X, Y) задано таблицею

Y \ X	-3	-2	1	3
0	0,04	0,04	0,03	0,1
1	0,02	0,16	0,22	0,01
2	0,06	0,01	0,02	0,02
3	0,11	0,07	0,06	0,03

Знайти: 1) закони розподілу випадкових величин X та Y; 2) функції розподілу $F_1(x)$ та $F_2(y)$; 3) $M(X)$ та $M(Y)$; 4) $D(X)$ та $D(Y)$; 5) ймовірності $P(-1{,}2 < X < 4{,}5; 0{,}4 < Y < 1{,}8)$; 6) $P(-1{,}2 < X < 4{,}5)$, $P(0{,}4 < Y < 1{,}8)$; 7) $M(Y/X = -2)$.

3.2. Числові характеристики системи випадкових величин. Функції кількох випадкових аргументів

Початковим моментом порядку $k + r$ ***системи*** (X, Y) називається величина $v_{k,r} = M(X^k - Y^r)$. Якщо $k = 1, r = 0$, маємо $v_{1,0} = MX$ при $k = 0$, $r = 1$ дістаємо $v_{0,1} = MY$.

Центральним моментом порядку X і Y називається величина $\mu_{k,r} = M((X - MX)^k (Y - MY)^r)$. При значеннях $k = 2, r = 0$, $\mu_{2,0} = M((X - MX)^2 = DX$. Якщо навпаки, $k = 0, r = 2$, то $\mu_{0,2} = M((Y - MY)^2 = DY$ нарешті, при $k = 1, r = 1$ – $\mu_{1,1} = M\big((X - MX)(Y - MY)\big) = K_{XY}$ – ***кореляційний момент*** (***коваріація***) випадкових величин X і Y. Його можна обчислити також за формулою: $K_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY$. Для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю.

Кореляційний момент характеризує тісноту лінійної залежності між величинами. З цією самою метою застосовують ***коефіцієнт кореляції***

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Якщо кореляційний момент (коефіцієнт кореляції) дорівнює нулю, то величини називаються ***некорельованими***. Із незалежності величин випливає їх некорельованість, але із некорельованості величин не випливає їх незалежність. Якщо величини пов’язані лінійною функціональною залежністю, то $\rho_{XY} = \pm 1$.

Для системи випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ числові характеристики задаються вектором математичних сподівань $a_1, a_2, \dots, a_n$ і кореляційною матрицею:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо елементи цієї матриці поділимо на добуток $\sigma_X\sigma_Y$, дістанемо матрицю, складену з коефіцієнтів кореляції:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай задано систему випадкових величин (X,Y) і функцію $Z = \varphi(X,Y)$. Потрібно знайти закон розподілу для Z. Якщо (X,Y) – система дискретних величин, то відомі ймовірності $p_{ij} = P\big(X = x_i; Y = y_j\big)$ і можна знайти ймовірності $P\Big(Z = z_{ij} = \varphi\big(x_i, y_j\big)\Big) = p_{ij},\ i = 1,2,3,\dots,m; j = 1,2,3,\dots,n.$

А якщо маємо систему неперервних випадкових величин, то для визначення $f(z)$ обчислюємо $F(z) = \iint_{D(z)} f(x,y)dxdy$ де $D(z)$ — область на площині xOy, в якій $\varphi(x,y) < z$.

Щільність розподілу $f(z)$ дістаємо диференціюванням функції розподілу.

Щільність розподілу суми двох випадкових величин $Z = X + Y$ подається формулами:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, z - y)dy.$$

Якщо X і Y – незалежні випадкові величини, то $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ і $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z - x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)f_2(z - y)dy.$

Нерідко доводиться розглядати суми випадкових величин, розподілених за нормальним законом. Здобута випадкова величина – результат підсумовування – має нормальний закон розподілу. Параметри розподілу додаються в тому разі, якщо величини незалежні. Додаючи дві нормально розподілені величини із параметрами $MX = a_1$, $DX = \sigma_1^2$, $MY = a_2$, $DY = \sigma_2^2$ і коефіцієнтом кореляції ρ_{XY}, маємо нормальний закон розподілу з параметрами $MZ = a_1 + a_2$, $DZ = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{XY}\sigma_1\sigma_2$.

