І. В. Хіміч, Й. М. Шуба

ФОРМ-ФАКТОРИ ПРИ АСИМТОТИЧНО ВЕЛИКИХ ПЕРЕДАНИХ ІМПУЛЬСАХ

1. Нещодавно Мартен [1], виходячи із припущення, що форм-фактор нуклона $f(t)$ є аналітичною функцією у комплексній площині квадрата імпульсу передачі t з розрізом вздовж дійсної осі від $4\mu^2$ до ∞, а також припущення про певний ріст $f(t)$ при $t \to \infty$, одержав таку нижню границю:

$$|f(t)| > A \exp(-b\,|t|^{1/2}), \quad t \to -\infty. \tag{1}$$

Пізніше Джаффе [2] вдалося лише на базі найзагальніших фізичних аксіом сучасної теорії поля без будь-яких чисто математичних припущень, наприклад припущення про помірність росту узагальненої функції $f(t)$, одержати інше обмеження на нижню границю $f(t)$, а саме:

$$|f(t)| > M \exp(-c\,t^{1/2-\varepsilon}), \quad t \to +\infty, \quad c > 0 \tag{2}$$

ε тут і далі — нескінченно мале додатне число.

Нижче ми покажемо, що нерівність (2) може бути суттєво підсилена при додаткових досить ліберальних припущеннях (див. формули (7), (8), (18), (21), (22)). Далі на основі аналітичних властивостей $f(t)$, які дають можливість застосувати узагальнений принцип максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до $f(t)$, та обмеження на нижню границю $f(t)$ при $t \to +\infty$ вздовж дійсної осі (див. формули (14), (15) та (25)) ми одержимо значно підсилене в порівнянні з (1) обмеження на нижню границю форм-фактора $f(t)$ при асимптотично великих імпульсах передачі вже у фізичній області, Слід зауважити, що фізичну область форм-фактора $f(t)$, який визначається з амплітуди процесу $\gamma+N\to N$, складають лише дійсні від'ємні значення переданого імпульсу t. Також буде показано, що асимптотика $|f(t)|$ при $t\to\infty$ у фізичній області тісно корельована з асимптотикою фази $f(t)$. Зокрема, коли фаза $f(t)$ задовольняє умову (24), модуль форм-фактора $f(t)$ може спадати не швидше, як поліном.

2. Форм-фактор $f(t)$ є аналітична функція [2] у комплексній t-площині з розрізом від $4\mu^2$ до $+\infty$ вздовж дійсної осі за винятком можливих комплексних особливостей, зосереджених в області, яка обмежена колом скінченного радіуса з центром в точці $t=0$ і задовольняє [3] принципу симетрії Шварца

$$f(t+i0)=f^*(t-i0). \tag{3}$$

Зручно надалі проводити викладки у верхній комплексній z-півплощині: $z=\sqrt{t}$. Представимо форм-фактор $f(z)$ у вигляді

$$f(z)=e^{ca(z)}. \tag{4}$$

Згідно з (2)—(4)

$$|\operatorname{Re} a(z)|<z^{1-\varepsilon} \quad \text{при } z\to+\infty, \tag{5}$$

$$a^*(-z^*)=a(z). \tag{6}$$

Припустимо, що при прямуванні z від 0 до $+\infty$ вздовж дісної осі

$$|\operatorname{Im} a(z)|<z^{1-\varepsilon}, \tag{7}$$

а також

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\pi\alpha\leqslant|\xi(z)|\leqslant\operatorname{tg}\pi\beta, \\ 0\leqslant\alpha<{}^1/_2, \quad 0\leqslant\beta<{}^1/_2, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\xi(z)\equiv\operatorname{Im} a(z)/\operatorname{Re} a(z)$. Обмеження (8) еквівалентне припущенню, що $a(z)$ асимптотично не чисто уявна. Тоді, користуючись методом роботи [4], можна показати, що для нескінченної послідовності значень z_i ($z_i\to+\infty$ при $i\to\infty$) мають місце нерівності

$$|a(z_i)|<z_i^{2\beta+\varepsilon} \text{ при } \xi(z)<0, \tag{9}$$

$$|a(z_i)|<z_i^{-2\alpha+\varepsilon} \text{ при } \xi(z)>0. \tag{10}$$

На основі (6) маємо, що і при $z_i \to -\infty$ $(i \to \infty)$ вздовж дійсної осі

$$|a(z_i)|<|z_i|^{2\beta+\varepsilon} \text{ при } \xi(z)<0, \tag{11}$$

$$|a(z_i)|<|z_i|^{-2\alpha+\varepsilon} \text{ при } \xi(z)>0. \tag{12}$$

Застосовуючи узагальнений принцип максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до $a(z)$ та вважаючи, що в $a(z)$ відсутні сильні осциляції і має місце нерівність