У загальному випадку закон розподілу функцій двох неперервних випадкових величин визначаємо за такою схемою:

1) знаходимо область зміни системи випадкових величин (X,Y);
2) обчислюємо найбільше і найменше значення функції $Z = \varphi(X,Y)$ у заданій області;
3) розглядаємо сім'ю кривих $z = \varphi(x,y)$ і встановлюємо, скільки аналітичних виразів матиме $f(z)$;
4) будуємо лінію $z = \varphi(x,y)$ і визначаємо $D(z)$ тобто множину точок, для яких $\varphi(x,y) < z$;
5) інтегруємо щільність розподілу на множині $D(z)$ дістаючи $F(z)$
6) щоб знайти $f(z)$, диференціюємо функцію розподілу, враховуючи той факт, що коли:

$$\Phi(z) = \int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} dx \int_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y)dy\,,$$

тоді

$$\Phi'(z) = \int\limits_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \left(f(x, \psi_2(x,z)\psi_2'(x,z) - f(x, \psi_1(x,z)\psi_1'(x,z)\right) dx.$$

Числові характеристики функцій можна знайти, визначивши закон розподілу, а також скориставшись формулами, аналогічними тим, які застосовувались для функцій одного випадкового аргументу:

$$MZ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y) f(x,y) dxdy\,, DZ = MZ^2 - (MZ)^2,$$

$$MZ^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi(x,y)\big)^2 f(x,y) dxdy\ .$$

Розв'язання типових задач

Задача 1. Частка продукції заводу, що містить брак через дефект A, становить 3 %, а через дефект B – 4,5 %. Придатна продукція становить 95 %. Знайти коефіцієнти кореляції дефектів A і B.

Розв'язання. Розглянемо систему дискретних випадкових величин (X, Y) Вони дорівнюють відповідно 1, якщо продукція має дефект A або B, і нулю, якщо дефект відсутній. Можливі 4 комбінації значень змінних. Визначимо їхні ймовірності. За умовою придатна продукція становить 95 %, тому $P(X = 0, Y = 0) = 0{,}95$. Випадкова величина X набуває значення 1 з імовірністю 0,03, тоді $P(X = 0) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

Отже, $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(X = 0, Y = 0) = 0{,}97 - 0{,}95 = 0{,}02$. Далі, визначаємо такі ймовірності: $P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1) - P(X = 0, Y = 1) = 0{,}045 - 0{,}02 = 0{,}025$. Аналогічно, $P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 1 - 0{,}045 = 0{,}955$.

Запишемо результати обчислень у таблицю:

X \ Y	1	0	$p(y)$
1	0,025	0,02	0,045
0	0,005	0,95	0,955
$p(x)$	0,03	0,97	1

Для обчислення коефіцієнта кореляції ρ_{XY} визначимо кореляційний момент: $K_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY$. Знайдемо значення величин, які входять до цієї формули:

$$M(XY) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{2} x_i y_j p_{ij} = 0{,}025, MX = 0{,}03, MY = 0{,}045,$$

$$K_{XY} = 0{,}025 - 0{,}03 \cdot 0{,}045 = 0{,}02365.$$

Обчислимо дисперсії X і Y :

$$MX^2 = 0{,}03, \qquad DX = 0{,}0291, \qquad MY^2 = 0{,}045, \qquad DY = 0{,}042975,$$

$$\rho_{XY} = \frac{0{,}02365}{\sqrt{0{,}0291 \cdot 0{,}042975}} \approx 0{,}0669\,.$$

Задача 2. Випадкові величини X і Y мають відповідно математичні сподівання a і b , дисперсії σ_1^2 і σ_2^2 і коефіцієнт кореляції ρ_{XY} . Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma$, де α, β, γ – сталі.

Розв'язання. Згідно з властивостями математичного сподівання маємо:

$$MZ = M(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha MX + \beta MY + \gamma = \alpha a + \beta b + \gamma.$$

Величини X і Y залежні. Виведемо формулу для визначення дисперсії Z:

$$DZ = M(Z - MZ)^2 = M\big((\alpha X + \beta Y + \gamma) - M(\alpha X + \beta Y + \gamma)\big)^2 =$$

$$M\big((\alpha X + \beta Y + \gamma) - (\alpha a + \beta b + \gamma)\big)^2 = M\big(\alpha(X - a) + \beta(Y - b)\big)^2 =$$

$$M(\alpha^2(X - a)^2 + 2\alpha\beta(X - a)(Y - b) + \beta^2(Y - b)^2) =$$

$$\alpha^2 M(X - a)^2 + 2\alpha\beta M(X - a)(Y - b) + \beta M^2(Y - b)^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + 2\alpha\beta\sigma_1\sigma_2\rho_{XY} + \beta^2\sigma_2^2.$$

Задача 3. Визначити математичні сподівання і кореляційну матрицю системи випадкових величин (X, Y), якщо $f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2+y^2+1)^3}$.

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики системи за наведеними раніше формулами:

$$MX = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + y^2 + 1)^{-3} d(x^2 + y^2 + 1)\, dy = 0.$$

Очевидно, що з огляду на симетрію розподілу математичне сподівання Y також дорівнює нулю.

Визначаємо дисперсії величин, які входять до системи:

$$DX = MX^2 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Цей інтеграл обчислюємо, інтегруючи один раз частинами, а далі переходячи до полярних координат, отримаємо:

$$DX = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} =$$

$$\left(\begin{matrix} x = u;\ du = dx; \\ dv = \dfrac{x dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3};\ v = -\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}; \end{matrix}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-x}{4(x^2+y^2+1)^2}\right)\Big|_{-b}^{b}\right)dy+$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2+1)^2}=\begin{pmatrix} x=rcos\varphi;\ y=rsin\varphi; \\ dxdy=rdrd\varphi;\ x^2+y^2=r^2; \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{+\infty}\frac{rdr}{(r^2+1)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2(r^2+1)}\Big|_{-b}^{b}\right)\right)d\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{2}.$$

На підставі симетричності щільності розподілу системи маємо: $DY = DX = \frac{1}{2}$. Знайдемо K_{XY}. Математичні сподівання X і Y дорівнюють нулю, а тому

$$K_{XY}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}ydy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{(x^2+y^2+1)^3}=0$$

(нулю дорівнює внутрішній інтеграл, який було обчислено при знаходженні математичного сподівання X).

Отже, корреляційна матриця має вигляд $K=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Задача 4. Махове колесо виготовляється із двох однакових частин. Маса кожної з них – нормально розподілена величина з математичним сподіванням, що дорівнює a і дисперсією σ^2. Для балансування колеса важливою є різниця мас зазначених частин. Знайти закон розподілу заданої випадкової величини.

Розв'язання. Позначимо масу першої частини літерою X, а другої – Y. Різниця мас $Z=|X-Y|$ Закони розподілу X і Y задаються щільностями розподілу: $f_1(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $f_1(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$. Спільний розподіл X і Y $f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+(y-b)^2)}$. Область зміни системи (X,Y) – уся числова площина, функція Z набуває невід'ємних значень. При деякому додатному значенні z побудуємо область $|x-y|<z$. Ця область обмежена прямими $x-y-z=0$ і $x-y+z=0$.

Відповідну область зображено на рисунку:

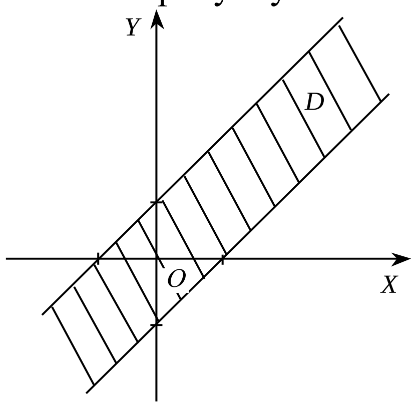

Рис. 3.3

Область $D(z)$, тобто область, для якої $|x-y|<z$, лежить між прямими (на рис. її заштриховано).

Побудуємо функцію розподілу:

$$F(z)=\iint_{D(z)} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}dx\int_{x-z}^{2x+z} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-a)^2}dy.$$

Диференціюючи функцію розподілу, дістаємо щільність розподілу:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2}\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x\pm a)^2}+e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-z-a)^2}\right)dx=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+(x-a+z)^2)}dx+\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+(x-a-z)^2)}dx=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+(x-a)^2+2z(x-a)+z^2)}dx+$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+(x-a)^2-2z(x-a)+z^2)}dx=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left((x-a)^2+z(x-a)\right)}dx+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\sigma^2}((x-a)^2-z(x-a))}dx\right).$$

Для обчислення знайдених невласних інтегралів застосуємо наведений далі інтеграл, який при $A>0$ виражається за допомогою інтеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2\pm 2Bx+C}dx=\sqrt{\frac{\pi}{A}e^{-\frac{AC-B^2}{A}}}.$$

Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2+z(x+a))}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((x-a)^2-z(x+a))}dx=\sigma\sqrt{\pi}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}.$$

Отже, щільність розподілу буде такою:

$$f(x)=2\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sigma\sqrt{\pi}e^{\frac{z^2}{2\sigma^2}}e^{\frac{z^2}{4\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}\ (z>0).$$

З точністю до сталої дістали так званий напівнормальний закон розподілу.

Задача 5. Маса деталей – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(2;\ 2{,}5]$. Знайти закон розподілу маси двох деталей.