$$|a(z)|<\exp(\varepsilon|z|), \quad |z|\to\infty, \tag{13}$$

одержуємо, що і в усій верхній z-півплощині

$$|f(z)|>M\exp(-c|z|^{2\beta+\varepsilon}), \ \xi<0, \tag{14}$$

$$|f(z)|>M\exp(-c|z|^{-2\alpha+\varepsilon}), \ \xi>0. \tag{15}$$

Таким чином, при асимптотично великих значеннях квадрата імпульсу передачі t у фізичній області маємо

$$|f(t)|>M\exp(-ct^{\beta+\varepsilon}), \ \xi<0, \tag{16}$$

$$|f(t)|>M\exp(-ct^{-\alpha+\varepsilon}), \ \xi>0. \tag{17}$$

3. Розглянемо зараз випадок, коли $\operatorname{Im} a(z)$ якщо й росте, то порівняно повільно при $z\to+\infty$ вздовж дійсної осі

$$|\operatorname{Im} a(z)|<z^{\varepsilon}, \tag{18}$$

і покажемо, що в цьому випадку

$$|f(z)|>M\exp(-c|z|^{\varepsilon}) \tag{19}$$

як для $z\to+\infty$ вздовж дійсної осі, так і для $|z|\to\infty$ вздовж довільного напрямку верхньої z-півплощини. Нерівність (19) при $z\to+\infty$ вздовж дійсної осі, що рівносильна

$$|\operatorname{Re} a(z)|<z^{\varepsilon}, \tag{20}$$

буде доведена від супротивного: якщо $|\mathrm{Re}\,a(z)| > Mz^{\varepsilon_1}$, то внаслідок (18) функція $a(z)$ асимптотично повинна бути чисто дійсною функцією. Однак, враховуючи (2) і користуючись методом роботи [4], неважко одержати $|a(z_i)| < Mz_i^{\varepsilon}$, що суперечить припущенню, з якого ми виходили. А значить, при відсутності в $a(z)$ сильних осциляцій та виконанні умови (13) має місце обмеження (19).

4. Нарешті розглянемо більш конкретно випадок відсутності в $a(z)$ сильних осциляцій, тобто припустимо, що

$$|a(z_2)|z_2^{-\varepsilon} < |a(z_1)|\, z_1^{-\varepsilon}, \quad |a(z_2)|\, z_2^{\varepsilon} > |a(z_1)| z_1^{\varepsilon}, \quad z_2 > z_1. \tag{21}$$

Припустимо також, що при $z \to +\infty$ вздовж дійсної осі

$$\left|\frac{d\,\mathrm{Im}\ln a(z)}{dz}\right| < \frac{\varepsilon}{z}. \tag{22}$$

Використовуючи умови (21) і (22), неважко одержати, що $\mathrm{Im}\,a(z)$ і $|f(z)|$ зв'язані таким чином:

$$|f(z)| = C\exp\left[-\frac{2}{\pi F(z)}\int\limits_{z_0}^{z} dz'\,\frac{\mathrm{Im}\,a(z')}{z'}\right], \tag{23}$$

де $F(z) \to 1$, коли $z \to \infty$, а z_0 — деяка константа. Із рівняння (23) випливає, що як тільки

$$C_2 < \mathrm{Im}\,a(z) < C_1, \tag{24}$$

форм-фактор $f(z)$ при $z \to +\infty$ вздовж дійсної осі задовольняє нерівності

$$z^{(-2C_2+\varepsilon)\pi} > |f(z)| > Cz^{(-2C_1+\varepsilon)\pi}, \tag{25}$$

а значить, може спадати не швидше, як поліном. Як і в попередньому випадку, застосування узагальненого принципу максимуму Фрагмена—Ліндельофа—Неванлінни до $a(z)$ з врахуванням умови (13) та умови (6) приводить до нерівностей

$$|t|^{(-C_2+\varepsilon)\pi} > |f(t)| > C\,|t|^{(-C_1+\varepsilon)\pi}, \tag{26}$$

справедливих уже при асимптотично великих фізичних ($t<0$) імпульсах передачі.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Martin, Nuovo Cimento, 37, 671, 1965.
2. A. Jaffe, Phys, Rev. Lett., 17, 661, 1966.
3. С. Д. Дрелл, Ф. Захариазен, Электромагнитная структура нуклонов, ИЛ, М., 1962.
4. Ю. С. Вернов, ЖЭТФ, 50, 672, 1966; 53, 191, 1967.