Розв'язання. Позначимо масу однієї деталі літерою X, а другої – Y. Маса двох деталей $Z=X+Y$. Закони розподілу X і Y і системи (X,Y) визначаються через щільності розподілу:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ 2, & 2\le x\le 2{,}5;\\ 0, & x>2{,}5.\end{cases}$$

Множину S зображено на рис. 3.4-3.5.

Наведені раніше формули для визначення закону розподілу суми двох випадкових величин застосувати не можна, тому розв'яжемо задачу за загальними правилами. Знайдемо область значень для суми. Очевидно, що $z \in (4;\ 5]$. Пряма $x+y=z$ проходить через множину S і, якщо $4<z<4{,}5$ перетинає прямі $x=2$, $y=2$, область $D(z)$ – множина точок, які лежать нижче від прямої. Справді, якщо підставимо в рівняння прямої, координати, наприклад, точки $(2;\ 2)$, тоді вона задовольняє умову. Отже, якщо $z \in (4; 4{,}5)$, то область $D(z)$ має такий вигляд, як зображено на рис. 1.

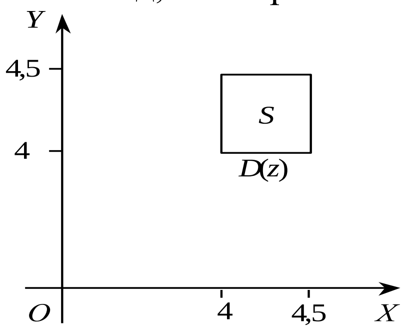

Рис. 3.4

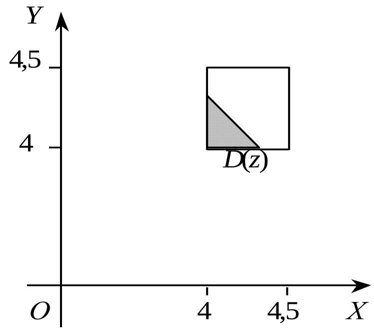

Рис. 3.5

Якщо $z \in (4; 4{,}5)$, то пряма $x+y=z$ перетинає прямі $x=2{,}5$; $y=2{,}5$. Область $D(z)$ лежить нижче від прямої (рис. 3.5).

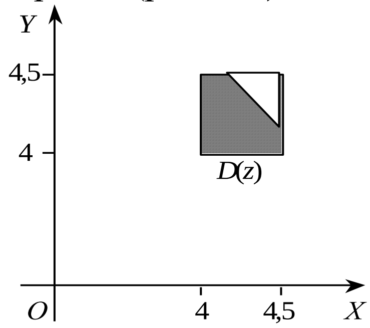

Рис. 3.6

Знайдемо аналітичні вирази для $f(z)$ Якщо $z \le 4$, то $F(z)=0$ і $f(z)=0$, якщо $4<z<4{,}5$, тоді

$$F(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{z-2} dx\int\limits_{2}^{z-x} dy, f(z)=\frac{1}{4}\int\limits_{2}^{z-2} dy=\frac{z-4}{4},$$

а якщо $4<z<4{,}5$, тоді

$$F(z)=\iint\limits_{D(z)} f(x,y)dxdy=1-\iint\limits_{S/D(z)} f(x,y)dxdy\,.$$

Для того, щоб зменшити кількість інтегралів, які потрібно обчислювати, знайдемо ймовірність протилежної події і зінтегруємо за множиною $S/D(z)$ (на рис. 3.4 її не заштриховано):

$$F(z)=1-\frac{1}{4}\int_{z-2{,}5}^{2{,}5} dx\int_{z-x}^{2{,}5} dy,\ \ f(z)=\frac{1}{4}\int_{z-2{,}5}^{2{,}5} dy=\frac{5-z}{4}.$$

Нарешті, якщо $z>5, F(z)=1, f(z)=0$. Запишемо щільність розподілу:

$$f(z)=\begin{cases}0, & z\le 4;\\ \dfrac{z-4}{4}, & 4<z\le 4{,}5;\\ \dfrac{5-z}{4}, & 4{,}5<z\le 5;\\ 0, & z>5.\end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 6 стандартних і 4 браковані вироби; у другій – 8 стандартних і 2 браковані, а у третій – 9 стандартних і 1 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити K_{XY} і ρ_{XY}.

2. Щільність імовірностей системи випадкових величин задана виразом

$$f(x,y)=\begin{cases}a\cos(x-y)\,, & (x;y)\in D,\\ 0, & (x;y)\notin D,\end{cases}$$

де $D=\left\{0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$. Визначити параметр a та ρ_{XY}.

3. Систему двох дискретних випадкових величин (X,Y) задано законом розподілу:

Y \ X	2	4	6	8
-6	$0{,}1a$	$0{,}1a$	$0{,}4a$	a
-4	$0{,}9a$	$0{,}4a$	$0{,}5a$	$0{,}2a$
-2	a	$2{,}1a$	$1{,}1a$	$1{,}8a$

Знайти: 1) параметр a; 2) коефіцієнт кореляції ρ_{XY}

4. Щільність імовірностей системи випадкових величин задана виразом

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y)\,, & (x;y)\in D,\\ 0, & (x;y)\notin D,\end{cases}$$

де $D=\left\{0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$. Побудувати кореляційну матрицю.

5. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x,y)=(1-e^{-4x})(1-e^{-5y}),\ x\ge 0, y\ge 0$$

знайти щільність імовірностей системи випадкових величин $f(x,y)$ та ρ_{XY}.

6. Систему двох дискретних випадкових величин (X,Y) задано законом розподілу:

Y \ X	1	2	3	4
0	0,15	0,1	0,2	0,05
2	0,1	0,09	0,15	0,11
4	0	0,03	0	0,02

Знайти: 1) ряди розподілу складових X і Y; 2) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

7. Система неперервних випадкових величин $(X;\, Y)$ задана щільністю розподілу

$$f(x,y) = \begin{cases} A\sqrt{x}y, (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$$

де область D обмежено лініями $y = \sqrt{x}\,, y = x^2$. Знайти: а) коефіцієнт A; б) функцію розподілу; в) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

8. Знайти $Z = \varphi(X,Y)$ і область зміни системи (X,Y), коли задано:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } z \le -2, \\ \int\limits_{-z}^{2} dy \int\limits_{0}^{z+y} f(x,y)dx, \text{ якщо} -2, z \le 0, \\ 1 - \int\limits_{z}^{2} dx \int\limits_{0}^{x-z} f(x,y)dy, \text{ якщо } 0 < z \le 2, \\ 1, \text{ якщо } z > 2. \end{cases}$$

9. Випадкові величини X, Y розподілені за такими законами: $f(x) = e^{-x}$, якщо $x > 0$, $f(y) = e^{-y}$ якщо $y > 0$. Знайти закон розподілу для випадкової величини $Z = X/Y$ і визначити $P(1 < Z < 5)$.

10. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку $(0, 3]$. Знайти закон розподілу для $Z = X + Y^2$.

11. Випадкові величини рівномірно розподілені на проміжку $(1, 3\,]$. Знайти закон розподілу для $Z = X/(X+Y)$.

12. Для підвищення надійності роботи вузла приладу паралельно під'єднано n однакових елементів, тривалість роботи яких розподілена показниково з параметром a. Знайти закон розподілу випадкової величини Z – тривалості роботи приладу. Скільки потрібно взяти елементів, щоб з $P > 0{,}9$ гарантувалася безперервна робота приладу протягом 150 год, якщо $a = 0{,}01$?

13. В електричній мережі послідовно з'єднано 5 опорів. Тривалість роботи кожного з них — випадкова величина X зі щільністю:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ ax, \ \ 0 < x \le 5; \\ 0, \ \ x > 5. \end{cases}$$

Знайти закон розподілу для випадкової величини Z – тривалості безперервної роботи опорів.

14. Систему випадкових величин (X, Y) задано законом розподілу:

X \ Y	0	1
–1	0,1	0,15
0	0,15	0,25
1	0,2	0,15

Знайти DZ, якщо $Z = X^2 + 2Y^2$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В.В., Барковський Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів: теорія ймовірності та математична статистика. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.
2. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1: Теорія ймовірностей. – К.:КНЕУ, 2000. – 304 с.
3. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.2: Математична статистика. – К.:КНЕУ, 2001. – 333 с.
4. Зайцев Є.П. Теорія ймовірності і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв’язком типових варіантів: навч. посібн. – К.:Алерта, 2013. – 440 с.
5. Сеньо П.С. Теорія ймовірності та математична статистика. – К.:Знання, 2007. – 507 с.
6. Черняк І.О., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач (для студентів економічних спеціальностей вищих учбових закладів). – К.:Знання, 2002. – 248 с.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.:Высшая школа, 2003. – 406 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції нормального розподілу Гаусса−Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$

Цілі і десяті частини x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Відповідальні за випуск: завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики, доктор технічних наук, проф. Грече Ф.Е., завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу кандидат фіз.-мат. наук, доц. Слюсарчук П.В.

Автори: канд. фіз.-мат. наук, доц. Млавець Ю.Ю.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О.О.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Ніколенко В.В.,
ст. викл. Герич М.С.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(Методичні вказівки до практичних занять
для студентів нематематичних спеціальностей)

Ч. 1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